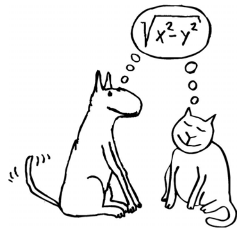


Merkhilfe Mathematik

Dies ist keine Formelsammlung im klassischen Sinn - die verwendeten Bezeichnungen werden nicht erklärt und Voraussetzungen für die Gültigkeit der Formeln werden in der Regel nicht angegeben.

Teil I: Stoffgebiete der Mittelstufe

Lösungsformel für quadratische Gleichungen

Lösungsformel für $x^2 + px + q = 0$: $$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{-q + \frac{p^2}{4}}$$

Potenzen

- Negative Exponenten: $a^{-1} = \frac{1}{a^1}$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- Gebrochene Exponenten: $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$; $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$; $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
- Potenzgesetze: (P1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ (P2) $a^x : a^y = a^{x-y}$
  (P3) $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$ (P4) $a^x : b^x = (a : b)^x$
  (P5) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

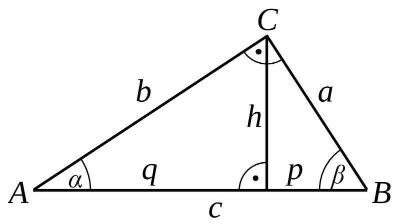
Logarithmen

- Logarithmengesetze: (L1) $\log_b(u \cdot v) = \log_b(u) + \log_b(v)$
  (L2) $\log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b(u) - \log_b(v)$
  (L3) $\log_b(u^r) = r \cdot \log_b(u)$
- Basisumrechnung: $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$

Ähnliche Dreiecke

- Wenn zwei Dreiecke in den Maßen zweier Winkel übereinstimmen, dann sind sie ähnlich.
- In ähnlichen Dreiecken sind die Längenverhältnisse entsprechender Seiten gleich.

Rechtwinkliges Dreieck



- Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$
- Höhensatz: $h^2 = p \cdot q$
- Kathetensatz: $a^2 = c \cdot p$; $b^2 = c \cdot q$
- Winkelfunktionen:

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \quad ; \quad \cos(\alpha) = \frac{b}{c} \quad ; \quad \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{a}{b}$$

Besondere Winkel

	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

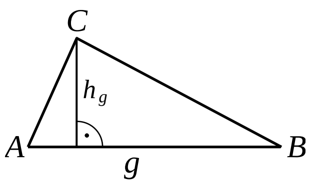
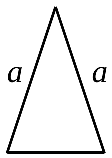
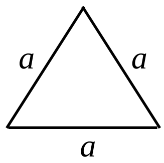
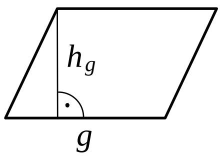
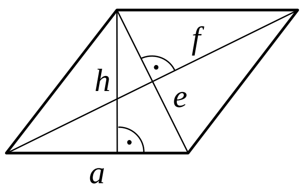
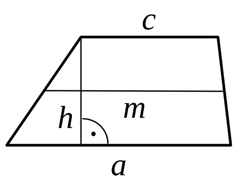
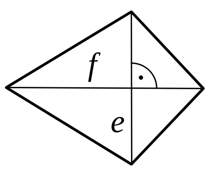
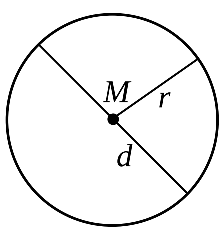
Allgemeines Dreieck

- Sinussatz: $a : b = \sin(\alpha) : \sin(\beta)$
  $a : c = \sin(\alpha) : \sin(\gamma)$
  $b : c = \sin(\beta) : \sin(\gamma)$
- Kosinussatz: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$
  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$
  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$

