# Punktsymmetrie bei kubischen Funktionen

Wir betrachten ganzrationale Funktionen dritten Grades (kubische Funktionen) in der allgemeinen Form

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d \ \text{ mit } a \in \mathbb{R}^* \text{ und } b, c, d \in \mathbb{R}\,.$$

Jede kubische Funktion besitzt genau einen Wendepunkt. Analog zur Scheitelform bei quadratischen Funktionen lässt sich jede allgemeine kubische Funktion sich in die Wendepunktform umwandeln:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto a \cdot (x - x_W)^3 + m_W \cdot (x - x_W) + y_W\,.$$

Dabei steht $m_W$ abkürzenden für Steigung des Graphen im Wendepunkt.
Aus ihr lässt sich der Wendepunkt des Graphen direkt ablesen: $W\,(\,x_w \mid y_w\,)$.

(Der Nachweis zur Umwandlung in die Wendepunktform ist sehr rechenintensiv und komplizierter als im quadratischen Fall. Er kann am Ende dieses Textes nachgelesen werden.)

Kubische Funktionen besitzen die folgende Symmetrieeigenschaft.

**Punktsymmetrie zum Wendepunkt bei kubischen Funktionen**
Jede kubische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ mit $a \in \mathbb{R}^*$ und $b, c, d \in \mathbb{R}$ ist symmetrisch zu ihrem Wendepunkt $W(x_W \mid y_W)$.
Es gilt $f\,(x_W - x) + f\,(x_W - x) = 2 \cdot y_W$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

*Beweis*:

Wir verwenden die Wendepunktform $f\,(x) = a \cdot (x - x_W)^3 + m_W \cdot (x - x_W) + y_W$ für kubische Funktionen zum Beweis.

- $$\begin{aligned} f\,(x_W - x) &= a \cdot (x_W - x - x_W)^3 + m_W \cdot (x_W - x - x_W) + y_W \\ &= a \cdot (-x)^3 + m_W \cdot (-x) + y_W \\ &= -a \cdot x^3 - m_W \cdot x + y_W \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} f\,(x_W + x) &= a \cdot (x_W + x - x_W)^3 + m_W \cdot (x_W + x - x_W) + y_W \\ &= a \cdot x^3 + m_W \cdot x + y_W \\ &= a \cdot x^3 + m_W \cdot x + y_W \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$f\,(x_W - x) + f\,(x_W - x) = (-a \cdot x^3 - m_W \cdot x + y_W) + (a \cdot x^3 + m_W \cdot x + y_W) = 2y_W$$

*Umwandlung der allgemeinen Form in die Wendepunktform*

Wir betrachten die kubische Funktion $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ mit $a \neq 0$.

Für die Ableitungen gilt:

$$f'(x) = 3a\,x^2 + 2b\,x + c \quad \text{und} \quad f''(x) = 6a\,x + 2b\ .$$

Die notwendige Bedingung für die Existenz eines Wendepunkts ergibt:

$$f''(x) = 0 \iff 6a\,x + 2b = 0 \iff x = -\frac{b}{3a}.$$

Es handelt sich um eine Nullstelle von $f''$ mit Vorzeichenwechsel und damit um eine Wendestelle. Für die $y$-Koordinate des Wendepunkts ergibt sich:

$$\begin{aligned} f(-\tfrac{b}{3a}) &= a(-\tfrac{b}{3a})^3 + b(-\tfrac{b}{3a})^2 + c(-\tfrac{b}{3a}) + d \\ &= -\frac{b^3}{27a^2} + \frac{b^3}{9a^2} - \frac{bc}{3a} + d = -\frac{b^3}{27a^2} + \frac{3b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d \\ &= \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d \end{aligned}$$

Damit ist auch nachgewiesen, dass jede kubische Funktion genau eine Wendepunkt $W(x_W \mid y_W)$ besitzt. Für seine Koordinaten gilt:

$$x_w = -\frac{b}{3a} \quad \text{und} \quad y_w = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d\ .$$

