Kugel durch vier Punkte
Analytische Berechnung der Kugelgleichung

Gesucht ist eine Gleichung der Kugel durch die Punkte $A(2|10|4)$, $B(4|8|6)$, $C(5|9|4)$ und $D(0|-6|4)$. Für den gesuchten Kreis verwenden wir einen Ansatz in Koordinatenform:

$(x_1-m_1)^2+(x_2-m_2)^2+(x_3-m_3)^2=r^2$; Mittelpunkt $M(m_1|m_2|m_3)$; Radius r

Setzt man die Koordinaten der Punkte *A*, *B*, *C* und *D* ein, so ergibt sich zunächst ein System von vier quadratischen Gleichungen:

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \end{array} \left(\begin{array}{l} (2-m_1)^2+(10-m_2)^2+(4-m_3)^2=r^2 \\ (4-m_1)^2+(8-m_2)^2+(6-m_3)^2=r^2 \\ (5-m_1)^2+(9-m_2)^2+(4-m_3)^2=r^2 \\ (0-m_1)^2+(-6-m_2)^2+(4-m_3)^2=r^2 \end{array} \right)$$

Durch Anwendung der binomischen Formeln ergibt sich:

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \end{array} \left(\begin{array}{r} (4-4m_1+m_1^2)+(100-20m_2+m_2^2)+(16-8m_3+m_3^2)=r^2 \\ (16-8m_1+m_1^2)+(64-16m_2+m_2^2)+(36-12m_3+m_3^2)=r^2 \\ (25-10m_1+m_1^2)+(81-18m_2+m_2^2)^2+(16-8m_3+m_3^2)=r^2 \\ m_1^2+(36+12m_2+m_2^2)+(16-8m_3+m_3^2)=r^2 \end{array} \right)$$

Zusammenfassen und Ordnen liefert folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \end{array} \left(\begin{array}{l} m_1^2-4m_1+m_2^2-20m_2+m_3^2-8m_3=r^2-120 \\ m_1^2-8m_1+m_2^2-16m_2+m_3^2-12m_3=r^2-116 \\ m_1^2-10m_1+m_2^2-18m_2+m_3^2-8m_3=r^2-122 \\ m_1^2+m_2^2+12m_2+m_3^2-8m_3=r^2-52 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{II}-\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-\mathrm{I} \\ \mathrm{IV}-\mathrm{I} \end{array}$$

Aus dem System lassen sich durch Subtraktion die quadratischen Terme x_1^2, x_2^2, x_3^2 und r^2 beseitigen. Man erhält drei Gleichungen mit quadratfreien Termen.

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \end{array} \left(\begin{array}{rrrrrrcr} m_1^2 & -4m_1 & +m_2^2 & -20m_2 & +m_3^2 & -8m_3 & = & r^2-120 \\ & -4m_1 & & +4m_2 & & -4m_3 & = & 4 \\ & -6m_1 & & +2m_2 & & & = & -2 \\ & 4m_1 & & +32m_2 & & & & 68 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \mathrm{IV}-16\cdot\mathrm{III} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \end{array} \left(\begin{array}{rrrrrrcr} m_1^2 & -4m_1 & +m_2^2 & -20m_2 & +m_3^2 & -8m_3 & = & r^2-120 \\ & -4m_1 & & +4m_2 & & -4m_3 & = & 4 \\ & -6m_1 & & +2m_2 & & & = & -2 \\ & 100m_1 & & & & & & 100 \end{array} \right)$$

Aus IV ergibt sich: $m_1 = 1$

Einsetzen in III: $-6 \cdot 1 + 2m_2 = -2 \Leftrightarrow 2m_2 = 4 \Leftrightarrow m_2 = 2$

Einsetzen in II: $-4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 4m_3 = 4 \Leftrightarrow -4m_3 = 0 \Leftrightarrow m_3 = 0$

Einsetzen in I: $1^2 - 4 \cdot 1 + 2^2 - 20 \cdot 2 + 0^2 - 8 \cdot 0 = r^2 - 120 \Leftrightarrow -39 = r^2 - 120$

$\Leftrightarrow r^2 = 81 \underset{r>0}{\Leftrightarrow} r = 9$

Ergebnis

Die Kugel hat den Mittelpunkt $M(1|2|0)$ und den Radius $r = 9$.

Die gesuchte Kugelgleichung ist: $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + x_3^2 = 9^2$.