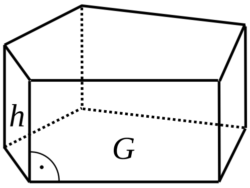
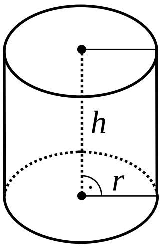
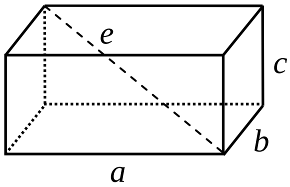
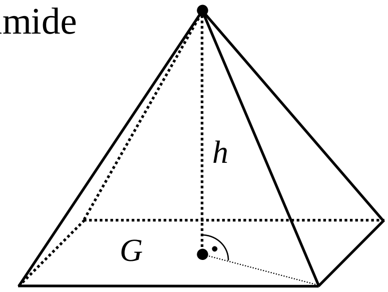
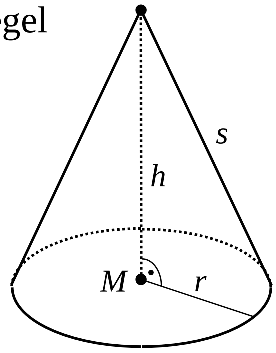
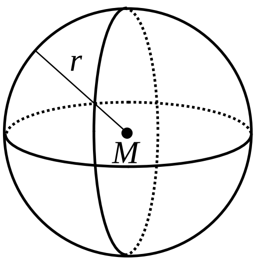
Sinus und Kosinus

- $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
- $\sin(90° - \alpha) = \cos(\alpha)$
- $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
- $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
- $\cos(90° - \alpha) = \sin(\alpha)$

Ebene Figuren

Figur		Eigenschaft	Flächeninhalt
Dreieck			$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g$
Gleichschenkliges Dreieck		Mindestens zwei Seiten sind gleich lang.	
Gleichseitiges Dreieck		Alle Seiten sind gleich lang.	$A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$
Parallelogramm		Gegenüberliegende Seiten sind jeweils parallel.	$A = g \cdot h_g$
Raute		Alle vier Seiten sind gleich lang.	$A = a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$
Trapez		Mindestens zwei gegenüberliegende Seiten sind parallel.	$A = \frac{a+c}{2} \cdot h = m \cdot h$
Drachen		Es gibt zwei Paare gleich langer Seiten.	$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$
Kreis		Alle Punkte der Kreislinie besitzen vom Mittelpunkt denselben Abstand.	$A = \pi r^2$ $U = 2\pi r$ (Umfang)

Räumliche Figuren

Figur		Volumen / Oberfläche
Prisma		$V = G \cdot h$
Gerader Kreiszylinder		$V = G \cdot h = \pi r^2 \cdot h$ $M = 2\pi r \cdot h$ (Mantelfläche) $O = 2\pi r \cdot (h + r)$
Quader		$V = a \cdot b \cdot c$ $e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ (Raumdiagonale)
Gerade Pyramide		$V = \frac{1}{3} G \cdot h$
Gerader Kreiskegel		$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$ $M = \pi r s$ (Mantelfläche)
Kugel		$V = \frac{4}{3} \pi r^3$ $O = 4\pi r^2$

Teil II: Analysis

Grenzwerte

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^r}{e^x} = 0^+$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^r \cdot e^x) = 0^\pm$ (Die e-Funkt. dominiert.)
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^r} = 0$ $(r > 0)$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} (x^r \cdot \ln(x)) = 0$ $(r > 0)$ (Die Potenzfunkt. dominiert.)

Ableitungsregeln

- Ableitung: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (Falls der Grenzwert existiert und endl. ist.)
- Mittlere Änderungsrate von f über dem Intervall $[a\,;\,b]$: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
- Lokale (momentane) Änderungsrate von f an der Stelle a: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Ableitung der Grundfunktionen

- Potenzfunktion: $(x^r)' = r \cdot x^{r-1}$ $(r \in \mathbb{R})$
- Sinusfunktion: $(\sin(x))' = \cos(x)$
- Kosinusfunktion: $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- e-Funktion: $(e^x)' = e^x$
- ln-Funktion: $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
- Allg. Exponentialfunktion: $(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$

Ableitungsregeln

- Summenregel: $h(x) = f(x) + g(x)$ $h'(x) = f'(x) + g'(x)$
- Faktorregel: $h(x) = \alpha \cdot f(x)$ $h'(x) = \alpha \cdot f'(x)$
- Produktregel: $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ $h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- Quotientenregel: $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ $h'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$
- Kettenregel: $h(x) = f(g(x))$ $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Anwendungen der Differenzialrechnung

