Inhaltsverzeichnis

W 4 Gebrochenrationale Funktionen[(EK)] (Lösungen)

Notizen

W4

Gebrochenrationale Funktionen (EK)

W 4.1 Begriffsklärung und Klassifizierung

1\. a) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ unecht gebrochenrational

b) $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x^2+1}$ nicht gebrochenrational (Term $\sin(x)$ im Zähler)

c) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{10}$ ganzrational (Umformung: $f(x)=\frac{1}{10}x^2-\frac{1}{10}$)

d) $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x}$ unecht gebrochenrational

W 4.2 Bestimmung der Definitionsmenge

Es gilt: Die Nennernullstellen sind die Definitionslücken der Funktion.

2. a)	$f(x)=\dfrac{1}{x+1}$	$D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	echt gebrochenrational
b)	$f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}$	$D_{\max}=\mathbb{R}$	ganzrational
c)	$f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$	$D_{\max}=\mathbb{R}^+$	nicht gebrochenrational (Wurzelterm)
d)	$f(x)=\dfrac{\sqrt{2}\cdot x}{x+1}$	$D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$	unecht gebrochenrational
e)	$f(x)=\dfrac{x-1}{(x-4)^2}$	$D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{4\}$	echt gebrochenrational
f)	$f(x)=\dfrac{1}{x}+1$	$D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$	echt gebrochenrational
g)	$f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{4x}$	$D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$	unecht gebrochenrational
h)	$f(x)=\dfrac{x^2-2}{4}$	$D_{\max}=\mathbb{R}$	ganzrational
i)	$f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$	$D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$	nicht gebrochenrational (Sinusterm)

W4, Seite 3

3. a) $f(x)=\frac{1}{x-5}$ $D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{5\}$ echt gebr.

b) $f(x)=\frac{x^2}{x+2}$ $D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ unecht gebr.

c) $f(x)=\frac{x^2+1}{(x-1)\cdot(x+1)}$ $D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ unecht gebr.

d) $f(x)=\frac{x-1}{x^2-2x}=\frac{x-1}{x\cdot(x-2)}$ $D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{0;2\}$ echt gebr.

e) $f(x)=\frac{x}{(x-3)^2}$ $D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{3\}$ echt gebr.

f) $f(x)=\frac{x^2}{x^2-4x+4}=\frac{x^2}{(x-4)^2}$ $D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{4\}$ unecht gebr.

g) $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+6x+9}=\frac{x^2-1}{(x+3)^2}$ $D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ unecht gebr.

h) $f(x)=\frac{x}{x^2+7}$ $D_{\max}=\mathbb{R}$ echt gebr.

i) $f(x)=\frac{1}{x^2-x-6}=\frac{1}{(x+2)\cdot(x-3)}$ $D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{-2;3\}$ echt gebr.

4. a) $f(x)=\frac{1}{x+1}$ $D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ Nullst.: keine echt

b) $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ $D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ Nullst.: 0 unecht

c) $f(x)=\frac{x^2-1}{(x+2)^2}=\frac{(x+1)\cdot(x-1)}{(x+2)^2}$ $D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ Nullst.: –1, 1 unecht

d) $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x^2-6x+9}=\frac{(x-1)^2}{(x-3)}$ $D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{3\}$ Nullst.: 1 unecht

e) $f(x)=\frac{x^2-2x}{x^2-2}=\frac{x\cdot(x-2)}{(x-\sqrt{2})\cdot(x+\sqrt{2})}$ $D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$ Nullst.: 0, 2 unecht

f) $f(x)=\frac{x^2+2x+2}{x^2+x-2}=\frac{x^2+2x+2}{(x-1)\cdot(x+2)}$ $D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{1;-2\}$ Nullst.: keine unecht

W4, Seite 3/5

5. a) $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ $\quad D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ echt gebrochenrational

b) $f(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ $\quad D_{\max} = \mathbb{R}_0^+$ nicht gebrochenrational

c) $f(x) = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad D_{\max} = \mathbb{R}^+$ nicht gebrochenrational

d) $f(x) = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}$ $\quad D_{\max} = \mathbb{R}_0^+$ nicht gebrochenrational

e) $f(x) = x^0 = 1$ $\quad D_{\max} = \mathbb{R}$ ganzrational

f) $f(x) = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$ $\quad D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ echt gebrochenrational

6. a) Schreibweise: $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ mit $n \in \mathbb{N}^*$

b) $D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

c) Gerade Exponenten: ohne Vorzeichenwechsel an der Definitionslücke
Ungerade Exponenten: mit Vorzeichenwechsel an der Definitionslücke

W 4.3 Polstellen

7. Gegeben ist die Funktion $f: D_{\max} \to \mathbb{R}, x \mapsto -\frac{x+1}{x-2}$.

a) $D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $(-2$ ist Nullstelle des Nennerpolynoms)

b) Nullstelle von f: $x = -1$ (Nullstelle des Zählerpolynoms)

c) Da $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$, ist $x = 2$ Polstelle mit VzW.

d) Individuelle Lösung

8. Gegeben ist die Funktion $f: D_{\max} \to \mathbb{R}, x \mapsto -\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x \cdot (x-2)}{(x-1)^2}$.

a) $D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; (1 ist Nullstelle des Nennerpolynoms)

b) Nullstellen von f: $x = 0$; $x = 2$ (Nullstellen des Zählerpolynoms)

c) Da $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$, ist $x = 1$ Polstelle ohne VzW.

d) Kein Vorzeichenwechsel an der Polstelle

W4, Seite 9

9. a) Polstelle $x = 1$ mit Vorzeichenwechsel
   b) Polstelle $x = 1$ ohne Vorzeichenwechsel
   c) Polstellen $x = -1$ und $x = 2$ jeweils mit Vorzeichenwechsel

10. a) Gehört zur Funktion ④ $k: x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2}$.

- Die Funktion k hat keine Nullstelle.
- Die Polstelle ist $x = 1$ (ohne Vorzeichenwechsel).
- y-Achsenabschnitt: $k(0) = \frac{1}{(0-1)^2} = 1$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} k(x) = 0^+$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x) = 0^+$

b) Gehört zur Funktion ② $g: x \mapsto \frac{-1}{x+1}$.

- Die Funktion g hat keine Nullstelle.
- Die Polstelle ist $x = -1$ (mit Vorzeichenwechsel).
- y-Achsenabschnitt: $g(0) = \frac{-1}{0+1} = -1$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0^+$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0^-$

c) Gehört zur Funktion ① $f(x) = \frac{-1}{x-1}$.

- Die Funktion f hat keine Nullstelle.
- Die Polstelle ist $x = 1$ (mit Vorzeichenwechsel).
- y-Achsenabschnitt: $f(0) = \frac{-1}{0-1} = 1$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0^+$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^-$

d) Gehört zur Funktion ③ $h: x \mapsto \frac{-1}{(x+1)^2}$.

- Die Funktion h hat keine Nullstelle.
- Die Polstelle ist $x = -1$ (ohne Vorzeichenwechsel).
- y-Achsenabschnitt: $h(0) = \frac{-1}{(0+1)^2} = -1$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 0^-$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0^-$

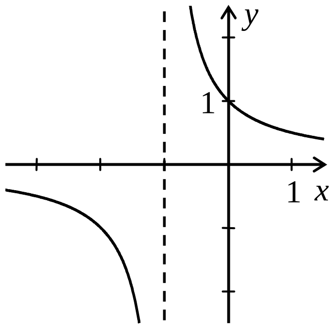
W4, Seite 9/10

11. a) $f: D_{\max} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x+1}$

$D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Polstelle: $x = -1$

–1 ist Nullstelle des Nenners (mit VzW), aber nicht des Zählers.

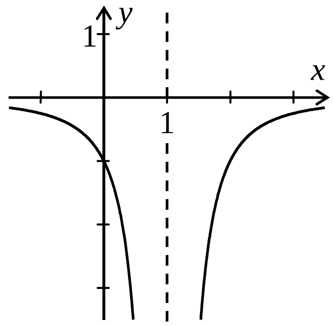


b) $f: D_{\max} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{-1}{(x-1)^2}$

$D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Polstelle: $x = 1$

1 ist Nullstelle des Nenners (ohne VzW), aber nicht des Zählers.

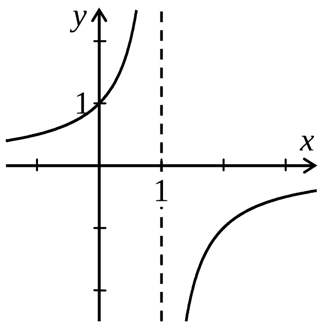


c) $f: D_{\max} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{-1}{x-1}$

$D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Polstelle: $x = 1$

1 ist Nullstelle des Nenners (mit VzW), aber nicht des Zählers.

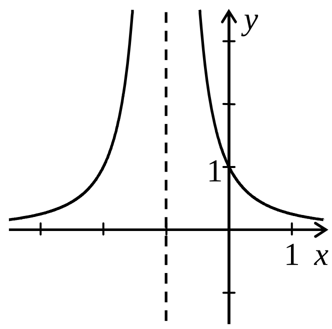


d) $f: D_{\max} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^2+2x+1}$

$D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Polstelle: $x = -1$

–1 ist Nullstelle des Nenners (ohne VzW), aber nicht des Zählers.



12. a) Die Funktion hat bei 2 eine Polstelle ohne VzW, also $f: x \mapsto \frac{a}{(x-2)^2}$.

