1

Die ganzen Zahlen, Addition und Subtraktion

Die natürlichen Zahlen sind dir zuerst im Alltag beim Zählen und Nummerieren begegnet. In der Grundschule hast du dann gelernt mit natürlichen Zahlen zu rechnen. Mit der Menge der natürlichen Zahlen, ihren Eigenschaften und Rechengesetzen bist du in Klassenstufe 5 vertraut gemacht worden. Dabei hast du erkannt, dass in dieser Zahlenmenge nicht alle Grundrechenarten uneingeschränkt ausgeführt werden können und auch nicht alle Sachverhalte des täglichen Lebens beschrieben werden können.

1.1 Hinführung zu den ganzen Zahlen

An einem Wintertag stieg die Temperatur von morgens 7 Uhr bis mittags 3 Uhr um 9°C auf 5°C an. Welche Temperatur hat das Thermometer um 7 Uhr angezeigt?

Wir versuchen das Problem mit einer Gleichung zu lösen:

Temperatur um 7 Uhr + 9°C = 5°C.

Zum Rechnen verwenden wir aber nur die Maßzahlen der Temperaturen, wobei wir die Maßzahl der unbekannten Temperatur um 7 Uhr mit x bezeichnen. Dann lautet die entsprechende Gleichung:

$$x+9=5$$

Wir versuchen die Gleichung zu lösen, indem wir auf beiden Seiten 9 subtrahieren:

$$x+9=5 \quad \big| -9$$

$$x=5-9$$

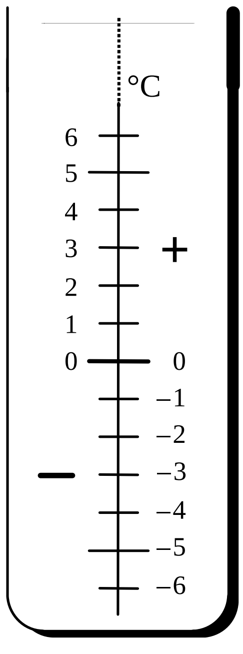

Bild 1.1

Diese Gleichung ist in $\mathbb{N}$ nicht lösbar, da die Differenz $5-9$ keine natürliche Zahl ergibt[1].

Du kannst das Problem aber lösen, indem du auf der Temperaturskala des Thermometers 9°C abwärts zählst (Bild 1.1): Um 7 Uhr waren es -4°C.

---

[1] In Klasse 5 hast du gelernt: Die Differenz $a-b$ ergibt nur dann eine natürliche Zahl, wenn a mindestens so groß wie b ist (siehe Skript Klasse 5, Abschnitt 3.1).

Fritz hat bei seiner Schwester Frieda Geld ausgeliehen. Beim Zurückzahlen seiner Schulden gibt er ihr einen 10 €-Schein. Daraufhin hat er bei Frieda noch ein Guthaben von 3 €.

Wie hoch waren seine Schulden?

Wir wollen versuchen, auch dieses Problem mithilfe einer Gleichung zu lösen:

$$\text{Schulden} + 10\,€ = 3\,€$$

Zum Rechnen verwenden wir aber wiederum nur die Maßzahlen der Geldbeträge, wobei wir die Maßzahl des unbekannten Betrags, also der Schulden, mit x bezeichnen. Als Gleichung ergibt sich dann:

$$x + 10 = 3$$

Wir versuchen sie zu lösen, indem wir auf beiden Seiten 10 subtrahieren:

$$x + 10 = 3 \qquad \Big| -10$$

$$x = 3 - 10$$

Auch diese Gleichung ist in $\mathbb{N}$ nicht lösbar, da die Differenz $3-10$ keine natürliche Zahl ergibt.

Wir können aber auch dieses Problem lösen, indem wir uns eine Geldskala anlegen, auf der wir nach links die Schulden und nach rechts das Guthaben abtragen. Schuldenbeträge erhalten ein Minuszeichen, Guthabenbeträge erhalten ein Pluszeichen (Bild 1.2).

