Lineare Gleichungssysteme

1

1.1 Lineare Gleichungen mit einer Variablen

Basisaufgabe zum selbstständigen Lernen

① Löse die folgenden Gleichungen in deinem Heft. Notiere jeweils deine Lösungsschritte und gib die Lösungsmenge an.

a) $12+4\cdot(x-1)=3\cdot(x+2)+1$ x = ______ oder L = { ______ }

b) $12+3\cdot(x-1)=3\cdot(3+x)$

c) $12+3\cdot(x+1)=3\cdot(3+x)$

Alle Gleichungen, die bisher betrachtet wurden, können durch Äquivalenzumformungen in die Form $a\cdot x=b$ gebracht werden.

x heißt **Lösungsvariable**, a und b sind **Konstanten**.

② Bringe die Lösungsschritte zum Lösen der obigen Gleichungen durch Nummerieren von 1 bis 7 in die richtige Reihenfolge.

Bringe die Variable auf eine Seite.	Mache die Probe.
Vereinfache auf beiden Seiten.	Isoliere die Variable.
Löse die Klammern auf.	Gib die Lösungsmenge an.
Berechne die Variable.	

Betrachte die Gleichung $a\cdot x=b$ und ergänze die passenden Formulierungen.

Ist $a \neq 0$, so hat die Gleichung ________________________________.

Ist $a = 0$ und $b \neq 0$, so hat die Gleichung ________________________.

Ist $a = 0$ und $b = 0$, so hat die Gleichung ________________________.

(keine Lösung, unendlich viele Lösungen, genau eine Lösung)

Merke
Gleichungen mit einer Variablen *x* heißen lineare Gleichungen, wenn man sie durch Äquivalenzumformungen in die Form $a \cdot x = b$ bringen kann.

1. Überprüfe, ob es sich um lineare Gleichungen handelt. Wenn ja, löse sie und gib die Lösungsmenge an. Die Grundmenge ist $\mathbb{Q}$.

a) $12\,(8 - x) - 119 = 7 - (x + 8)$ b) $17 - 4\,(2x - 4) = (12 - 4x) - 15$

c) $2x^2 - 18 = (x + 12)(2x + 3)$ d) $12x^2 + 15x - 5 = (2x - 5)(4x + 5)$

e) $(x - 2)(9x + 5) = (3x - 2)^2$ f) $\dfrac{1}{x-1} = x + 3$

2. Löse die Gleichungen. Achte auf die Lösungsmenge.

a) $2(3x - 4) = 3(2x - 1) - 5$ b) $(x + 3)^2 - 4x = (x + 3)(x - 3) + 2x$

3. Bestimme die Lösungen. Bei diesen Aufgaben solltest du den Umgang mit Variablen und Rechengesetzen beherrschen.

a) $(2y + 5)^2 - 30 = 4(y + 5)(y - 1) + 19$ b) $2y^2 - 5(y + 2)^2 = (y - 3)^2 - 4(y + 1)^2$

c) $2x(8x - 3) - 5(2x - 1)(2x + 1) = (3 - 4x)(x - 4) - 3$

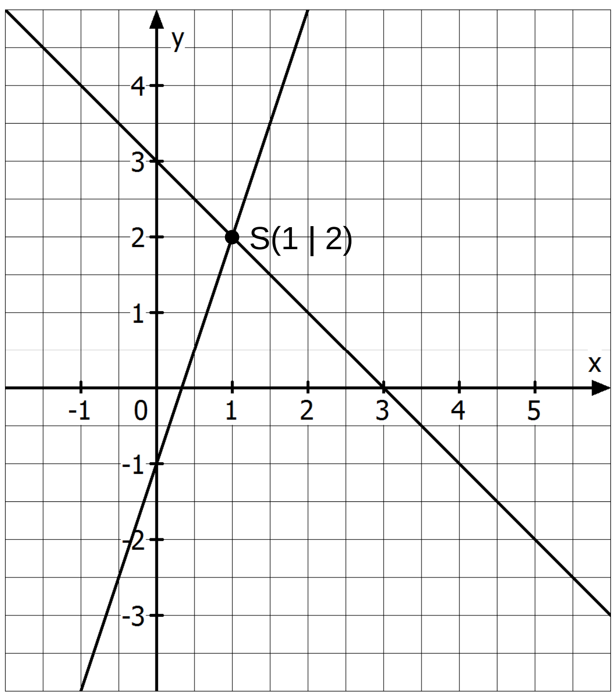
4. Lineare Gleichungen lassen sich auch zeichnerisch lösen.