Der y-Achsenabschnitt ist –1: $f(0) = -1 \iff \frac{a}{(0-2)^2} = -1 \iff a = -4$.

Somit lautet eine mögliche Funktionsgleichung: $f(x) = \frac{-4}{(x-2)^2}$.

b) Die Funktion hat bei $x = -1{,}5$ eine Polstelle mit VzW, also $f: x \mapsto \frac{a}{x+1{,}5}$.

Der y-Achsenabschnitt ist –2: $f(0) = -2 \iff \frac{a}{0+1{,}5} = -2 \iff a = -3$.

Somit lautet eine mögliche Funktionsgleichung: $f(x) = \frac{-3}{x+1{,}5}$.

W4, Seite 10

13. a) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

$D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Nullstellen: keine

Polstelle: $x = 1$, mit VzW

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$	0	1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	| mit VzW Polst.	$+$	

Testwert: $f(0) = \dfrac{1}{0-1} = -1 < 0$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$

$D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Nullstelle: $x = 1$, mit VzW

Polstelle: $x = -2$, mit VzW

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

x	$-\infty$		-2		0	1	$+\infty$
$f(x)$		$+$	| mit VzW Polst.	$-$	0 mit VzW	$+$	

Testwert: $f(1) = \dfrac{1}{1+2} = \dfrac{1}{3} > 0$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x+1} = \dfrac{x \cdot (x-2)}{x+1}$

$D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Nullstellen: $x = 0$; $x = 2$, beide mit VzW

Polstelle: $x = -1$, mit VzW

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$		-1		0	1	2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	| mit VzW Polst.	$+$	0 mit VzW	$-$	0 mit VzW	$+$	

Testwert: $f(1) = \dfrac{-1 \cdot (-1-2)}{-1+1} = -\dfrac{1}{2} < 0$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 2x + 1} = \dfrac{x^2}{(x+1)^2}$

$D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Nullstelle $x = 0$, ohne VzW

Polst.: $x = -1$, ohne VzW

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	| ohne VzW Polst.	$+$	0 ohne VzW	$+$	

Testwerte: Alle Fu.-Werte sind wegen der Quadrate im Zähler und Nenner positiv.

W4, Seite 10 ; Fortsetzung von Nr. 13

e) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - 6x + 9}$

$= \dfrac{x+2}{(x-3)^2}$

$D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

Nullstelle $x = -2$,
mit VzW

Polst.: $x = 3$, ohne VzW

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0 mit VzW		$+$		ǀ ohne VzW Polst.	$+$	

Testwert: $f(0) = \dfrac{0+2}{(0-3)^2} = \dfrac{2}{9} > 0$

f) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + 4x + 4}$

$= \dfrac{(x+1)\cdot(x-2)}{(x+2)^2}$

$D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Nullstellen: $x = -1$; $x = 2$,
beide mit VzW

Polst.: $x = -2$, ohne VzW

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$		-2		-1	0	2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	ǀ ohne VzW Polst.	$+$	0 mit VzW	$-$	0 mit VzW	$+$	

Testwert: $f(0) = \dfrac{0^2 - 0 - 2}{(0+2)^2} = -\dfrac{1}{2} < 0$

14. a) Die Funktion f hat bei 1 eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.
Dies passt nicht zum Graphen.

b) Die Funktion f hat keine Polstelle.
Dies passt nicht zum Graphen.

c) Die Funktion f hat bei 2 eine Polstelle (Nenner: $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$), aber keine Polstelle bei –1.
Dies passt nicht zum Graphen.

W4, Seite 16

W 4.4 Verhalten gebrochenrationaler Funktionen für $x \to \pm\infty$

15\. a) $f(x) = \frac{x+5}{x-2} = 1 + \frac{7}{x-2}$

Polynomdivision durch $(x-2)$

$$\begin{array}{l} (x+5):(x-2) = 1 + \frac{7}{x-2} \\ \underline{-(x-2)} \\ \quad 7 \end{array}$$

b) $f(x) = \frac{x^2+3}{x-2} = x + 2 + \frac{7}{x-2}$

Polynomdivision durch $(x-2)$

$$\begin{array}{l} (x^2 \qquad +3) \; : \; (x-2) = x + 2 + \frac{7}{x-2} \\ \underline{-(x^2-2x)} \\ \quad 0 + \; 2x + 3 \\ \quad \underline{-(2x-4)} \\ \qquad 7 \end{array}$$

c) $f(x) = \frac{x^2+3x-5}{x} = x + 3 + \frac{-5}{x}$

Polynomdivision durch x

$$\begin{array}{l} (x^2+3x-5):x = x+3+\frac{-5}{x} \\ \underline{-x^2} \\ \quad 0+3x-5 \\ \quad \underline{-3x} \\ \qquad -5 \end{array}$$

d) $f(x) = \frac{x^2-x+2}{x-2} = x + 1 + \frac{4}{x-2}$

Polynomdivision durch $(x-2)$

$$\begin{array}{l} (x^2 - \quad x+2):(x-2) = x+1+\frac{4}{x-2} \\ \underline{-(x^2-2x)} \\ \qquad x+2 \\ \quad \underline{-(x-2)} \\ \qquad 4 \end{array}$$

e) $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x+1} = x + \frac{-1}{x+1}$

Polynomdivision durch $(x+1)$

$$\begin{array}{l} (x^2+x-1):(x+1) = x+\frac{-1}{x+1} \\ \underline{-(x^2+x)} \\ \qquad 0-1 \end{array}$$

f) $f(x) = \frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2} = 1 + \frac{2}{(x-1)^2}$

Polynomdivision durch (x^2-2x+1)

$$\begin{array}{l} (x^2-2x+3):(x^2-2x+1) = 1+\frac{2}{(x-1)^2} \\ \underline{-(x^2-2x+1)} \\ \qquad 2 \end{array}$$

W4, Seite 16/17

16. a) $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$ gehört zu Graph ④

Nullstelle: $x = 2$; Polstelle: $x = -1$ mit VzW

b) $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x+1}$ gehört zu Graph ⑥

Nullstellen: $x=-\sqrt{2}$; $x=\sqrt{2}$; Polstelle: $x = -1$ mit VzW

c) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{(x+1)^2}$ gehört zu Graph ⑤

Nullstellen: $x = -2$; $x = 2$; Polstelle: $x = -1$ ohne VzW

d) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ gehört zu Graph ①

Nullstelle: $x = -1$; Polstelle: $x = 1$ mit VzW

e) $f(x)=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$ gehört zu Graph ③

Nullstelle: $x = 0$ (doppelt) ; Polstelle: $x = 1$ ohne VzW

f) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-2x+1}=\dfrac{x+1}{(x-1)^2}$ gehört zu Graph ②

Nullstelle: $x = -1$; Polstelle: $x = 1$ ohne VzW

17.* a) $f(x)=\dfrac{ax-1}{x-2}=a+\dfrac{2a-1}{x-2}$

Polynomdivision durch $(x-2)$

$$\begin{array}{l} (ax-1) \quad : (x-2)=a+\frac{2a-1}{x-2} \\ \underline{-(ax-2a)} \\ \quad 0+2a-1 \end{array}$$

b) $f(x)=\dfrac{ax^3}{x^2-2}=ax+\dfrac{2ax}{x^2-2}$

Polynomdivision durch (x^2-2)

$$\begin{array}{l} ax^3 \quad : (x^2-2)=ax+\frac{2ax}{x^2-2} \\ \underline{-(ax^3-2ax)} \\ \quad 0 \ +2ax \end{array}$$

c) $f(x)=\dfrac{ax^3-x^2+1}{ax^2+1}$

$=x-\dfrac{1}{a}+\dfrac{-x+1+\frac{1}{a}}{ax^2+1}$

Polynomdivision durch (ax^2+1)

$$\begin{array}{l} (ax^3-x^2 \quad +1) \quad : (ax^2+1)=x-\frac{1}{a}+\frac{-x+1+\frac{1}{a}}{ax^2+1} \\ \underline{-(ax^3 \quad +x)} \\ \quad -x^2 \ -x+1 \\ \quad \underline{-(-x^2- \quad \frac{1}{a})} \\ \quad\quad 0 \ -x+ \ 1+\frac{1}{a} \end{array}$$

W4, Seite 17

18. a) $f(x)=\frac{2x-3}{x-2},\ D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

Asymptote: $f_A(x)=2$

Schnittpunkte von G_f mit der Asymptote:

$r(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x-2}=0$ (unerfüllbar)

Es gibt keine Schnittpunkte von G_f mit der Asymptote.

Polynomdivision durch $(x-2)$

$$\begin{array}{l} (2x-3) : (x-2)=\underbrace{2}_{f_a(x)}+\underbrace{\frac{1}{x-2}}_{r(x)} \\ \underline{-(2x-4)} \\ \quad 0+1 \end{array}$$

b) $f(x)=\frac{1-x}{x+1},\ D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Asymptote: $f_A(x)=-1$

Schnittpunkte von G_f mit der Asymptote:

$r(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2}{x+1}=0$ (unerfüllbar)

Es gibt keine Schnittpunkte von G_f mit der Asymptote.

