Beweis der Produktregel

Produktregel
Sind die Funktionen f und g an der Stelle x differenzierbar, so ist auch das Produkt $f \cdot g$ an der Stelle x differenzierbar und es gilt dabei:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Ein Beweis der Produktregel lässt sich auch über die Definition der Differenzierbarkeit gemäß des Ansatzes der linearen Approximation führen.

Differenzierbarkeit (auf Grundlage der linearen Approximation)
Eine Funktion heißt an der Stelle x_0 differenzierbar, wenn es eine Zahl m gibt, so dass für das in der Darstellung

$$f(x_0 + h) = m \cdot h + f(x_0) + h \cdot R(x_0, h)$$

auftretende Restglied gilt: $R(x_0, h) \to 0$ für $h \to 0$.
Die Zahl $m = f'(x_0)$ heißt Ableitung von f an der Stelle x_0.

Die Voraussetzungen der Differenzierbarkeit der Funktionen f und g an einer Stelle x bedeuten, dass es Darstellungen in folgender Form gibt:

- $f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + h \cdot R_f(x,h)$ mit $R_f(x,h) \to 0$ für $h \to 0$
- $g(x+h) = g(x) + g'(x) \cdot h + h \cdot R_g(x,h)$ mit $R_g(x,h) \to 0$ für $h \to 0$

Hiermit ergibt sich durch Ausmultiplizieren und Ordnen:

$$\begin{aligned}
&(f \cdot g)(x+h) \\
&= [f(x) + f'(x) \cdot h + h \cdot R_f(x,h)] \cdot [g(x) + g'(x) \cdot h + h \cdot R_g(x,h)] \\
&= + f(x) \cdot g(x) \quad + \quad f(x) \cdot g'(x) \cdot h \quad + \quad f(x) \cdot h \cdot R_g(x,h) \\
&= + f'(x) \cdot h \cdot g(x) \quad + \quad f'(x) \cdot h \cdot g'(x) \cdot h \quad + \quad f'(x) \cdot h \cdot h \cdot R_g(x,h) \\
&= + h \cdot R_f(x,h) \cdot g(x) \quad + \quad h \cdot R_f(x,h) \cdot g'(x) \cdot h \quad + \quad h \cdot R_f(x,h) \cdot h \cdot R_g(x,h) \\
&= f(x) \cdot g(x) + \underbrace{\big(f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)\big)}_{=\text{Ableitung } (f \cdot g)'(x)} \cdot h \\
&\quad + h \cdot [f(x) \cdot R_g(x,h) + f'(x) \cdot h \cdot g'(x) + f'(x) \cdot h \cdot R_g(x,h) \\
&\qquad \underbrace{+ R_f(x,h) \cdot g(x) + h \cdot R_f(x,h) \cdot g'(x) + R_f(x,h) \cdot h \cdot R_g(x,h)]}_{\substack{\text{Restterm } R_{f,g}(x,h) \to 0 \text{ für } h \to 0, \\ \text{denn } R_f(x,h),\, R_g(x,h),\, h \to 0 \text{ für } h \to 0}}
\end{aligned}$$