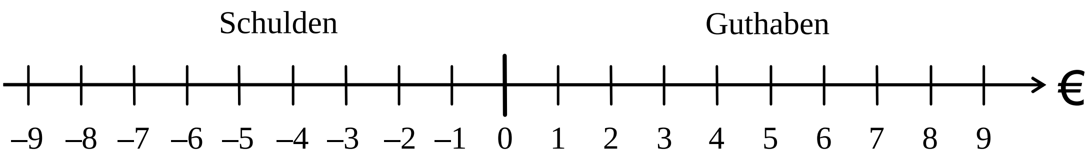

Bild 1.2

Wir zählen von 3 ausgehend 10 Einheiten nach links und sind dann bei –7.

Fritz hatte also 7 € Schulden.

Wie diese beiden vorangehenden Betrachtungen zeigen, weist die Menge der natürlichen Zahlen Mängel auf:

Merke

(1) In der Zahlenmenge $\mathbb{N}$ kann man nicht uneingeschränkt subtrahieren.

(2) In der Zahlenmenge $\mathbb{N}$ ist nicht jede Gleichung der Form $x + a = b$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ lösbar.

(3) Die natürlichen Zahlen reichen nicht aus, um einfache Sachverhalte des täglichen Lebens mathematisch zu beschreiben.

☞ **Um diese Mängel zu beheben, benötigen wir neue Zahlen.**

1.2 Die Menge der ganzen Zahlen

Wie der vorherige Abschnitt zeigt, ist es manchmal hilfreich, Skalen, auf denen natürliche Zahlen markiert sind, um Markierungen für noch unbekannte Zahlen zu erweitern.

Wir zeichnen dazu eine Zahlengerade und markieren die Zahlpunkte für die natürlichen Zahlen.

Dann werden die Zahlpunkte der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... am Nullpunkt der Zahlengeraden gespiegelt. Den Spiegelpunkten ordnet man die neuen Zahlen $\mathbf{-1}$, $\mathbf{-2}$, $\mathbf{-3}$, ... zu (Bild 1.3). Sie heißen **negative ganze Zahlen**.

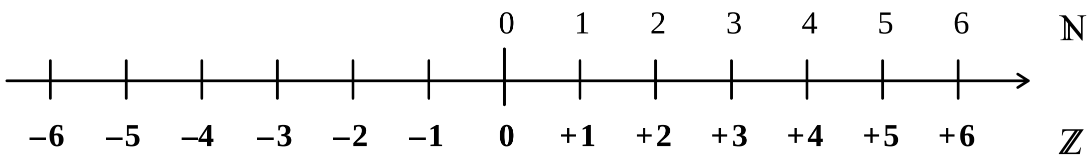

Bild 1.3

Dies führt zu folgender Definition:

Definition 1.1
Der Zahlpunkt der Zahl $n \in \mathbb{N}^*$ wird am Nullpunkt der Zahlengeraden gespiegelt. Dem Spiegelpunkt ordnet man die Zahl $\boldsymbol{-n}$ (lies: minus n) zu.
Die Zahl $-n$ heißt **negative ganze Zahl**.

Die durch Punkte der Zahlengeraden dargestellten Zahlen, nämlich die natürlichen Zahlen und die negativen ganzen Zahlen bilden zusammen die **Menge der ganzen Zahlen**.

Die Zahlen 1, 2, 3, … heißen positive ganze Zahlen; wir schreiben sie auch in der Form +1, +2, +3, …

Definition 1.2
(a) Die Menge $\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$ heißt **Menge der ganzen Zahlen**.
(b) Die Menge $\mathbb{Z}^- := \{\ldots, -4, -3, -2, -1\}$ heißt **Menge der negativen ganzen Zahlen**.
(c) Die Menge $\mathbb{Z}^+ := \{+1, +2, +3, +4, \ldots\}$ heißt **Menge der positiven ganzen Zahlen**.
(d) Die Menge $\mathbb{Z}^* := \{1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$ heißt **Menge der ganzen Zahlen ohne die Null**.