Polynomdivision durch $(x+1)$

$$\begin{array}{l} (-x+1) : (x+1)=\underbrace{-1}_{f_a(x)}+\underbrace{\frac{2}{x+1}}_{r(x)} \\ \underline{-(-x-1)} \\ \quad 0+2 \end{array}$$

c) $f(x)=\frac{x^2-2x}{x^2+3},\ D_{\max}=\mathbb{R}$

Asymptote: $f_A(x)=1$

Schnittpunkte von G_f mit der Asymptote:

$r(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{x^2+3}=0 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$

Wegen $f_A(-1{,}5)=1$ schneidet G_f die waagerechte Asymptote im Punkt $S(-1{,}5|1)$.

Polynomdivision durch (x^2+3)

$$\begin{array}{l} (x^2-2x) : (x^2+3)=\underbrace{1}_{f_a(x)}-\underbrace{\frac{2x+3}{x^2+3}}_{r(x)} \\ \underline{-(x^2 \qquad +3)} \\ \quad -2x-3 \end{array}$$

d) $f(x)=\frac{2x^2+3}{x^2+1},\ D_{\max}=\mathbb{R}$

Asymptote: $f_A(x)=2$

Schnittpunkte von G_f mit der Asymptote:

$r(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1}=0$ (unerfüllbar)

Es gibt keine Schnittpunkte von G_f mit der Asymptote.

Polynomdivision durch (x^2+1)

$$\begin{array}{l} (2x^2+3) : (x^2+1)=\underbrace{2}_{f_a(x)}+\underbrace{\frac{1}{x^2+1}}_{r(x)} \\ \underline{-(2x^2+2)} \\ \quad 0 \ +1 \end{array}$$

W4, Seite 17 ; Fortsetzung von Nr. 18

e) $f(x)=\frac{x^2}{x+3}$, $D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

Asymptote: $f_A(x)=x-3$

Schnittpunkte von G_f mit der Asymptote:

$r(x)=0 \Leftrightarrow \frac{9}{x+3}=0$

$\Leftrightarrow 9=0$ (unerfüllbar)

Die Asymptote schneidet G_f nicht.

Polynomdivision durch $(x+3)$

$$
\begin{array}{l}
x^2 \quad : (x+3) = \underbrace{x-3}_{f_a(x)} + \underbrace{\frac{9}{x+3}}_{r(x)} \\
\underline{-(x^2+3x)} \\
\quad -3x \\
\quad \underline{-(-3x-9)} \\
\qquad 0+9
\end{array}
$$

f) $f(x)=\frac{x^2-2}{x^2+x}$, $D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$

Asymptote: $f_A(x)=1$

Schnittpunkte von G_f mit der Asymptote:

$r(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-x-2}{x^2+x}=0 \Leftrightarrow x=-2$

Wegen $f_A(-2)=1$ schneidet G_f die waagerechte Asymptote im Punkt $S(-2|1)$.

Polynomdivision durch (x^2+x)

$$
\begin{array}{l}
(x^2 \quad -2) : (x^2+x) = \underbrace{1}_{f_a(x)} + \underbrace{\frac{-x-2}{x^2+x}}_{r(x)} \\
\underline{-(x^2+x)} \\
\;0 \quad -x-2
\end{array}
$$

19. a) $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$

Nullstelle $x=1$

Der Graph hat keine Nullstelle.

b) $f(x)=\frac{-1}{x^2+1}$

Der Graph hat die Polstelle 1, aber das Nennerpolynom hat keine Nullstelle.

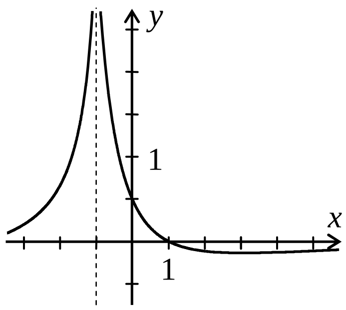
c) $f(x)=\frac{x-1}{(x+2)^2}$

Nullstelle $x=1$

Die Nullstelle 1 ist im Graphen nicht korrekt und der Pol bei –2 hat einen VzW.

W4, Seite 17

20. a)



Polstelle: $x = -1$ (ohne VzW)

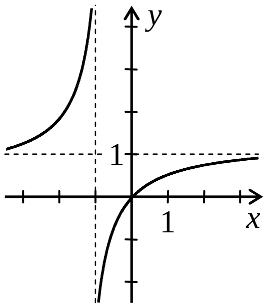
Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0^{\mp}$

Asymptote: $y = 0$ (x-Achse, waagerecht)

Annäherung: für $x \to -\infty$ von oben

für $x \to +\infty$ von unten

b)



Polstelle: $x = -1$ (mit VzW)

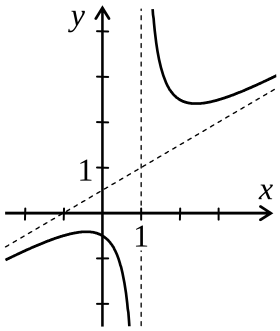
Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1^{\mp}$

Asymptote: $y = 1$ (waagerecht)

Annäherung: für $x \to -\infty$ von oben

für $x \to +\infty$ von unten

c)



Polstelle: $x = 1$ (mit VzW)

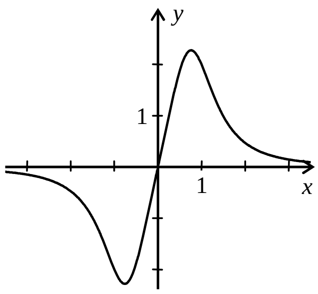
Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

Asymptote: $y = 0{,}5x + 0{,}5$ (schiefe Gerade)

Annäherung: für $x \to -\infty$ von unten

für $x \to +\infty$ von oben

d)



Polstellen: keine

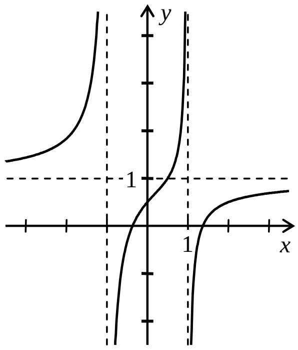
Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm 0$

Asymptote: $y = 0$ (x-Achse, waagerecht)

Annäherung: für $x \to -\infty$ von unten

für $x \to +\infty$ von oben

e)



Polstellen: $x = -1$, $x = 1$
(beide einf. mit VzW)

Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1^{\mp}$

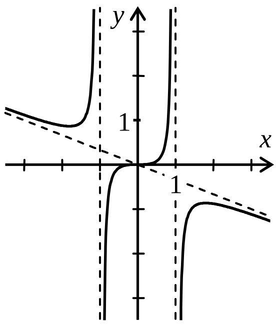
Asymptote: $y = 1$ (waagerecht)

Annäherung: für $x \to -\infty$ von oben

für $x \to +\infty$ von unten

W4, Seite 17/18 ; Fortsetzung von Nr. 20

f)



Polstellen: $x = -1$, $x = 1$ (beide einf. mit VzW)

Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$

Asymptote: $y = -0{,}3x$ (schiefe Gerade)

Annäherung: für $x \to -\infty$ von oben

für $x \to +\infty$ von unten

21. a) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$; Graph hat keine Nullstelle. Polstelle: $x = 1$ ohne VzW

Der y-Achsenabschnitt im Graph ist 1.

Da $f(0) = 1$, stimmt dies mit dem y-Achsenabschnitt im Graphen überein.

b) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$; Nullstelle: $x = -2$; Polstelle: $x = 1$ mit VzW

Der y-Achsenabschnitt im Graph ist –2.

Da $f(0) = -2$, stimmt dies mit dem y-Achsenabschnitt im Graphen überein.

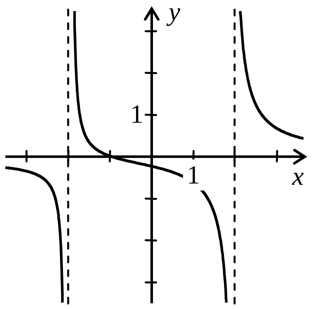
c) $f(x) = \dfrac{-2}{x+1}$; Keine Nullstelle ; Polstelle: $x = -1$ mit VzW

Der y-Achsenabschnitt im Graph ist –2.

Da $f(0) = -2$, stimmt dies mit dem y-Achsenabschnitt im Graphen überein.

