Achsensymmetrie bei quadratischen Funktionen

Wir betrachten quadratische Funktionen in der allgemeinen Form

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto a\,x^2+b\,x+c \text{ mit } a\in\mathbb{R}^* \text{ und } b,c\in\mathbb{R}.$$

Jede allgemeine quadratische Funktion lässt sich in die Scheitel(punkt)form umwandeln (Nachweis siehe am Ende):

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto a\cdot(x-x_E)^2+y_E.$$

Aus ihr ist der Scheitel der zugehörigen Parabel direkt ablesbar: $S(x_E\,|\,y_E)$.

Der Graph von f geht aus dem Graphen von $y=x^2$ durch Streckung um a in y-Richtung, Parallelverschiebung um x_E in x-Richtung und um y_W in y-Richtung hervor.

Quadratische Funktionen besitzen die folgende Symmetrieeigenschaft:

Achsensymmetrie bei quadratischen Funktionen
Jede quadratische Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto a\,x^2+b\,x+c$ mit $a\in\mathbb{R}^*$ und $b,c\in\mathbb{R}$ ist achsensymmetrisch zu der Parallelen zur y-Achse durch den Scheitel $S(x_E\,|\,y_E)$.

Es gilt $f(x_E-x)=f(x_E+x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

Beweis:

Zum Beweis verwenden wir die Scheitel(punkt)form $f(x)=a\cdot(x-x_E)^2+y_E$.

- $f(x_E-x)=a\cdot(x_E-x-x_E)^2+d=a\cdot(-x)^2+d=a\cdot x^2+d$
- $f(x_E+x)=a\cdot(x_E+x-x_E)^2+d=a\cdot x^2+d=a\cdot x^2+d$

Also gilt $f(x_E-x)=f(x_E+x)$

Umwandlung der allgemeinen Form in die Scheitelform

$$f(x)=a\,x^2+b\,x+c$$

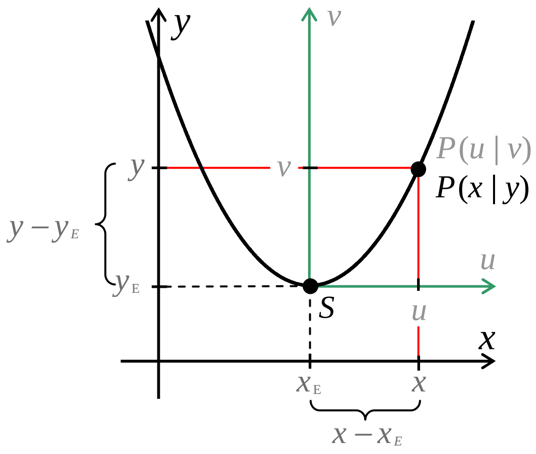
$$\underset{:a\neq 0}{\Leftrightarrow}\quad \frac{f(x)}{a}=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{f(x)}{a}=x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a} \quad \text{(quadratische Ergänzung)}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{f(x)}{a}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow\quad f(x)=a\cdot\left(x+\underbrace{\frac{b}{2a}}_{-x_E}\right)^2+\underbrace{c-\frac{b^2}{4a}}_{y_E}$$

Im Hinblick auf eine Betrachtung bei ganzrationalen Funktionen dritten Grades soll folgende Möglichkeit, zur Scheitelform zu gelangen, beschrieben werden.



Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten:

$$x_E = -\frac{b}{2a} \quad \text{und} \quad y_E = c - \frac{b^2}{4a}\ .$$

Wir verschieben das Koordinatensystem so, dass sich der Scheitelpunkt S danach im Ursprung befindet:

$$u = x - x_E \quad \text{und} \quad v = y - y_E\,.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
v = y - y_E &= a x^2 + b x + c - y_E \\
&= a(u + x_E)^2 + b(u + x_E) + c - y_E \\
&= a(u - \tfrac{b}{2a})^2 + b(u - \tfrac{b}{2a}) + c - y_E \\
&= a(u^2 - 2\cdot\tfrac{b}{2a}u + \tfrac{b^2}{4a^2}) + b(u - \tfrac{b}{2a}) + c - (c - \tfrac{b^2}{4a}) \\
&= a u^2 - 2a\cdot\tfrac{b}{2a}u + a\cdot\tfrac{b^2}{4a^2} + bu - \tfrac{b^2}{2a} + c - c + \tfrac{b^2}{4a} \\
&= a u^2 - bu + \tfrac{b^2}{4a} + bu - \tfrac{b^2}{2a} + \tfrac{b^2}{4a} \\
&= a u^2 + \tfrac{b^2}{4a} - \tfrac{2b^2}{4a} + \tfrac{b^2}{4a} \\
&= a u^2
\end{aligned}$$

Kehrt man wieder zum ursprünglichen Koordinatensystem zurück, so ergibt sich aus der Gleichung $v = a u^2$ die Scheitelform:

$$y - y_E = a(x - x_E)^2 \;\Leftrightarrow\; y = a(x - x_E)^2 + y_E$$