Bemerkungen

1. Positive ganze Zahlen haben das **Vorzeichen** „ + “, negative ganze Zahlen haben das Vorzeichen „ – “.

   Das Vorzeichen „ + “ kann man weglassen. Bei einer ganzen Zahl ohne Vorzeichen kann man sich das Vorzeichen „ + “ ergänzt denken.

   Achtung: Unterscheide ab sofort zwischen Vorzeichen, wie z. B. bei -4 oder bei +9, und Rechenzeichen, wie z. B. bei $8-3+4$.
2. Nach 1. gilt: $\mathbb{Z}^+ = \{+1, +2, +3, +4, \dots\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\} = \mathbb{N}^*$, d.h. die Menge der positiven ganzen Zahlen ist gleich der Menge der natürlichen Zahlen ohne die Null.
3. Die Menge der ganzen Zahlen setzt sich zusammen aus den positiven ganzen Zahlen, den negativen ganzen Zahlen und der Null.
4. Die Menge der ganzen Zahlen ist eine **Erweiterung** der Menge der natürlichen Zahlen, denn nach 3. gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
5. Jede ganze Zahl hat einen Vorgänger und einen Nachfolger.
6. Es gibt unendlich viele ganze Zahlen.

Anordnung in $\mathbb{Z}$

Zum Schluss dieses Abschnitts noch ein Hinweis zur Anordnung der ganzen Zahlen. Mithilfe der Zahlengeraden und als Fortführung der Anordnung in $\mathbb{N}$ gelingt folgende anschauliche Definition:

Definition 1.3

Die ganze Zahl a heißt **kleiner als** die ganze Zahl b (in Zeichen: $\boldsymbol{a < b}$), wenn der Zahlpunkt von a auf der Zahlengeraden links vom Zahlpunkt von b liegt.

Beispiel

In $\mathbb{Z}$ gilt:

a) $3 < 7$, denn der Zahlpunkt von 3 liegt auf der Zahlengeraden links vom Zahlpunkt von 7.

b) $-2 < 2$, denn der Zahlpunkt von –2 liegt auf der Zahlengeraden links vom Zahlpunkt von 2.

c) $2 < 8$, denn der Zahlpunkt von 2 liegt auf der Zahlengeraden links vom Zahlpunkt von 8.

d) $-8 < -2$, denn der Zahlpunkt von –8 liegt auf der Zahlengeraden links vom Zahlpunkt von –2.

e) $-4 > -12$, denn der Zahlpunkt von –4 liegt auf der Zahlengeraden **rechts** vom Zahlpunkt von –12.

1.3 Betrag

In Bild 1.4 sind die Abstände einiger Zahlpunkte vom Nullpunkt der Zahlengeraden eingetragen.

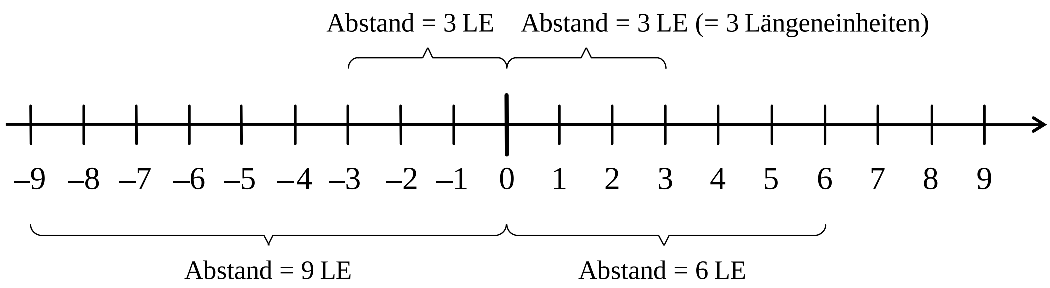

Bild 1.4

Die Maßzahl eines Abstands ist nie negativ. Beachte auch, dass z.B. die Zahlpunkte von –3 und 3 den gleichen Abstand vom Nullpunkt haben, nämlich 3 LE (LE = Längeneinheit).