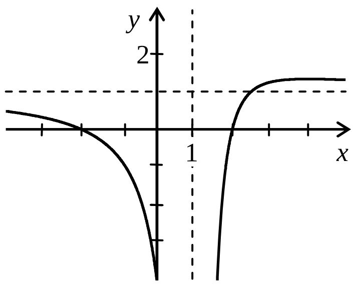
W4, Seite 18

22. a) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-4}$



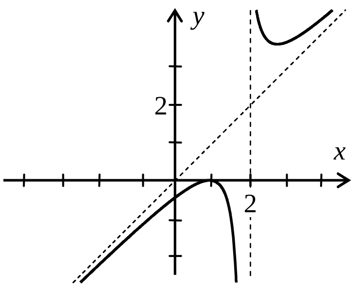
Nullstelle: $x=-1$ (einf. mit VzW)
Polstellen: $x=-2$, $x=2$
(beide einf. mit VzW)
Polynomdivision: nicht notwendig
Asymptote: x-Achse (echt gebrochen)
Schnittstelle mit G_f: $x=-1$ (hier die Nullst.)
Annäherung: $\dfrac{x+1}{x^2-4}<0$ für $x\to-\infty$,
also von unten
$\dfrac{x+1}{x^2-4}>0$ für $x\to+\infty$,
also von oben

b) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-2x+1}$



Nullstellen: $x=-2$, $x=2$ (mit VzW)
Polstelle: $x=1$ (ohne VzW)
Polynomdivision: $f(x)=1+\dfrac{2x-5}{(x-1)^2}$
Asymptote: $y=1$ (waagerecht)
Schnittstelle mit G_f: $x=2{,}5$
Annäherung: $r(x)=\dfrac{2x-5}{(x-1)^2}<0$ für
$x\to-\infty$, also von unten
$r(x)=\dfrac{2x-5}{(x-1)^2}>0$ für
$x\to+\infty$, also von oben

c) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x-2}$



Nullstelle: $x=1$ (ohne VzW)
Polstelle: $x=2$ (mit VzW)
Polynomdivision: $f(x)=x+\dfrac{1}{x-2}$
Asymptote: $y=x$ (schiefe Gerade)
Schnittstelle mit G_f: keine
Annäherung: $r(x)=\dfrac{1}{x-2}<0$ für
$x\to-\infty$, also von unten
$r(x)=\dfrac{1}{x-2}>0$ für
$x\to+\infty$, also von oben

W4, Seite 18

23. a) $f(x)=\frac{9}{x-4}=0+\frac{9}{x-4}$

- Asymptote: $y=0$ (x-Achse)
- Annäherung für $x\to\pm\infty$:

$r(x)=\frac{9}{x-4}<0$ für $x\to-\infty$, also Annäherung von unten

$r(x)=\frac{9}{x-4}>0$ für $x\to+\infty$, also Annäherung von oben

b) $f(x)=\frac{x-3}{x+4}=1+\frac{-7}{x+4}$

Polynomdivision durch $(x+4)$

$$\begin{array}{l}(x-3):(x+4)=1+\frac{-7}{x+4}\\ \underline{-(x+4)}\\ \quad -7\end{array}$$

- Asymptote: $y=1$ (waagerecht)
- Annäherung für $x\to\pm\infty$:

$r(x)=\frac{-7}{x+4}>0$ für $x\to-\infty$,
also Annäherung von oben

$r(x)=\frac{-7}{x+4}<0$ für $x\to+\infty$,
also Annäherung von unten

c) $f(x)=\frac{4x-2}{x+2}=4+\frac{-10}{x+2}$

Polynomdivision durch $(x+2)$

$$\begin{array}{l}(4x-2):(x+2)=4+\frac{-10}{x+2}\\ \underline{-(4x+8)}\\ \quad -10\end{array}$$

- Asymptote: $y=4$ (waagerecht)
- Annäherung für $x\to\pm\infty$:

$r(x)=\frac{-10}{x+2}>0$ für $x\to-\infty$,
also Annäherung von oben

$r(x)=\frac{-10}{x+2}<0$ für $x\to+\infty$,
also Annäherung von unten

d) $f(x)=\frac{-x}{(x+2)^2}=0+\frac{-x}{(x+2)^2}$

- Asymptote: $y=0$ (x-Achse)
- Annäherung für $x\to\pm\infty$:

$r(x)=\frac{-x}{(x+2)^2}>0$ für $x\to-\infty$, also Annäherung von oben

$r(x)=\frac{-x}{(x+2)^2}<0$ für $x\to+\infty$, also Annäherung von unten

W4, Seite 18 ; Fortsetzung von Nr. 23

e) $f(x)=\frac{x^2-2}{x-2}=x+2+\frac{2}{x-2}$

Polynomdivision durch $(x-2)$

$$
\begin{array}{l}
(x^2 \qquad -2):(x-2)=x+2+\frac{2}{x-2} \\
\underline{-(x^2-2x)} \\
\qquad 2x-2 \\
\qquad \underline{-(2x-4)} \\
\qquad\qquad 2
\end{array}
$$

– Asymptote: $y=x+2$ (schiefe Gerade)
– Annäherung für $x\rightarrow\pm\infty$:

$r(x)=\frac{2}{x-2}<0$ für $x\rightarrow-\infty$,

also Annäherung von unten

$r(x)=\frac{2}{x-2}>0$ für $x\rightarrow+\infty$,

also Annäherung von oben

f) $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}=1+\frac{-4}{(x+1)^2}$

Polynomdivision durch (x^2+2x+1)

$$
\begin{array}{l}
(x^2+2x-3):(x^2+2x+1)=1+\frac{-4}{x^2+2x+1} \\
\underline{-(x^2+2x+1)} \\
\qquad -4
\end{array}
$$

– Asymptote: $y=1$ (waagerecht)
– Annäherung für $x\rightarrow\pm\infty$:

$r(x)=\frac{-4}{(x+1)^2}<0$ für $x\rightarrow-\infty$, also Annäherung von unten

$r(x)=\frac{-4}{(x+1)^2}<0$ für $x\rightarrow+\infty$, also Annäherung von unten

W4, Seite 18

24. a) $f(x) = \underbrace{x+1}_{f_A(x)} + \underbrace{\frac{2x}{x^2-9}}_{r(x)}$, $D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$

Asymptote: $f_A(x) = x+1$ (schiefe Gerade)

Schnittpunkte von G_f mit der Asymptote:

$r(x) = 0 \iff \frac{2x}{x^2-9} = 0 \iff x = 0$

Wegen $f_A(0) = 1$ schneidet G_f die schiefe Asymptote im Punkt $S(0|1)$.

Abstand von G_f von der Asymptote an der Stelle $x = 10$:

$d = |r(10)| = \left|\frac{2 \cdot 10}{10^2 - 9}\right| = \left|\frac{20}{91}\right| \approx 0{,}22$

An der Stelle $x = 10$ hat der Graph von der Asymptote den Abstand von etwa 0,22.

Abstand von G_f von der Asymptote an der Stelle $x = -20$:

$d = |r(-20)| = \left|\frac{2 \cdot (-20)}{(-20)^2 - 9}\right| = \left|\frac{-40}{391}\right| \approx 0{,}10$

An der Stelle $x = -20$ hat der Graph von der Asymptote den Abstand von etwa 0,10.

b) $f(x) = \underbrace{x-1}_{f_A(x)} + \underbrace{\frac{x^2-3x}{x^3-8}}_{r(x)}$, $D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Asymptote: $f_A(x) = x-1$ (schiefe Gerade)

Schnittpunkte von G_f mit der Asymptote:

$r(x) = 0 \iff \frac{x \cdot (x-3)}{x^3-8} = 0 \iff x = 0 \lor x = 3$

Wegen $f_A(0) = -1$ schneidet G_f die schiefe Asymptote im Punkt $S_1(0|-1)$.

Wegen $f_A(3) = 2$ schneidet G_f die schiefe Asymptote im Punkt $S_2(3|2)$.

Abstand von G_f von der Asymptote an der Stelle $x = 10$:

$d = |r(10)| = \left|\frac{10^2 - 3 \cdot 10}{10^3 - 8}\right| = \left|\frac{70}{992}\right| \approx 0{,}07$

An der Stelle $x = 10$ hat der Graph von der Asymptote den Abstand von etwa 0,07.

Abstand von G_f von der Asymptote an der Stelle $x = -20$:

$d = |r(-20)| = \left|\frac{(-20)^2 - 3 \cdot 20}{(-20)^3 - 8}\right| = \left|\frac{340}{-8008}\right| \approx 0{,}04$

An der Stelle $x = 10$ hat der Graph von der Asymptote den Abstand von etwa 0,07.

W4, Seite 21

W 4.5 Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten

Quotientenregel

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v\cdot u' - u\cdot v'}{v^2}$$

25. a) $\left(\frac{x+1}{x-2}\right)' = \frac{(x-2)\cdot 1-(x+1)\cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{x-2-x-1}{(x-2)^2} = -\frac{3}{(x-2)^2}$

$u(x)=x+1\ ;\ u'(x)=1\ ;\ v(x)=x-2\ ;\ v'(x)=1$

b) $\left(\frac{x^2}{x-3}\right)' = \frac{(x-3)\cdot 2x - x^2\cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{2x^2-6x-x^2}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x}{(x-3)^2}$

$u(x)=x^2\ ;\ u'(x)=2x\ ;\ v(x)=x-3\ ;\ v'(x)=1$

c) $\left(\frac{-x^2}{x^2-x-2}\right)' = \frac{(x^2-x-2)\cdot(-2x)-(-x^2)\cdot(2x-1)}{(x^2-x-2)^2}$

$= \frac{-2x^3+2x^2+4x-(-x^2)\cdot(2x-1)}{(x^2-x-2)^2} = \frac{-2x^3+2x^2+4x-(-2x^3+x^2)}{(x^2-x-2)^2}$

$= \frac{-2x^3+2x^2+4x+2x^3-x^2}{(x^2-x-2)^2} = \frac{x^2+4x}{(x^2-x-2)^2}$

$u(x)=-x^2\ ;\ u'(x)=-2x\ ;\ v(x)=x^2-x-2\ ;\ v'(x)=2x-1$

d) $\left(\frac{x+1}{(x+3)^2}\right)' = \frac{(x+3)^2\cdot 1-(x+1)\cdot 2\cdot(x+3)\cdot 1}{(x+3)^4} = -\frac{(x+3)^2-2\cdot(x+1)\cdot(x+3)}{(x+3)^4}$

$= \frac{(x+3)-2\cdot(x+1)}{(x+3)^3} = \frac{x+3-2x-2}{(x+3)^3} = \frac{-x+1}{(x+3)^3}$

