Zufallsgrößen mit der Varianz null

Für die Varianz einer Zufallsgröße *X* gilt die folgende Eigenschaft.

Zufallsgrößen mit der Varianz 0
Für die Varianz einer diskreten Zufallsgröße *X* gilt:
$$\operatorname{Var}(X)=0 \iff X=k=\text{konstant}.$$

Beweis

Es sei Ω die Ergebnismenge und *P* das Wahrscheinlichkeitsmaß eines Zufallsexperiments. Wir betrachten eine diskrete Zufallsgröße *X* auf Ω mit dem Erwartungswert μ und der Wertemenge $X(\Omega)=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Dabei schließen wir den uninteressanten Fall aus, dass einer der diskreten Werte die Wahrscheinlichkeit null besitzt. Es soll also gelten:

$P(X=x_i)\neq 0$ für alle $i=1,2,\ldots,n$.

„$\Rightarrow$“ Es sei $\operatorname{Var}(X)=0$ vorausgesetzt.

Nach der Definition der Varianz gilt dann:
$$\operatorname{Var}(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\cdot P(X=x_i)=0.$$
Wegen $P(X=x_i)\neq 0$ für alle $i=1,2,\ldots,n$ ist diese Bedingung nur erfüllbar, wenn jeder der quadratischen Summanden den Wert null annimmt:
$$x_i-\mu=0 \iff x_i=\mu \text{ für alle } i=1,2,\ldots,n.$$
Dies bedeutet, dass *X* konstant ist.

„$\Leftarrow$“ Es sei $X=k=\text{konstant}$ vorausgesetzt.

Dann gilt $x_i=k$ für alle $i=1,2,\ldots,n$.

Für den Erwartungswert von *X* folgt dann:
$$\begin{aligned}\mu &= x_1\cdot P(x_1)+x_2\cdot P(x_2)+\ldots+x_n\cdot P(x_n)\\ &= k\cdot P(x_1)+k\cdot P(x_2)+\ldots+k\cdot P(x_n)\\ &= k\cdot\big(P(x_1)+k\cdot P(x_2)+\ldots+k\cdot P(x_n)\big)\\ &= k\cdot 1=k.\end{aligned}$$
Für die Varianz folgt dann:
$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X) &= \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\cdot P(X=x_i)=\sum_{i=1}^{n}(k-k)^2\cdot P(X=x_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n}0^2\cdot P(X=x_i)=0.\end{aligned}$$