Die folgende Tabelle enthält noch zu weiteren ganzen Zahlen jeweils die Maßzahl des Abstands ihres Zahlpunktes vom Nullpunkt der Zahlengeraden.

Zahl	–21	–9	–3	0	3	6	8
Maßzahl des Abstands des ZP (Zahlpunkt) vom Nullpunkt	21	9	3	0	3	6	8

Folgender Begriff ist festgelegt:

Definition 1.4
Die Maßzahl des Abstands des Zahlpunkts einer ganzen Zahl a vom Nullpunkt der Zahlengeraden heißt **Betrag von a** und wird mit $|a|$ (lies: Betrag von a) bezeichnet. Die senkrechten Striche heißen **Betragsstriche**.

Beispiel 1

a) Zu der Zahl -3 ist die Maßzahl des Abstands des ZP vom Nullpunkt 3 (Bild 1.5). Somit hat die Zahl -3 gemäß Definition 1.4 den Betrag 3.
In Zeichen: $|-3| = 3$

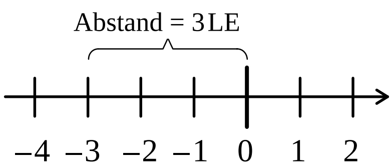

Bild 1.5

b) Zu der Zahl 6 ist die Maßzahl des Abstands des ZP vom Nullpunkt 6 (Bild 1.6). Somit hat die Zahl 6 gemäß Definition 1.4 den Betrag 6.
In Zeichen: $|6| = 6$

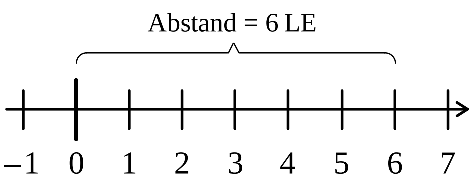

Bild 1.6

☞ Die Zahl 0 hat gemäß Definition 1.4 den Betrag 0, in Zeichen $|0| = 0$, weil der Abstand des Nullpunkts vom Nullpunkt natürlich 0 ist.

Wie du leicht siehst, gelten folgende Sachverhalte:

Merke

(1) Der Betrag einer ganzen Zahl ist stets eine natürliche Zahl.
Kurz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|n| = n$ und $|-n| = n$.

(2) Der Betrag einer ganzen Zahl ist immer größer oder gleich null.
Kurz: Für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt: $|a| \geq 0$.

Gleichungen mit Beträgen

Beispiel 2

a) $|x| = 3$, $L = \{-3, 3\}$ b) $|x| = 0$, $L = \{0\}$

c) $|x| = -6$, $L = \{\ \}$, die Gleichung ist unerfüllbar

Ungleichungen mit Beträgen kann man leicht mithilfe der Zahlengeraden lösen.

Beispiel 3

a) $|x| > 3$
$L = \{4, -4, 5, -5, \ldots\}$

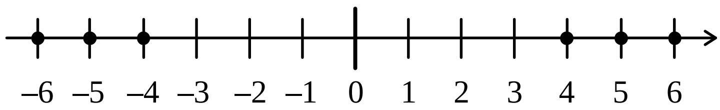

Bild 1.7

b) $|x| \leq 2$, $L = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

c) $|x| > -5$, $L = \mathbb{Z}$, die Ungleichung ist allgemeingültig

d) $|x| < -7$, $L = \{\ \}$, die Ungleichung ist unerfüllbar

Mit Beträgen kann man auch rechnen.

Beispiel 4

a) $|5| + |-4| = 5 + 4 = 9$ b) $|-14| - |9| = 14 - 9 = 5$

c) $18 - |7| = 18 - 7 = 11$ d) $|-8| \cdot |-12| = 8 \cdot 12 = 96$