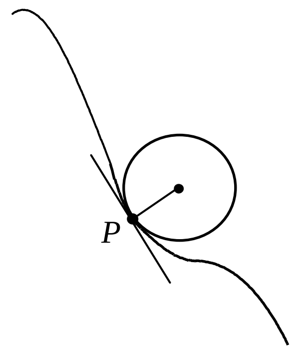
Krümmungsmittelpunkt und Krümmungsmaß

Wir hatten die Steigung auf zweierlei Arten betrachtet: sowohl aus qualitativer Sicht (*Steigungsverhalten*) als auch unter quantitativem Aspekt (*Steigungsmaß*).
Eine Funktion kann also nicht nur bezüglich ihres Monotonieverhaltens untersucht werden, sondern es lassen sich auch Aussagen über das Steigungsmaß machen.
Bei der Krümmung stellte sich die Situation bisher anders dar. Wir haben uns bisher auf Aussagen über das *Krümmungsverhalten* beschränkt. Ein *Maß* für die Krümmung eines Funktionsgraphen in einem Punkt steht uns bisher nicht zur Verfügung.
Die Notwendigkeit der Einführung eines Krümmungsmaßes zur Beschreibung realer Vorgänge kann man am Beispiel des Autofahrens klarmachen. Durchfährt ein Autofahrer eine gekrümmte Straße, so muss er das Lenkrad je nach Ausmaß der Krümmung mehr oder weniger einschlagen.

Krümmungskreis



Die Einführung eines Krümmungsmaßes kann in enger Analogie zum Steigungsmaß erfolgen. Die Tangente ist diejenige Gerade, die in einem Punkt P dieselbe Steigung wie der Graph einer betrachteten Funktion besitzt. Sie besitzt als Gerade eine konstante Steigung.
Bei der Suche nach einem Krümmungsmaß kann man analog vorgehen. Man sucht ein geometrisches Gebilde mit konstanter Krümmung, welche mit der Krümmung im Punkt P des Graphen vergleichbar ist. Diese Eigenschaft erfüllt ein Kreis. Er heißt **Krümmungskreis** zu einem bestimmten Punkt P einer Kurve.
Salopp ausgedrückt, kann dies wie folgt formuliert werden:
Was die Tangente für die Steigung ist, ist der Krümmungskreis für die Krümmung, nämlich die bestmögliche Approximation[1] *eines Funktionsgraphen durch ein einfach handhabbares Objekt mit vergleichbaren Eigenschaften.*

Dass im Falle der Krümmung ein Kreis infrage kommt, kann man sicher wieder am Beispiel des Autofahrens plausibel machen. Lässt man das Lenkrad konstant eingeschlagen, so durchfährt der Wagen eine Kreisbahn. Kreise ergeben sich somit als Kurven konstanter Krümmung. Je kleiner der Radius eines kreisförmigen Straßenstücks ist, desto stärker muss das Lenkrad eingeschlagen werden. Es liegt daher nahe, die Krümmung eines Kreises als umgekehrt proportional zu seinem Radius anzusehen. Bei größer werdendem Radius strebt die Krümmung immer mehr dem Wert 0 zu. Dies bedeutet im Grenzfall, dass eine gerade Straße nicht gekrümmt ist.

[1] proximus (lat.), der, bzw. die, bzw. das Nächste; bezeichnet im mathematischen Sinne eine Annäherung

Der schweizerische Mathematiker und Physiker **Jakob BERNOULLI** (* 6. Januar 1655 in Basel; † 16. August 1705 in Basel) hat sich wohl als erster mit der Krümmung von Kurven beschäftigt.

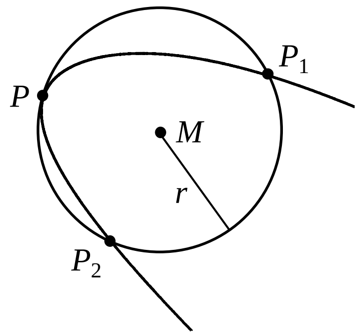
Jakob BERNOULLI veröffentlichte 1691 in dem Werk *Theorema Aureum* seine Untersuchungen über den Krümmungsradius.

