Kreis durch drei Punkte
Analytische Berechnung der Kreisgleichung

Gesucht ist die Gleichung des Kreises durch die Punkte $A(5|0)$, $B(7|2)$ und $C(-7|0)$.

Für die gesuchte Gleichung verwenden wir einen Ansatz in Koordinatenform:

$$(x_1-m_1)^2+(x_2-m_2)^2=r^2 \quad ; \quad \text{Mittelpunkt } M(m_1|m_2); \quad \text{Radius } r$$

Setzt man die Koordinaten der Punkt *A*, *B* und *C* ein, so ergibt sich ein System von drei quadratischen Gleichungen:

$$\begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{rcl} (5-m_1)^2 + (0-m_2)^2 &=& r^2 \\ (7-m_1)^2 + (2-m_2)^2 &=& r^2 \\ (-7-m_1)^2 + (0-m_2)^2 &=& r^2 \end{array} \right)$$

Durch Anwendung der binomischen Formeln ergibt sich:

$$\begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{l} 25-10m_1+m_1^2 + \qquad\qquad m_2^2 = r^2 \\ 49-14m_1+m_1^2 + 4-4m_2+m_2^2 = r^2 \\ 49+14m_1+m_1^2 + \qquad\qquad m_2^2 = r^2 \end{array} \right) \begin{array}{c} \\ \text{II}-\text{I} \\ \text{III}-\text{I} \end{array}$$

Aus diesem System lassen sich durch Subtraktion die quadratischen Terme m_1^2, m_2^2 und r^2 in den Gleichungen II und III beseitigen.

$$\begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{l} 25-10m_1+m_1^2 \qquad\qquad m_2^2 = r^2 \\ 24-4m_1 \qquad +4-4m_2 \qquad = 0 \\ 24+24m_1 \qquad\qquad\qquad\quad = 0 \end{array} \right)$$

Aus (III) folgt: $m_1=-1$

Einsetzen in (II): $24-4\cdot(-1)+4-4m_2=0 \Leftrightarrow 32=4m_2 \Leftrightarrow m_2=8$

Einsetzen in (I): $25-10\cdot(-1)+(-1)^2+8^2=r^2 \Leftrightarrow 100=r^2 \underset{r>0}{\Leftrightarrow} r=10$

Ergebnis

Der Kreis hat den Mittelpunkt $M(-1|8)$ und den Radius $r=10$.

Die gesuchte Kreisgleichung ist: $(x_1+1)^2+(x_2-8)^2=10^2$.