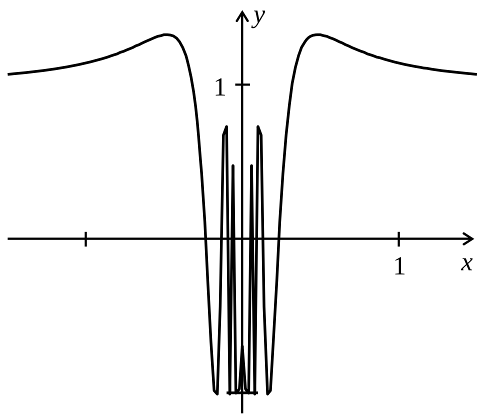
Unstetige Funktion mit einer Stammfunktion

Eigenschaften der Funktion $x \mapsto \begin{cases} 2x \cdot \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & \text{, wenn } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{, wenn } x = 0 \end{cases}$

① *Unstetigkeit an der Stelle 0*

Wir Die Unstetigkeit von f an der Stelle 0 kommt im Schaubild nicht durch eine Sprungstelle zum Ausdruck. Bei Annäherung an die kritische Stelle 0 beginnt der Graph zu oszillieren.



Nachweis der Unstetigkeit an der Stelle 0:

Wir betrachten die Folge von Zahlen

$$x_k := \frac{1}{2k\pi} \text{ mit } k \in \mathbb{Z}.$$

Dabei gilt: Für $k \to +\infty$ gilt $x_k \to 0^+$ (wir nähern uns 0 vom Positiven her),

für $k \to -\infty$ gilt $x_k \to 0^-$ (wir nähern uns 0 vom Negativen her).

Für beide Fälle gilt: $f(x_k) = 2 \cdot \frac{1}{2k\pi} \cdot \sin(2k\pi) - \cos(2k\pi) = 0 - 1 = -1$.

Andererseits ist der Funktionswert an der Stelle 0 aber erklärt als $f(0) = 0$. Dies bedeutet, dass f an der Stelle 0 unstetig ist.

② *Existenz einer Stammfunktion*

Trotz der Unstetigkeit an der Stelle 0 besitzt die Funktion f eine Stammfunktion. Wir betrachten die Funktion

$$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x}) & \text{, wenn } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{, wenn } x = 0 \end{cases}$$

Nachweis, dass F eine Stammfunktion von f ist:

- Für $x \neq 0$ ist F nach den Ableitungsregeln differenzierbar und es gilt:

  $$F'(x) = 2x \cdot \sin(\tfrac{1}{x}) + x^2 \cdot \cos(\tfrac{1}{x}) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = f(x).$$

- Für $x = 0$ ergibt die Betrachtung des Differenzenquotienten:

  $$F'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x}) - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\left(x \cdot \sin(\tfrac{1}{x})\right) = 0 = f(0).$$

Somit ist F differenzierbar und es gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.