

Rechenregeln für das Vektorprodukt

Wie beim Skalarprodukt lassen sich auch aus der Definition des Vektorprodukts Rechenregeln ableiten. Sie sind nachfolgend in einer Übersicht zusammengefasst:

Rechenregeln für das Vektorprodukt

Für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

- (1) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ (Antisymmetrie)
- (2) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (Distributivgesetz)
- (3) $(\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b}) = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ (Verträglichkeit mit S-Multiplikation.)
- (4) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

Beweis

Für alle Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ des \mathbb{R}^3 und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(1) \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(a_3 b_2 - a_2 b_3) \\ -(a_1 b_3 - a_3 b_1) \\ -(a_2 b_1 - a_1 b_2) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_3 b_2 - a_2 b_3 \\ a_1 b_3 - a_3 b_1 \\ a_2 b_1 - a_1 b_2 \end{pmatrix} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ b_3 + c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_2(b_3 + c_3) - a_3(b_2 + c_2) \\ a_3(b_1 + c_1) - a_1(b_3 + c_3) \\ a_1(b_2 + c_2) - a_2(b_1 + c_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 + a_2 c_3 - a_3 b_2 - a_3 c_2 \\ a_3 b_1 + a_3 c_1 - a_1 b_3 - a_1 c_3 \\ a_1 b_2 + a_1 c_2 - a_2 b_1 - a_2 c_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_2 b_3 - a_3 b_2) + (a_2 c_3 - a_3 c_2) \\ (a_3 b_1 - a_1 b_3) + (a_3 c_1 - a_1 c_3) \\ (a_1 b_2 - a_2 b_1) + (a_1 c_2 - a_2 c_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 c_3 - a_3 c_2 \\ a_3 c_1 - a_1 c_3 \\ a_1 c_2 - a_2 c_1 \end{pmatrix} \\ &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) \quad (\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda \cdot a_2)b_3 - (\lambda \cdot a_3)b_2 \\ (\lambda \cdot a_3)b_1 - (\lambda \cdot a_1)b_3 \\ (\lambda \cdot a_1)b_2 - (\lambda \cdot a_2)b_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda \cdot (a_2 b_3 - a_3 b_2) \\ \lambda \cdot (a_3 b_1 - a_1 b_3) \\ \lambda \cdot (a_1 b_2 - a_2 b_1) \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \\
&= \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \\
\vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b}) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda \cdot b_1 \\ \lambda \cdot b_2 \\ \lambda \cdot b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda \cdot b_1 \\ \lambda \cdot b_2 \\ \lambda \cdot b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2(\lambda \cdot b_3) - a_3(\lambda \cdot b_2) \\ a_3(\lambda \cdot b_1) - a_1(\lambda \cdot b_3) \\ a_1(\lambda \cdot b_2) - a_2(\lambda \cdot b_1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda \cdot (a_2 b_3 - a_3 b_2) \\ \lambda \cdot (a_3 b_1 - a_1 b_3) \\ \lambda \cdot (a_1 b_2 - a_2 b_1) \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \\
&= \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \\
(4) \quad \vec{a} \times \vec{a} &= \begin{pmatrix} a_2 a_3 - a_3 a_2 \\ a_3 a_1 - a_1 a_3 \\ a_1 a_2 - a_2 a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}
\end{aligned}$$