Die lineare Gleichung $3x - 1 = -x + 3$ soll zeichnerisch gelöst werden. Vollziehe die Lösungsschritte nach.

a) Interpretiere jede Seite der Gleichung als Funktion.

$y = 3x - 1$	$y = -x + 3$

b) Die Graphen der beiden Funktionen sind gezeichnet.



Der *x*-Wert des Schnittpunktes *S* ist die Lösung der Gleichung $3x - 1 = -x + 3$. Lösung: $x =$ _______

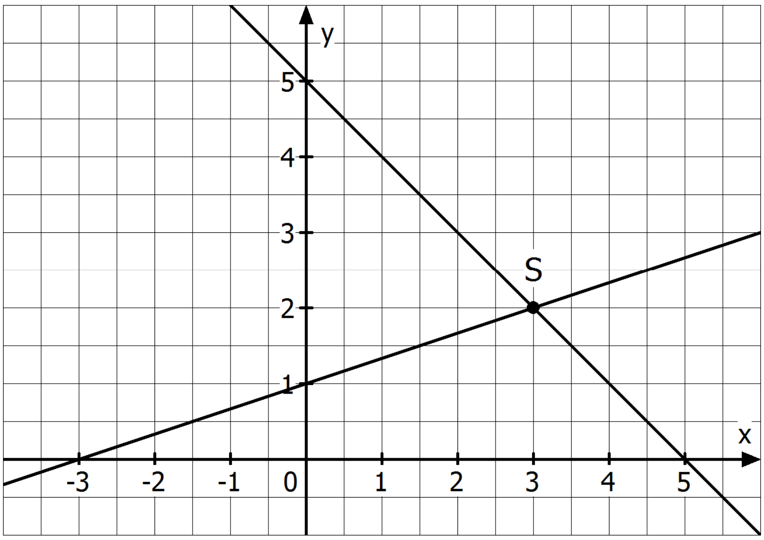
5. Löse die folgenden linearen Gleichungen graphisch.

a) $\frac{1}{2} \cdot x + 1 = -\frac{3}{4} \cdot x + 6$ b) $-2 \cdot x - 1 = 3$

c) $\frac{3}{4} \cdot x + 3 = -\frac{5}{4} \cdot x - 1$ d) $-\frac{5}{3} \cdot x + 4 = x - 4$

6. Die folgenden Schaubilder zeigen graphisch gelöste lineare Gleichungen. Schreibe jeweils die dazugehörige Gleichung auf und lies ihre Lösung am Schaubild ab.

a)



Gleichung:

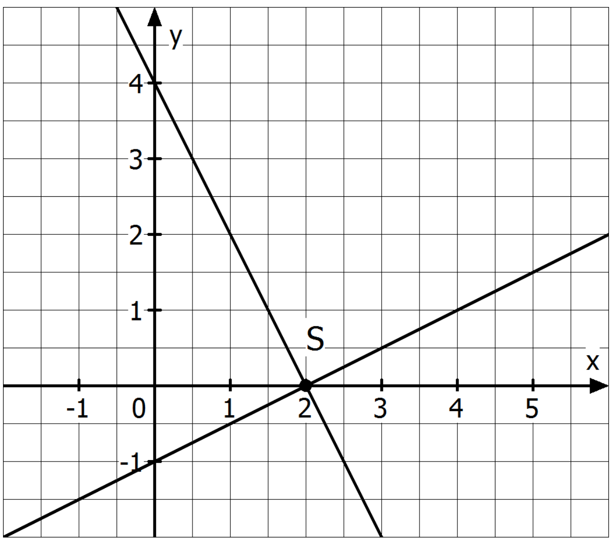
Lösung:

$x =$

Schnittpunkt:

$S($ | $)$

b)



Gleichung:

Lösung:

$x =$

Schnittpunkt:

$S($ | $)$

c) Überlege dir Nachteile der graphischen Lösungsmethode einer linearen Gleichung.

1.2 Lineare Gleichungen mit zwei Variablen

Basisaufgabe zum selbstständigen Lernen

Who wants to be a millionaire?

Quizsendungen in Form von Ratespielen sind im Fernsehen aktuell. Dabei soll in kurzer Zeit die richtige Antwort eingeloggt werden.

Aus der Kategorie „Mathematik" wird folgendes Zahlenrätsel mit den vier angegebenen Antwortmöglichkeiten präsentiert. Logge die richtige Antwort ein, indem du das Antwortfeld grün einfärbst.

Denke dir zwei Zahlen aus. Wenn du zum Doppelten der ersten Zahl die zweite Zahl addierst, dann muss das Ergebnis 15 sein.