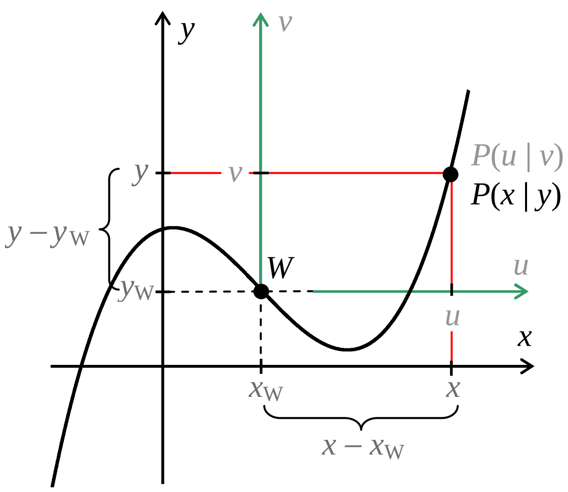
Um die Schreibweise für die Wendepunktform abzukürzen, berechnen wir noch die Steigung an der Wendestelle.

$$\begin{aligned} m_W &= f'(x_W)\frac{b^2}{3a} = f'(-\tfrac{b}{3a}) = 3a(-\tfrac{b}{3a})^2 + 2b(-\tfrac{b}{3a}) + c \\ &= \frac{b^2}{3a} - 2\frac{b^2}{3a} + c = -\frac{b^2}{3a} + c \end{aligned}$$

Zur Wendepunktform gelangt man durch eine analoge Vorgehensweise zum Fall der quadratischen Funktionen.

Wir verschieben das Koordinatensystem so,
dass sich der Wendepunkt $W$ danach im Ur-
sprung befindet:

$$u = x - x_W \quad \text{und} \quad v = y - y_W\ .$$




Wir rechnen die Funktionsgleichung analog zum quadratischen Fall um.

Der Rechenaufwand ist dabei allerdings „etwas“ höher.

Es gilt:

$$v = y - y_W = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d - y_W$$
$$= a\,(u - x_W)^3 + b(u - x_W)^2 + c\,(u - x_W)^3 + d - y_W$$
$$= a\,(u - \frac{b}{3a})^3 + b(u - \frac{b}{3a})^2 + c\,(u - \frac{b}{3a}) + d - y_W$$
$$= a\,(u^3 - 3\frac{b}{3a}u^2 + 3\frac{b^2}{9a^2}u - \frac{b^3}{27a^3} + b(u^2 - 2\frac{b}{3a}u + \frac{b^2}{9a^2})$$
$$+c\,(u - \frac{b}{3a}) + d - (\frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d)$$
$$= a\,u^3 - b\,u^2 + \frac{b^2}{3a}u - \frac{b^3}{27a^2} + b\,u^2 - 2\frac{b^2}{3a}u + \frac{b^3}{9a^2}$$
$$+cu - \frac{bc}{3a} + d - \frac{b^3}{27a^2} + \frac{bc}{3a} - d$$
$$= a\,u^3 - \frac{b^2}{3a}u + c\,u - \frac{3b^3}{27a^2} + \frac{b^3}{9a^2} = a\,u^3 - \frac{b^2}{3a}u + c\,u - \frac{3b^3}{27a^2} + \frac{3b^3}{27a^2}$$
$$= a\,u^3 + (-\frac{b^2}{3a}u + c\,u) = a\,u^3 + (-\frac{b^2}{3a} + c)\,u$$
$$= a\,u^3 + m_w\,u$$

Kehrt man wieder zum ursprünglichen Koordinatensystem zurück, so ergibt sich aus der Gleichung $v = a\,u^3$ die Scheitelform:

$$y - y_W = a\,(x - x_W)^3 + m_W\,(x - x_W) \;\Leftrightarrow\; y = a\,(x - x_W)^3 + m_W\,(x - x_W) + y_W\,.$$