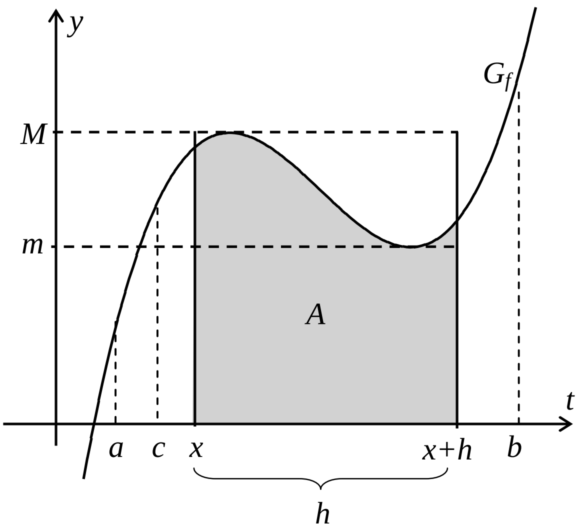
Beweis des Hauptsatzes für stetige, nichtnegative Funktionen

Durch Einführung der Integralfunktion I_c zu einer stetigen Funktion f ergibt sich die Möglichkeit, nach einem Zusammenhang zwischen den beiden Funktionen I_c und f zu fragen.

Wir betrachten für eine stetige Funktion $f \geq 0$ die Fläche unter G_f über dem Intervall $[x\,;x+h]$, wobei wir $h > 0$ voraussetzen.



Diese Fläche unter G_f über dem Intervall $[x\,;x+h]$ hat den Inhalt $I_c(x+h) - I_c(x)$. Da f stetig ist, hat f im Intervall $[x\,;x+h]$ ein Minimum m und ein Maximum M. Vergleicht man die Rechtecke mit m bzw. M als Höhe mit der Fläche unter G_f, so erhält man die Abschätzung:

$$m \cdot h \leq I_c(x+h) - I_c(x) \leq M \cdot h\,.$$

Die Division durch $h > 0$ liefert den Differenzenquotienten von I_c:

$$m \leq \frac{I_c(x+h) - I_c(x)}{h} \leq M\,.$$

Dieser Differenzenquotient von I_c über $[x\,;x+h]$ liegt zwischen dem minimalen und dem maximalen Funktionswert von f. Für $h \to 0$ streben wegen der Stetigkeit von f die jeweiligen Minima m sowie Maxima M gegen den Funktionswert von f an der Stelle x. Es folgt im Grenzfall $h \to 0$:

$$f(x) \leq \underbrace{\frac{I_c(x+h) - I_c(x)}{h}}_{= I_c'(x)} \leq f(x)\,.$$

Dies bedeutet: $I_c'(x) = \left(\int\limits_c^x f(t)\,dt \right)' = f(x)$.

Die umseitigen Überlegungen wurden unter der Voraussetzung durchgeführt, dass die Randfunktion f nur positive Funktionswerte besitzt und $h > 0$ gilt.

Analoge Überlegungen führen im Fall einer beliebigen stetigen Funktion und auch im Fall $h < 0$ zum gleichen Ergebnis.