Die zwei Zahlen müssen positiv sein.	Die zwei Zahlen müssen verschieden sein.
Es gibt unendlich viele Beispiele für solche zwei Zahlen.	Es können nur zwei Zahlen ausgewählt werden, die gleiches Vorzeichen haben.

Der Mathematiklehrer arbeitet dieses Ratebeispiel im Unterricht systematisch auf.

a) Ergänze das folgende Tafelbild

Was ist gesucht?	
Rätselsituation	**Mathematisch erfassen = Modellieren**
	1. Zahl: ………………… 2. Zahl: …………………
Zusammenhänge erkennen	
Das Doppelte der….	
Lösen	

b)

Paul hat **geraten**: Die erste Zahl ist 3, die zweite 9. Wie kann Paul überprüfen, ob seine Zahlen stimmen?	(___ | ___), weil ______________________ .

c)	William hat **systematisch probiert**: Wenn die erste Zahl 1 ist, dann ist die zweite Zahl ___________ . Wenn die erste Zahl 2 ist, dann ist die zweite Zahl __________ . Wenn die erste Zahl 3 ist, dann ist die zweite Zahl __________ .	(1 /____) (2 /____) (3 /____)
	Interpretieren	
d)	Es gibt ____________________ viele Lösungen für dieses Zahlenrätsel. Zu jeder beliebigen ersten Zahl erhält man immer eine zweite Zahl, indem man __________________________________ .	Lösungsmenge: L = $\{(x\|y) \mid y =$ __________ $\}$

Merke
Die Aussageform $a \cdot x + b \cdot y = c$ mit $a, b, c \in \mathbb{Q}$ heißt **lineare Gleichung mit zwei Variablen**. x und y sind die Lösungsvariablen, a, b und c sind Konstanten. Die Lösungen solcher Gleichungen sind **Zahlenpaare**.
Beispiel: $3x - y = 5$ ist eine lineare Gleichung mit zwei Variablen. • (2 | 1) ist **eine Lösung**, denn $3 \cdot 2 - 1 = 5$. • (1|2) ist **keine Lösung**, denn $3 \cdot 1 - 2 \neq 5$.

7. Überprüfe durch Einsetzen, ob die Zahlenpaare Lösungen der Gleichung sind.

a)	$3x + 5y = 10$	(0|2)	(10|–8)	(5|–1)	(15|7)	$(\frac{5}{3} \mid 1)$	$(\frac{1}{2} \mid 1{,}7)$
b)	$y + 2x = 6$	(0|–6)	(1|4)	(–1|8)	(0,5|–5)	(1,5 | 3)	(3 | 0)

8. Bestimme in nachstehenden Zahlenpaaren die fehlende Zahl so, dass sich eine Lösung der Gleichung $3x - \frac{1}{2}y = 1$ ergibt.

a) $(0|y)$ b) $(x|2)$ c) $(-1|y)$

d) $(0{,}4|y)$ e) $(x|-\frac{3}{2})$ f) $(\frac{5}{3}|y)$

9. Die Klasse 9a soll den Geldbetrag von 27ct nur mit 2- und 5-Cent-Münzen darstellen. Dafür schreibt der Mathematiklehrer folgende Gleichung an die Tafel:

$$2 \cdot x + 5 \cdot y = 27 .$$

a) Welche Bedeutung haben die Lösungsvariablen x und y ?

b) **Nur** mit 2-Cent-Münzen lässt sich dieser Geldbetrag nicht darstellen. Begründe.

c) Zur Lösung des Problems legt sich Sophie die folgende Tabelle an:

x	y	$2 \cdot x + 5 \cdot y$

Finde alle Lösungen des Problems und notiere sie als Zahlenpaare.

d) Welche Zahlenmenge kommt für die Lösungen nur in Frage?

10. Info

Ist E die Einerziffer und Z die Zehnerziffer einer zweistelligen Zahl im Zehnersystem, so lässt sich die zweistellige Zahl als Summe folgendermaßen schreiben:

$$10 \cdot Z + 1 \cdot E .$$

a) Gesucht wird eine zweistellige Zahl. Wenn man vom Neunfachen der Zehnerziffer das Dreifache der Einerziffer subtrahiert, erhält man 30. Wie heißt die zweistellige Zahl?

b) Überlege dir, welche Ziffern für die Zehnerziffer Z bzw. für die Einerziffer E in Frage kommen.

Ziffern	Mögliche Ziffern
Z	
E	

Gib den Zusammenhang zwischen Zehnerziffer und Einerziffer algebraisch an.

c) Wie lautet die gesuchte zweistellige Zahl?