Beweis der Potenzregel für rationale Exponenten

① *Vorüberlegung*

Wir weisen zuerst die Gültigkeit von $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$ nach.

Es gilt allgemein für $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x \qquad \text{(beidseitiges Ableiten, Anwenden der Kettenregel)}$$

$$n \cdot \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1} \cdot \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = 1$$

Aus dieser Gleichung lässt sich die gesuchte Ableitung berechnen:

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} \cdot \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{-(n-1)} = \frac{1}{n} \cdot x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot x^{-(1-\frac{1}{n})} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}.$$

$$\boxed{\text{Also: } \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} \text{ für } n \in \mathbb{N}^*}$$

② *Beweis der Potenzregel für rationale Exponenten*

Wir berechnen die Ableitung des Term $x^{\frac{p}{q}}$ mit $p, q \in \mathbb{N}^*$.

$$\left(x^{\frac{p}{q}}\right)' = \left(\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p\right)' \qquad \text{(Anwenden der Kettenregel)}$$

$$= \underbrace{p \cdot \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1}}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{\frac{1}{q} \cdot x^{\frac{1}{q}-1}}_{\text{innere Ableitung}}$$

$$= \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p-1}{q}} \cdot x^{\frac{1}{q}-1}$$

$$= \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-\frac{1}{q}} \cdot x^{\frac{1}{q}-1}$$

$$= \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-\frac{1}{q}+\frac{1}{q}-1}$$

$$= \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}$$

$$\boxed{\text{Also: } \left(x^{\frac{p}{q}}\right)' = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1} \text{ für } p, q \in \mathbb{N}^*}$$