$u(x)=x+1\ ;\ u'(x)=1\ ;\ v(x)=(x+3)^2\ ;\ v'(x)\underset{\text{Ketten-regel}}{=}2\cdot(x+3)\cdot 1$

26. a) $\left(\frac{x}{x-1}\right)' = \frac{(x-1)\cdot 1-x\cdot 1}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2}$

$u(x)=x\ ;\ u'(x)=1\ ;\ v(x)=x-1\ ;\ v'(x)=1$

$\left(\frac{x}{x-1}\right)'' = \left(\frac{-1}{(x-1)^2}\right)' = \frac{(x-1)^2\cdot 0-(-1)\cdot 2\cdot(x-1)\cdot 1}{(x-1)^4} = \frac{2\cdot(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}$

$u(x)=-1\ ;\ u'(x)=0\ ;\ v(x)=(x-1)^2\ ;\ v'(x)\underset{\text{Ketten-regel}}{=}2\cdot(x-1)\cdot 1$

W4, Seite 21 ; Fortsetzung von Nr. 26

b) $$\left(\frac{(x+2)^2}{x-4}\right)' = \frac{(x-4)\cdot 2\cdot(x+2)\cdot 1-(x+2)^2\cdot 1}{(x-4)^2} = \frac{2\cdot(x^2-2x-8)-x^2-4x-4}{(x-4)^2}$$

$$= \frac{2x^2-4x-16-x^2-4x-4}{(x-4)^2} = \frac{x^2-8x-20}{(x-4)^2}$$

$$u(x)=(x+2)^2 \;;\; u'(x) \underset{\substack{\text{Ketten-}\\\text{regel}}}{=} 2\cdot(x+2)\cdot 1 \;;\; v(x)=x-4 \;;\; v'(x)=1$$

$$\left(\frac{(x+2)^2}{x-4}\right)'' = \left(\frac{x^2-8x-20}{(x-4)^2}\right)' = \frac{(x-4)^2\cdot(2x-8)-(x^2-8x-20)\cdot 2\cdot(x-4)\cdot 1}{(x-4)^4}$$

$$= \frac{(x-4)\cdot(2x-8)-2\cdot(x^2-8x-20)}{(x-4)^3} = \frac{2x^2-16x+32-2x^2+16x+40}{(x-4)^3}$$

$$= \frac{72}{(x-4)^3}$$

$$u(x)=x^2-8x-20 \;;\; u'(x)=2x-8 \;;\; v(x)=(x-4)^2 \;;\; v'(x) \underset{\substack{\text{Ketten-}\\\text{regel}}}{=} 2\cdot(x-4)\cdot 1$$

c) $$\left(\frac{x^2}{(x+1)^2}\right)' = \frac{(x+1)^2\cdot 2x-x^2\cdot 2\cdot(x+1)\cdot 1}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)\cdot 2x-2x^2}{(x+1)^3} = \frac{2x}{(x+1)^3}$$

$$u(x)=x^2 \;;\; u'(x)=2x \;;\; v(x)=(x+1)^2 \;;\; v'(x) \underset{\substack{\text{Ketten-}\\\text{regel}}}{=} 2\cdot(x+1)\cdot 1$$

$$\left(\frac{x^2}{(x+1)^2}\right)'' = \left(\frac{2x}{(x+1)^3}\right)' = \frac{(x+1)^3\cdot 2-2x\cdot 3\cdot(x+1)^2\cdot 1}{(x+1)^6} = \frac{(x+1)\cdot 2-6x}{(x+1)^4} = \frac{-4x+2}{(x+1)^4}$$

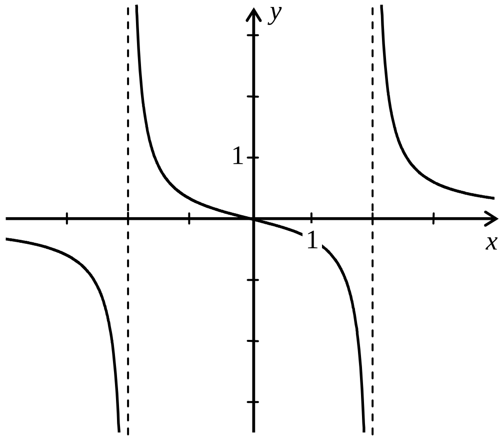
$$u(x)=2x \;;\; u'(x)=2 \;;\; v(x)=(x+1)^3 \;;\; v'(x) \underset{\substack{\text{Ketten-}\\\text{regel}}}{=} 3\cdot(x+1)^2\cdot 1$$

W4, Seite 21

27. a) $f: D_{\max} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x}{x^2-4}$; echt gebrochenrational

- **Faktorisierung**: $f(x) = \dfrac{x}{(x-2)\cdot(x+2)}$

Gegebener Graph



- **Maximale Definitionsmenge**: $D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$
- **Polstellen**: $x=-2$; $x=2$ (beide einfach, mit VzW)
- **Asymptote**
  Ohne Polynomdivision ergibt sich die Zerlegung:
  $$f(x) = \underbrace{0}_{f_A(x)} + \underbrace{\frac{x}{x^2-4}}_{r(x)} .$$
  Asymptote: $f_A(x) = 0$ (x-Achse)
  $\lim\limits_{x\to\pm\infty} r(x) = 0^+$ und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f_A(x) = 0^{\pm}$
- **Nullstelle**: $x=0$ (einfach, mit VzW)
- **Extrempunkte**
  - Erste Ableitung
    $$f'(x) = \frac{(x^2-4)\cdot 1 - x\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2-4-2x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2}$$
  - Notwendige Bedingung
    $$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2} \Leftrightarrow -x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2=-4 \text{ (unerfüllbar)}$$

  Es liegen keine Extrempunkte vor.

W4, Seite 21 ; Fortsetzung von Nr. 27a

- **Monotonieintervalle**

  Vorzeichentabelle für $f'(x)$

x	$-\infty$		-2	1	2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	| ohne VzW Polst.	$-$	| ohne VzW Polst.	$-$	

Vielfachheit der Polstelle von f' beachten (hier doppelt).
Testwert:
$f'(1) = \frac{-1^2-4}{(1^2-4)^2} = \frac{-5}{9} < 0$

f ist in $]-\infty;-2[$, in $]-2;2[$ und in $]2;+\infty[$ streng monoton fallend.

- **Wendepunkte**
  - Zweite Ableitung

$$f''(x) = \frac{(x^2-4)^2\cdot(-2x)-(-x^2-4)\cdot 2\cdot(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4}$$
$$= \frac{(x^2-4)\cdot(-2x)-(-x^2-4)\cdot 2\cdot 2x}{(x^2-4)^3} = \frac{-2x^3+8x+4x^3+16x}{(x^2-4)^3}$$
$$= \frac{2x^3+24x}{(x^2-4)^3} = 2\cdot\frac{x\cdot(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$$

  - Notwendige Bedingung

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 2\cdot\frac{x\cdot(x^2+12)}{(x^2-4)^3} \Leftrightarrow x\cdot(x^2+12)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ (einf. mit VzW)}$$

  - Hinreichende Bedingung

  Vorzeichentabelle für $f''(x)$

x	$-\infty$		-2		0	1	2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	| mit VzW Polst.	$+$	0 mit VzW Polst.	$-$	| mit VzW Polst.	$+$	

Vielfachheit der Polstelle von f'' beachten (hier dreifach).

Testwert: $f''(1) = \frac{2\cdot1^2+24\cdot1}{(1^2-4)^2} = \frac{26}{9} > 0$

Angabe des Wendepunkts

Mit $f(0) = \frac{0}{0^2-4} = 0$ ergibt sich $W(0|0)$.

- **Krümmungsintervalle** (siehe Vorzeichentabelle von $f''(x)$)

  G_f ist in $]-\infty;-2[$ und in $[0;2[$ rechtsgekrümmt.

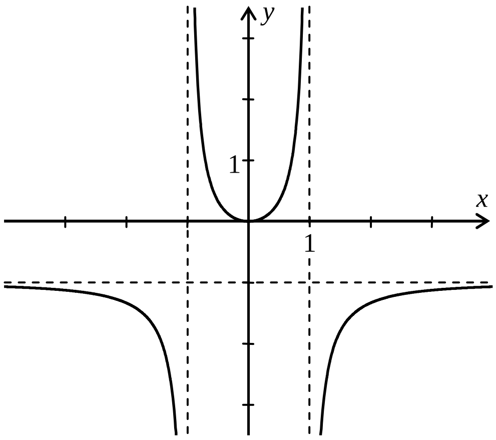
  G_f ist in $]-2;0]$ und in $]2;+\infty[$ linksgekrümmt.