• *Symmetrie*	Achsensymmetrie zur y-Achse:	$f(-x) = f(x)$ für alle x
	Punktsymmetrie zum Ursprung:	$f(-x) = -f(x)$ für alle x
• *Spiegelung*	an der x-Achse:	$y = -f(x)$
	an der y-Achse:	$y = f(-x)$
• *Verschiebung*	um c in x-Richtung:	$y = f(x-c)$
	um d in y-Richtung:	$y = f(x)+d$
• *Streckung*	mit Faktor $\frac{1}{b}$ in x-Richtung:	$y = f(b \cdot x)$
	mit Faktor a in y-Richtung:	$y = a \cdot f(x)$
• *Tangente*	Tangentensteigung:	$m_\mathrm{T} = f'(x_0)$
	Tangentengleichung:	$y = f'(x_0)+(x-x_0)+f(x_0)$
• *Normale*	Normalensteigung:	$m_\mathrm{N} = -\frac{1}{f'(x_0)}$
	Normalengleichung:	$y = -\frac{1}{f'(x_0)}+(x-x_0)+f(x_0)$
• *Monotonie*	$f'(x)<0$ im Intervall I $\Rightarrow$ f fällt streng monoton in I.	
	$f'(x)>0$ im Intervall I $\Rightarrow$ f wächst streng monoton in I.	

• *Hochpunkt*	$f'(x_0)=0$ und VzW „+ nach –“ von f' bei x_0	$\Rightarrow$	Hochpunkt $H(x_0 \mid f(x_0))$	$\Leftarrow$	$f'(x_0)=0$ und $f''(x_0)<0$
• *Tiefpunkt*	$f'(x_0)=0$ und VzW „– nach +“ von f' bei x_0	$\Rightarrow$	Tiefpunkt $T(x_0 \mid f(x_0))$	$\Leftarrow$	$f'(x_0)=0$ und $f''(x_0)>0$
• *Wendepunkt*	$f''(x_0)=0$ und VzW von f'' bei x_0	$\Rightarrow$	Wendepunkt $W(x_0 \mid f(x_0))$	$\Leftarrow$	$f''(x_0)=0$ und $f'''(x_0)\neq 0$

• *Winkel*	Steigungswinkel an einer Stelle x_0: $\tan(\alpha) = f'(x_0)$
	Orthogonalität bei x_0: $f(x_0) = g(x_0)$ und $f'(x_0) \cdot g'(x_0) = -1$.

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Jede Integralfunktion einer über einem Intervall stetigen Funktion f ist eine Stammfunktion von f.

Ableitung der Integralfunktion: Für $I(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ gilt $I'(x)=f(x)$.

Berechnung bestimmter Integrale

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$, wobei F eine Stammfunktion von f ist.

Wichtige Stammfunktionen

Funktion f	Stammfunktion F	Funktion f	Stammfunktion F
$f(x)=x^r$	$F(x)=\frac{x^{r+1}}{r+1}$ $(r\neq -1)$	$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln\lvert x\rvert$
$f(x)=\sin(x)$	$F(x)=-\cos(x)$	$f(x)=\cos(x)$	$F(x)=\sin(x)$
$f(x)=\mathrm{e}^x$	$F(x)=\mathrm{e}^x$	$f(x)=\ln(x)$	$F(x)=x\cdot\ln(x)-x$

Besondere Integrale

- $\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \left[\ln\lvert f(x)\rvert\right]_a^b$ (Im Zähler steht die Ableitung des Nenners.)
- $\int_a^b f'(x)\cdot \mathrm{e}^{f(x)}\,dx = \left[\mathrm{e}^{f(x)}\right]_a^b$ (Innere Ableitung tritt als Faktor auf.)
- $\int_a^b f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\cdot\left[F(ax+b)\right]_a^b$ (Dabei ist F eine Stammfunktion von f.)

Uneigentliches Integral

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{z\to+\infty}\int_a^z f(x)\,dx$ (Flächen, die ins Unendliche reichen)

Anwendung der Integralrechnung

- Rotationsvolumen um die x-Achse über $[a;b]$: $V=\pi\cdot\int_a^b (f(x))^2\,dx$
- Mittelwert einer Funktion über $[a;b]$: $\overline{y}=\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx$

Teil III: Vektorrechnung

Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^3$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Eigenschaften und Anwendungen des Skalarprodukts

- Zueinander senkrechte Vektoren: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
- Betrag eines Vektors: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$
- Einheitsvektor: $\vec{a}^{\,0} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$
- Winkel zwischen zwei Vektoren: $\cos(\varphi) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ mit $0° \le \varphi \le 180°$

Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} \cancel{a_1} \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} & \times & \begin{pmatrix} \cancel{b_1} \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \\ a_1 & & b_1 & & - \\ a_2 & & b_2 & & + \end{array}$$

Eigenschaften und Anwendungen des Vektorprodukts

- $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$
- $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$ mit $0° \le \varphi \le 180°$
- Flächeninhalt A des Dreiecks ABC: $A = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|$
- Volumen V der dreiseitigen Pyramide $ABCD$: $V = \frac{1}{6} \cdot \left| \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right) \cdot \overrightarrow{AD} \right|$

Mittelpunkt einer Strecke $\overline{AB}$

$\vec{m} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$, wobei $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die Ortsvektoren von A und B sind.

Schwerpunkt S des Dreiecks ABC

$\vec{s} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$, wobei $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ die Ortsvektoren von A, B und C sind.

Geraden im $\mathbb{R}^3$

- Parametergleichung von *g*: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$

Ebenen im $\mathbb{R}^3$

- Parametergleichung von *e*: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$
- Normalengleichung von *e*: $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$
- Koordinatengleichung von *e*: $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 - c = 0$

Kugel im $\mathbb{R}^3$

Kreis mit Kugel mit dem Mittelpunkt $M\,(m_1 \,|\, m_2 \,|\, m_3)$ und dem Radius r:

- Vektorgleichung: $(\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2$
- Koordinatengleichung: $(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$

Schnittwinkel

- Gerade – Gerade: $\cos(\alpha) = \left| \dfrac{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} \right|$
- Gerade – Ebene: $\sin(\alpha) = \left| \dfrac{\vec{n} \cdot \vec{u}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|} \right|$
- Ebene – Ebene: $\cos(\alpha) = \left| \dfrac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right|$

Abstandsberechnungen

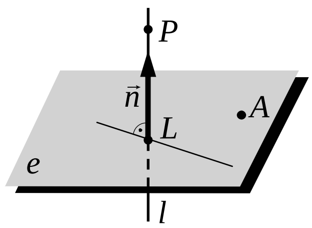
- Punkt – Punkt

$$d\,(P\,;Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = |\vec{q} - \vec{p}| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$$

- Punkt – Ebene

  Lotgeradenmethode

  Gegeben:
  Punkt P
  Ebene $e\colon \vec{n} \cdot \vec{x} - c = 0$



Abstandsformel

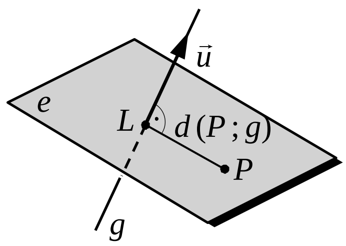
$$d\,(P\,;e) = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \left| \vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} \right|$$

(A bel. Punkt von e)

- Punkt – Gerade

  Lotebenenmethode

  Gegeben:
  Punkt P
  Gerade $g\colon \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$
  Hilfsebene $e\colon \vec{u} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$



Abstandsformel

$$d\,(P\,;g) = \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \left| \vec{u} \times \overrightarrow{AP} \right|$$

Teil IV: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

- Regeln von de Morgan: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ und $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- Zerlegungsregel: $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$
- Gegenereignisregel: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- Additionsregel: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Der Binomialkoeffizient gibt an, wie viele Möglichkeiten es gibt, aus einer Menge mit n Elementen eine Teilmenge mit k Elementen zu bilden.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Unabhängigkeit von zwei Ereignissen

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Urnenmodell

- Ziehen ohne Zurücklegen
  Aus einer Urne mit n Kugeln, von denen m schwarz sind, werden k Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.
  $$P(\text{„genau } l \text{ schwarze Kugeln“}) = \frac{\binom{m}{l} \cdot \binom{n-m}{k-l}}{\binom{n}{k}}$$
- Ziehen mit Zurücklegen
  Aus einer Urne, in der der Anteil der schwarzen Kugeln p ist, werden n Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
  $$P(\text{„genau } k \text{ schwarze Kugeln“}) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Zufallsgröße - Binomialverteilung

Die Zufallsgröße X nehme die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ an. Dann gilt:

- Erwartungswert

  $$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n$$

- Varianz

  $$\mathrm{Var}(X) = E\left((X-\mu)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot p_i$$

  $$= (x_1-\mu)^2 \cdot p_1 + (x_2-\mu)^2 \cdot p_2 + \ldots + (x_n-\mu)^2 \cdot p_n$$

  $$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2$$

- Standardabweichung

  $$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

- Binomialverteilung
  Ist die Zufallsgröße X binomialverteilt nach $B(n;p)$, so gilt:
  - $P(X=k) = B(n;p;k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ für $k = 0, 1, 2, \ldots, n$
  - Erwartungswert: $E(X) = n \cdot p$
  - Varianz: $\mathrm{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

Das $1/\sqrt{n}$ - Gesetz

Sei p die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A sowie h_n die Zufallsgröße, welche die relative Häufigkeit des Eintretens von A in einer Serie von n Versuchen beschreibt, dann gilt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 %:

$$|p - h_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

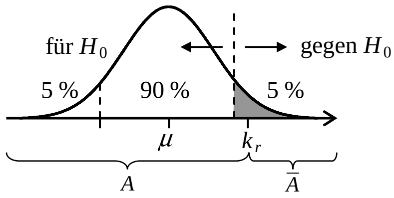
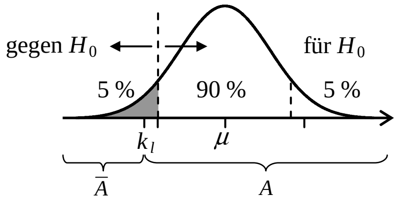
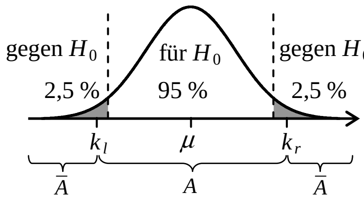
Statistische Tests

Beim Testen einer Hypothese können folgende Fehler auftreten:

	H_0 ist wahr	H_0 ist falsch
H_0 wird verworfen	Fehler 1. Art	Richtige Entscheidung
H_0 wird nicht verworfen	Richtige Entscheidung	Fehler 2. Art

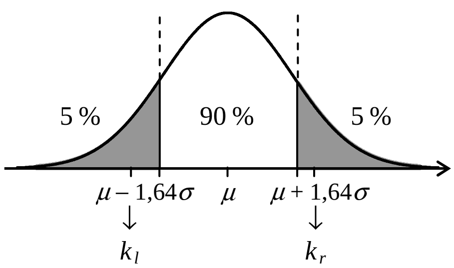
Als **Signifkanzniveau** α bezeichnet man den Wert, den die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art nicht überschreiten darf.

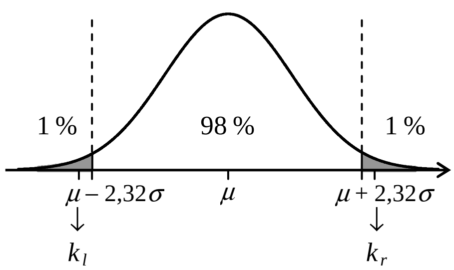
Arten von Signifikanztest

Testart	Nullhypothese H_0	Gegenhypothese H_1	Ablehnungsbereich
rechtsseitig	$p = p_0$	$p > p_0$	 $\overline{A} = \{k_r + 1; \ldots ; n\}$
linksseitig	$p = p_0$	$p < p_0$	 $\overline{A} = \{0; 1 \ldots ; k_l - 1\}$
beidseitig	$p \neq p_0$	$p = p_0$	 $\overline{A} = \{0; 1 \ldots ; k_l - 1\} \cup \{k_r + 1; \ldots ; n\}$

σ-Umgebungen

68,3 % :	einfache σ-Umgebung	$\mu \pm 1 \cdot \sigma$	90 % :	Intervall	$\mu \pm 1{,}64 \cdot \sigma$
95,4 % :	doppelte σ-Umgebung	$\mu \pm 2 \cdot \sigma$	95 % :	Intervall	$\mu \pm 1{,}96 \cdot \sigma$
99,7 %:	dreifache σ-Umgebung	$\mu \pm 3 \cdot \sigma$	98 % :	Intervall	$\mu \pm 2{,}32 \cdot \sigma$
			99 % :	Intervall	$\mu \pm 2{,}58 \cdot \sigma$





SOFTFRUTTI verlag