Jakob BERNOULLI

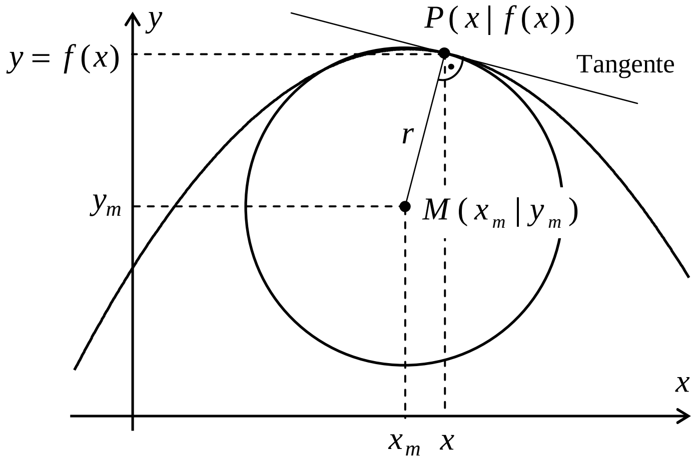
Krümmungsmittelpunkt und -radius

Bei der Definition eines Krümmungsmaßes geht man, wie bei der Steigung, lokal vor und spricht von der **Krümmung in einem Punkt**. Es bietet sich an, die Krümmung einer Kurve in einem Punkt P als Krümmung des Krümmungskreises zu diesem Punkt P zu definieren.
Vom Krümmungskreis sind natürlich der Mittelpunkt (**Krümmungsmittelpunkt**) und der Radius (**Krümmungsradius**) von besonderem Interesse.

Einem möglichen Weg dies rechnerisch zu erfassen, liegt folgender Gedankengang zugrunde: Da drei Punkte notwendig sind, um einen Kreis eindeutig festzulegen, sind zwei weitere Punkte P_1 und P_2 erforderlich. Diese Punkte lässt man auf der Kurve auf P zu gleiten. Der gesuchte Berührkreis ist dann der Grenzkreis der Folge von Kreisen durch P und die Punkte P_1 und P_2, die sich von verschiedenen Seiten auf P zu bewegen.



Ein anderer (rechnerisch etwas einfacherer Zugang) geht davon aus, dass im Fall einer zweimal differenzierbaren Funktion der Graph durch einen Kreis in einem gemeinsamen Berührpunkt (d.h. Graph und Kreis haben in diesem Punkt dieselbe Steigung) dann optimal angenähert wird, wenn Graph und Kreis in diesem Berührpunkt auch dieselbe Krümmung haben, d.h. die zweiten Ableitungen von Graph und Kreis übereinstimmen.



Will man nun ein Maß für die Krümmung festlegen, so geht man von der Feststellung aus, dass Kreise gleichmäßig gekrümmt sind, aber ihre Krümmung umso kleiner wird, je größer der Radius wird. Deshalb ist es sinnvoll, als Maß für ihre Krümmung $\frac{1}{r}$ zu definieren. Diese Definition überträgt man auf beliebige Kurven, indem man als r den Radius des Krümmungskreises nimmt.

Mithilfe einer im Anhang angegebenen Herleitung ergibt sich als Krümmung κ (κ ist der griechische Buchstabe Kappa) im Punkt P:

$$\kappa = \frac{1}{r} = \frac{f''(x)}{\sqrt{(1+(f'(x)^2)^3}} \quad .$$

Ebenso ergibt sich:

Krümmung und Krümmungskreis

Sei f eine in einer Umgebung von x_0 zweimal differenzierbare Funktion.

Für das Krümmungsmaß κ im Punkt $P(x \mid f(x))$ gilt:

$$\kappa = \frac{f''(x)}{\sqrt{(1+ f'(x)^2)^3}} .$$

Für $f''(x) \neq 0$ hat der zugehörige Krümmungskreis:

- den Radius $r = \frac{\sqrt{(1+(f'(x)^2)^3}}{|f''(x)|}$,
- die Mittelpunktskoordinaten

$$x_m = x - f'(x) \cdot \frac{1+(f'(x))^2}{f''(x)} \quad \text{und} \quad y_m = y + \frac{1+(f'(x))^2}{f''(x)} .$$