W4, Seite 21 ; Fortsetzung von Nr. 27

b) $f: D_{\max} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{-x^2}{x^2-1}$; unecht gebrochenrational

- **Faktorisierung**: $f(x) = \dfrac{-x^2}{(x-1)\cdot(x+1)}$

Gegebener Graph



- **Maximale Definitionsmenge**: $D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$
- **Polstellen**: $x=-1$; $x=1$ (beide einfach, mit VzW)
- **Asymptote**

  Polynomdivision: $(-x^2) : (x^2-1) = -1 + \dfrac{-1}{x^2-1}$

  $$\begin{array}{l} (-x^2) \\ \underline{-(-x^2+1)} \\ \quad 0 \quad -1 \end{array}$$

  Zerlegung: $f(x) = \underbrace{-1}_{f_A(x)} + \underbrace{\dfrac{-1}{x^2-1}}_{r(x)}$

  Asymptote: $f_A(x) = -1$ (waagerechte Asymptote)

  $\lim\limits_{x\to\pm\infty} r(x) = 0^-$ und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f_A(x) = -1^-$

- **Nullstelle**: $x=0$ (doppelt, ohne VzW)
- **Extrempunkte**
  - Erste Ableitung

    $$f'(x) = \frac{(x^2-1)\cdot(-2x)-(-x^2)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x^3+2x+2x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$$

  - Notwendige Bedingung

    $$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2x}{(x^2-1)^2} \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$$ (einfach, mit VzW)

W4, Seite 21 ; Fortsetzung von Nr. 27b

– Hinreichende Bedingung

Vorzeichentabelle für $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		0		1		2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	| ohne VzW Polst.	$-$	0 mit VzW TP	$+$	| ohne VzW Polst.		$+$	

Vielfachheit der Polstelle von f' beachten (hier doppelt).

Testwert: $f'(2) = \frac{2 \cdot 2}{(2^2-1)^2} = \frac{4}{9} > 0$

Angabe des Extrempunkts
Mit $f(0) = 0$ ergibt sich $T(0|0)$.

- **Monotonieintervalle** (siehe Vorzeichentabelle von $f'(x)$)

  f ist in $]-\infty; -1[$ und in $]-1; 0]$ streng monoton fallend.

  f ist in $[0; 1[$ und in $]1; +\infty[$ streng monoton wachsend.

- **Wendepunkte**

  – Zweite Ableitung

$$f''(x) = \frac{(x^2-1)^2 \cdot 2 - 2x \cdot 2 \cdot (x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \frac{(x^2-1) \cdot 2 - 2x \cdot 2 \cdot 2x}{(x^2-1)^3}$$

$$= \frac{2x^2 - 2 - 8x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{-2-6x^2}{(x^2-1)^3} = -\frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$$

  – Notwendige Bedingung

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3} \Leftrightarrow 6x^2 + 2 = 0 \quad \text{(unerfüllbar)}$$

  Es liegen keine Wendepunkte vor.

Vorzeichentabelle für $f''(x)$

x	$-\infty$		-1		0	1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	| mit VzW Polst.		$+$	| mit VzW Polst.	$-$	

Vielfachheit der Polstelle von f'' beachten (hier dreifach).

Testwert: $f''(0) = -\frac{6 \cdot 0^2 + 2}{(0^2-1)^3} = -\frac{2}{-1} = 2 > 0$

- **Krümmungsintervalle** (siehe Vorzeichentabelle von $f''(x)$)

  G_f ist in $]-\infty; -1[$ und in $]1; +\infty[$ rechtsgekrümmt.

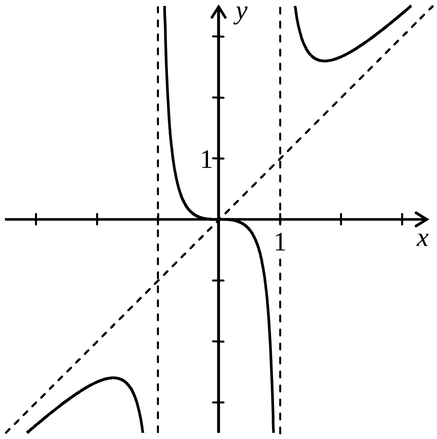
  G_f ist in $]-1; 1[$ linksgekrümmt.

W4, Seite 21 ; Fortsetzung von Nr. 27

c) $f: D_{\max} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \dfrac{x^3}{x^2-1}$; unecht gebrochenrational

- **Faktorisierung**: $f(x) = \dfrac{-x^2}{(x-1)\cdot(x+1)}$

Gegebener Graph



- **Maximale Definitionsmenge**: $D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$
- **Polstellen**: $x=-1$; $x=1$ (beide einfach, mit VzW)
- **Asymptote**

  Polynomdivision: $\begin{array}{l} x^3 \\ \underline{-(x^3-x)} \\ 0 \;\; +x \end{array} \;:\; (x^2-1) = x + \dfrac{x}{x^2-1}$

  Zerlegung: $f(x) = \underbrace{x}_{f_A(x)} + \underbrace{\dfrac{x^2}{x^2-1}}_{r(x)}$

  Asymptote: $f_A(x) = x$ (schiefe Asymptote)

  $\lim\limits_{x\to\pm\infty} r(x) = \pm\infty$ und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f_A(x) = \pm\infty$

- **Nullstelle**: $x=0$ (dreifach, ohne VzW)
- **Extrempunkte**
  - Erste Ableitung

    $$f'(x) = \frac{(x^2-1)\cdot 3x^2 - x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2\cdot(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

  - Notwendige Bedingung

    $$f'(x)=0 \iff \frac{x^2\cdot(x^2-3)}{(x^2-1)^2} \iff x^2\cdot(x^2-3)=0$$

    $$\iff \underbrace{x=0}_{\substack{\text{doppelt,}\\ \text{ohne VzW}}} \vee \underbrace{x=-\sqrt{3}}_{\substack{\text{einfach,}\\ \text{mit VzW}}} \vee \underbrace{x=\sqrt{3}}_{\substack{\text{einfach,}\\ \text{mit VzW}}}$$

W4, Seite 21 ; Fortsetzung von Nr. 27c

– Hinreichende Bedingung

Vorzeichentabelle für $f'(x)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1	2	$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0 mit VzW HP	$+$	| ohne VzW Polst.	$+$	0 ohne VzW	$+$	| ohne VzW Polst.	$+$	0 mit VzW TP	$-$	

Vielfachheit der Polstelle von f' beachten (hier doppelt). Testwert: $f'(2)=\frac{2^4-3\cdot 2^2}{(2^2-1)^2}=\frac{12}{9}>0$

Angabe der Extrempunkte

Mit $f(-\sqrt{3})=\frac{(-\sqrt{3})^3}{(-\sqrt{3})^2-1}=\frac{3\cdot(-\sqrt{3})}{3-1}=-\frac{3}{2}\cdot\sqrt{3}$ ergibt sich $T(-\sqrt{3}\,|-\frac{3}{2}\cdot\sqrt{3})$.

Mit $f(\sqrt{3})=\frac{(\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3})^2-1}=\frac{3\cdot\sqrt{3}}{3-1}=\frac{3}{2}\cdot\sqrt{3}$ ergibt sich $H(\sqrt{3}\,|\,\frac{3}{2}\cdot\sqrt{3})$.

- **Monotonieintervalle** (siehe Vorzeichentabelle von $f'(x)$)

  f ist in $]-\infty;-\sqrt{3}[$ und in $]\sqrt{3};+\infty[$ streng monoton wachsend.

  f ist in $]-\sqrt{3};-1[$, in $]-1;1[$ und in $]1;\sqrt{3}[$ streng monoton fallend.

- **Wendepunkte**

– Zweite Ableitung

$$f''(x)=\frac{(x^2-1)^2\cdot(4x^3-6x)-(x^4-3x^2)\cdot 2\cdot(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}$$

$$=\frac{(x^2-1)\cdot(4x^3-6x)-(x^4-3x^2)\cdot 2\cdot 2x}{(x^2-1)^3}$$

$$=\frac{4x^5-6x^3-4x^3+6x-4x^5+12x^3}{(x^2-1)^3}=\frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}=\frac{2x\cdot(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

– Notwendige Bedingung

$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2x\cdot(x^2+3)}{(x^2-1)^3}=0 \Leftrightarrow 2x\cdot(x^2+3)=0 \Leftrightarrow x=0$ (einf. mit VzW)

– Hinreichende Bedingung

Vorzeichentabelle für $f''(x)$

x	$-\infty$		-1		0		1	2	$+\infty$
$f''(x)$		$-$	| mit VzW Polst.	$+$	0 mit VzW WP	$-$	| mit VzW Polst.	$+$	

Vielfachheit der Polstelle von f'' beachten (hier dreifach).Testwert: $f''(2)=\frac{2\cdot 2^3+6\cdot 2}{(2^2-1)^3}=\frac{28}{27}>0$

W4, Seite 21 ; Fortsetzung von Nr. 27c

Angabe des Wendepunkts

Mit $f(0)=\frac{0^3}{0^2-1}=0$ ergibt sich $W(0|0)$.

- **Krümmungsintervalle** (siehe Vorzeichentabelle von $f''(x)$)

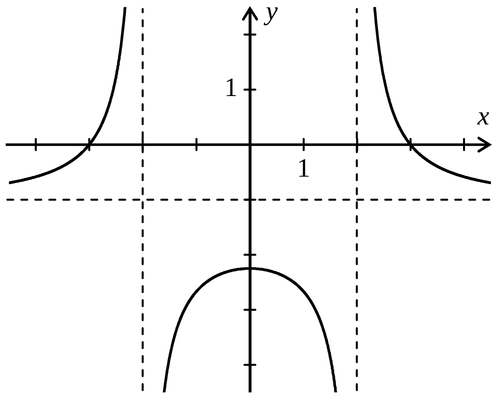
  G_f ist in $]-\infty;-1[$ und in $[0;1[$ rechtsgekrümmt.

  G_f ist in $]-1;0]$ und in $]1;+\infty[$ linksgekrümmt.

d) $f: D_{\max} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{9-x^2}{x^2-4}$; unecht gebrochenrational

- **Faktorisierung**: $f(x)=\frac{(3-x)\cdot(3+x)}{(x-2)\cdot(x+2)}$

Gegebener Graph



- **Maximale Definitionsmenge**: $D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$
- **Polstellen**: $x=-2$; $x=2$ (beide einfach, mit VzW)
- **Asymptote**

  Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} (-x^2+9) : (x^2-4) = -1+\frac{5}{x^2-4} \\ \underline{-(-x^2+4)} \\ \quad 0 + 5 \end{array}$$

  Zerlegung: $f(x)=\underbrace{-1}_{f_A(x)}+\underbrace{\frac{5}{x^2-4}}_{r(x)}$

  Asymptote: $f_A(x)=-1$ (waagerechte Asymptote)

  $\lim\limits_{x\to\pm\infty} r(x)=0^+$ und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_A(x)=-1^+$

- **Nullstellen**: $x=-3$; $x=3$ (beide einfach, mit VzW)

W4, Seite 21 ; Fortsetzung von Nr. 27d

- **Extrempunkte**
  - Erste Ableitung

$$f'(x)=\frac{(x^2-4)\cdot(-2x)-(9-x^2)\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{-2x^4+8x-18x+2x^3}{(x^2-4)^2}=\frac{-10x}{(x^2-4)^2}$$

  - Notwendige Bedingung

$$f'(x)=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{-10x}{(x^2-4)^2} \;\Leftrightarrow\; -10x=0 \;\Leftrightarrow\; x=0 \text{ (einfach, mit VzW)}$$

  - Hinreichende Bedingung

Vorzeichentabelle für $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		0	1	2		$+\infty$
$f'(x)$		+	| ohne VzW Polst.	+	0 mit VzW	–	| ohne VzW Polst.	–	

Vielfachheit der Polstelle von f' beachten (hier zweifach).

Testwert: $f'(1)=\frac{-10\cdot 1}{(1^2-4)^2}=-\frac{10}{9}<0$

Angabe des Extrempunkts

Mit $f(0)=\frac{9-0^2}{0^2-4}=-\frac{9}{4}=-2,25$ ergibt sich $H(0\,|\,-2,25)$.

- **Monotonieintervalle** (siehe Vorzeichentabelle von $f'(x)$)

f ist in $]-\infty\,;-2[$ und in $]-2\,;0]$ streng monoton wachsend.

f ist in $[0\,;2[$ und in $]2\,;+\infty[$ streng monoton fallend.

- **Wendepunkte**
  - Zweite Ableitung

$$f''(x)=\frac{(x^2-4)^2\cdot(-10)-(-10x)\cdot 2\cdot(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4}$$

$$=\frac{(x^2-4)\cdot(-10)-(-10x)\cdot 2\cdot 2x}{(x^2-4)^3}=\frac{-10x^2+40+40x^2}{(x^2-4)^3}$$

$$=\frac{30x^2+40}{(x^2-4)^3}=10\cdot\frac{3x^2+4}{(x^2-4)^3}$$

  - Notwendige Bedingung

$$f''(x)=0 \;\Leftrightarrow 10\cdot\frac{3x^2+4}{(x^2-4)^3}=0 \;\Leftrightarrow\; 3x^2+4=0 \text{ (nicht erfüllbar)}$$

Es liegen keine Wendepunkte vor.

W4, Seite 21 ; Fortsetzung von Nr. 27d

- **Krümmungsintervalle**

  Vorzeichentabelle für $f''(x)$

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	mit VzW Polst.		$-$		mit VzW Polst.	$+$	

Vielfachheit der Polstelle von f'' beachten (hier dreifach).

Testwert: $f''(1) = \frac{30 \cdot 1^2 + 40}{(1^2 - 4)^3} = -\frac{70}{27} < 0$

G_f ist in $]-\infty\,;-2[$ und in $]2\,;+\infty[$ linksgekrümmt.

G_f ist in $]-2\,;2[$ rechtsgekrümmt.

W4, Seite 22

28. a) Gegeben ist $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$ mit $D_{max}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

- **Faktorisierung**: $f(x)=\dfrac{-x}{(x-1)\cdot(x-1)}$
  - Nullstelle: $x = 0$ (einfach, mit VzW)
  - Polstelle: $x = 1$ (doppelt, ohne VzW)
- **Vorzeichentabelle für $f(x)$**

x	$-\infty$	-1	0		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0 mit VzW	$+$	ohne VzW Polst.	$+$	

Testwert: $f(-1)=-0,25<0$

- **Grenzwertverhalten an der Polstelle**
  $\lim\limits_{x\to 1^{\pm}} f(x)=+\infty$
- **Grenzwertverhalten für $x\to\pm\infty$**
  Ohne Polynomdivision ergibt sich die Zerlegung:

$$f(x)=\underbrace{0}_{f_A(x)}+\underbrace{\frac{x}{(x-1)^2}}_{r(x)}.$$

Asymptote: $f_A(x)=0$ (x-Achse)

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} r(x)=0^{\pm}$ und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_A(x)=0^{\pm}$

Das Nennerpolynom dominiert bei $r(x)$ wegen des höheren Grades über das Zählerpolynom.

- **Schnittpunkt von G_f mit der Asymptote**

$$r(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x}{(x-1)^2}=0 \Leftrightarrow x=0$$

Wegen $f_A(0)=0$ schneidet G_f die waagerechte Asymptote (x-Achse) im Punkt $S(0|0)$.

- **Extrempunkte**
  - Erste Ableitung

$$f'(x)=\frac{(x-1)^2\cdot 1-x\cdot 2\cdot(x-1)\cdot 1}{(x-1)^4}=\frac{x-1-2x}{(x-1)^3}=\frac{-x-1}{(x-1)^3}$$

  - Notwendige Bedingung

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-x-1}{(x-1)^3} \Leftrightarrow -x-1=0 \Leftrightarrow x=-1 \text{ (einfach, mit VzW)}$$

W4, Seite 22 ; Fortsetzung von Nr. 28 a

– Hinreichende Bedingung

Vorzeichentabelle für $f'(x)$

x	$-\infty$		-1	0	1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0 mit VzW TP	$+$	| mit VzW Polst.	$-$	

Vielfachheit der Polstelle von f' beachten (hier dreifach).
Testwert:
$f'(0)=\frac{-0-1}{(0-1)^3}=\frac{-1}{-1}=1>0$

Angabe des Extrempunkts

Mit $f(-1)=\frac{-1}{(-1-1)^2}=-0,25$ ergibt sich $T(-1|-0,25)$.

- **Wendepunkte**

– Zweite Ableitung

$$f''(x)=\frac{(x-1)^3\cdot(-1)-(-x-1)\cdot 3\cdot(x-1)^2\cdot 1}{(x-1)^6}=\frac{(x-1)\cdot(-1)+3x+3}{(x-1)^4}=\frac{2x+4}{(x-1)^4}$$

– Notwendige Bedingung

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2x+4}{(x-1)^4} \Leftrightarrow 2x+4=0 \Leftrightarrow x=-2 \text{ (einfach, mit VzW)}$$

– Hinreichende Bedingung

Vorzeichentabelle für $f''(x)$

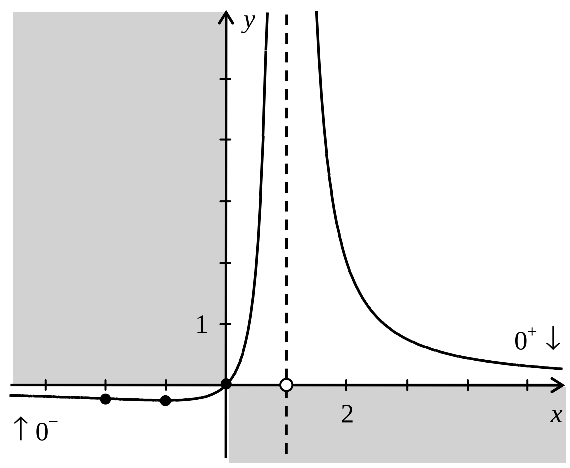
x	$-\infty$		-2	0	1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0 mit VzW WP	$+$	| ohne VzW Polst.	$+$	

Vielfachheit der Polstelle von f'' beachten (hier vierfach).
Testwert:
$f''(0)=\frac{2\cdot 0+4}{(0-1)^4}=\frac{4}{1}=4>0$

Angabe des Wendepunkts

Mit $f(-2)=\frac{-2}{(-2-1)^2}\approx-0,22$ ergibt sich $W(-2|-0,22)$.

- **Graph**



W4, Seite 22 ; Fortsetzung von Nr. 28

b) Gegeben ist $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2}$ mit $D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

- **Faktorisierung**: $f(x)=\dfrac{(x-1)\cdot(x-3)}{x^2}$
  - Nullstellen: $x=1$; $x=3$ (beide einfach, mit VzW)
  - Polstelle: $x=0$ (doppelt, ohne VzW)

- **Vorzeichentabelle für $f(x)$**

x	$-\infty$	-1	0		1		3	$+\infty$
$f(x)$		$+$	| ohne VzW Polst.	$+$	0 mit VzW	$-$	0 mit VzW	$+$

Testwert:
$f(-1)=\dfrac{(-1)^2-4\cdot(-1)+3}{(-1)^2}=\dfrac{8}{(-1)^2}>0$

- **Grenzwertverhalten an der Polstelle**

$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x)=\lim_{x\to 0^\pm}\frac{x^2-4x+3}{x^2}=+\infty$$

- **Grenzwertverhalten für $x\to\pm\infty$**

Polynomdivision

$$\begin{array}{l} (x^2-4x+3):x^2=1+\dfrac{-4x+3}{x^2} \\ \underline{-x^2} \\ \quad 0-4x+3 \end{array}$$

Es ergibt sich die Zerlegung: $f(x)=\underbrace{1}_{f_A(x)}+\underbrace{\dfrac{-4x+3}{x^2}}_{r(x)}$.

Asymptote: $f_A(x)=1$ (Parallele zur x-Achse)

$$\lim_{x\to\pm\infty} r(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-4x+3}{x^2}=0^{\mp} \text{ und } \lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty} f_A(x)=1^{\mp}$$

Das Nennerpolynom dominiert bei $r(x)$ wegen des höheren Grades über das Zählerpolynom.

- **Schnittpunkt von G_f mit der Asymptote**

$$r(x)=0 \iff \frac{-4x+3}{x^2}=0 \iff x=\frac{3}{4}=0{,}75$$

Wegen $f_A(\frac{3}{4})=1$ schneidet G_f die waagerechte Asymptote im Punkt $S(0{,}75\,|\,1)$.

- **Extrempunkte**
  - Erste Ableitung

$$f'(x)=\frac{x^2\cdot(2x-4)-(x^2-4x+3)\cdot 2x}{x^4}=\frac{x\cdot(2x-4)-(x^2-4x+3)\cdot 2}{x^3}$$
$$=\frac{2x^2-4x-2x^2+8x-6}{x^3}=\frac{4x-6}{x^3}$$

W4, Seite 22 ; Fortsetzung von Nr. 28 b

– Notwendige Bedingung

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{4x-6}{x^3} \Leftrightarrow 4x-6=0 \Leftrightarrow x=1{,}5 \text{ (einfach, mit VzW)}$$

– Hinreichende Bedingung

Vorzeichentabelle für $f'(x)$

x	$-\infty$		0	1	$1{,}5$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	❙ mit VzW Polst.	$-$	0 mit VzW TP	$+$	

Vielfachheit der Polstelle von f' beachten (hier dreifach).
Testwert:
$f'(1) = \frac{4\cdot 1-6}{1^3} = -2 < 0$

Angabe des Extrempunkts

Mit $f(1{,}5)=\frac{1{,}5^2-4\cdot 1{,}5+3}{1{,}5^2} \approx -0{,}33$ ergibt sich $T(1{,}5|-0{,}33)$.

- **Wendepunkte**

– Zweite Ableitung

$$f''(x)=\frac{x^3\cdot 4-(4x-6)\cdot 3\cdot x^2}{x^6}=\frac{4x-12x+18}{x^4}=\frac{-8x+18}{x^4}$$

– Notwendige Bedingung

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-8x+18}{x^4}=0 \Leftrightarrow -8x+18=0 \Leftrightarrow x=\frac{9}{4}=2{,}25 \text{ (einf. mit VzW)}$$

– Hinreichende Bedingung

Vorzeichentabelle für $f''(x)$

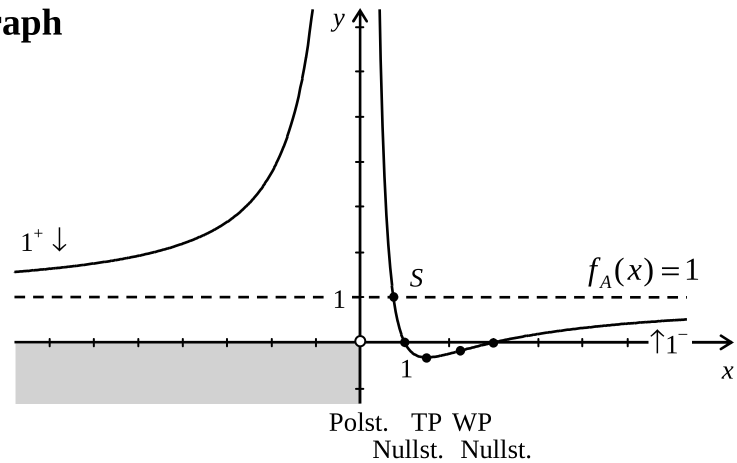
x	$-\infty$		0	1	$9/4$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	❙ ohne VzW Polst.	$+$	0 mit VzW WP	$-$	

Vielfachheit der Polstelle von f'' beachten (hier vierfach).
Testwert:
$f''(1) = \frac{(-8)\cdot 1+18}{1^4} = 10 > 0$

Angabe des Wendepunkts

Mit $f(2{,}25)=\frac{2{,}25^2-4\cdot 2{,}25+3}{2{,}25^2} \approx -0{,}19$ ergibt sich $W(2{,}25|-0{,}19)$.

- **Graph**



W4, Seite 22 ; Fortsetzung von Nr. 28

c) Gegeben ist $f(x)=\frac{0,25x^2}{x+1}$ mit $D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

- **Faktorisierung**: $f(x)=0,25\cdot\frac{x^2}{x+1}$
  - Nullstelle: $x=0$ (doppelt, ohne VzW)
  - Polstelle: $x=-1$ (einfach, mit VzW)
- **Vorzeichentabelle für $f(x)$**

x	$-\infty$		-1		0	1	$+\infty$
$f(x)$		$-$	| mit VzW Polst.	$+$	0 ohne VzW	$+$	

Testwert:
$f(1)=\frac{0,25\cdot 1^2}{1+1}=\frac{0,25}{2}=0,125>0$

- **Grenzwertverhalten an der Polstelle**

$$\lim_{x\to -1^\pm} f(x)=\lim_{x\to 0^\pm}\frac{0,25\cdot x^2}{x+1}=\pm\infty$$

- **Grenzwertverhalten für $x\to\pm\infty$**

Polynomdivision

$$\begin{array}{l} 0,25x^2 : (x+1)=0,25x-0,25+\frac{0,25}{(x+1)} \\ \underline{-(0,25x^2+0,25x)} \\ \quad -0,25x \\ \quad \underline{-(0,25x-0,25)} \\ \qquad +0,25 \end{array}$$

Es ergibt sich die Zerlegung: $f(x)=\underbrace{0,25x-0,25}_{f_A(x)}+\underbrace{\frac{0,25}{(x+1)}}_{r(x)}$.

Asymptote: $f_A(x)=0,25x-0,25$ (schiefe Gerade)

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} r(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{0,25}{x+1}=0^\pm$ und

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_A(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(0,25x-0,25)=\pm\infty$

Das Nennerpolynom dominiert bei $r(x)$ wegen des höheren Grades über das Zählerpolynom.

- **Schnittpunkt von G_f mit der Asymptote**

$r(x)=0 \Leftrightarrow \frac{0,25}{x+1}=0$ (unerfüllbar)

Es gibt keinen Schnittpunkt von G_f mit der schiefen Asymptote.

- **Extrempunkte**
  - Erste Ableitung

$$f'(x)=0,25\cdot\frac{(x+1)\cdot 2x-x^2\cdot 1}{(x+1)^2}=0,25\cdot\frac{2x^2+2x-x^2}{(x+1)^2}=0,25\cdot\frac{x\cdot(x+2)}{(x+1)^2}$$

W4, Seite 22 ; Fortsetzung von Nr. 28 c

– Notwendige Bedingung

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 0{,}25\cdot\frac{x\cdot(x+2)}{(x+1)^2} \Leftrightarrow x=0 \vee x+2=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x=0}_{\text{einfach, mit VzW}} \vee \underbrace{x=-2}_{\text{einfach, mit VzW}}$$

– Hinreichende Bedingung

Vorzeichentabelle für $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		-1		0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 mit VzW HP	–	❙ ohne VzW Polst.	–	0 mit VzW TP	+	

Vielfachheit der Polstelle von f' beachten (hier doppelt).

Testwert: $f'(1)=0{,}25\cdot\frac{1\cdot(1+2)}{(1+1)^2}=0{,}25\cdot\frac{3}{4}>0$

Angabe der Extrempunkte

Mit $f(-2)=\frac{0{,}25\cdot(-2)^2}{-2+1}=-1$ ergibt sich $H(-2\,|\,-1)$.

Mit $f(0)=\frac{0{,}25\cdot 0^2}{0+1}=0$ ergibt sich $T(0\,|\,0)$.

- **Wendepunkte**

– Zweite Ableitung

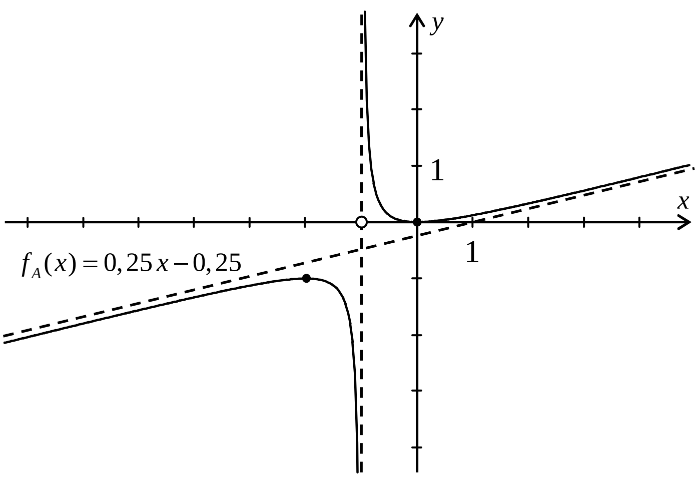
$$f''(x)=0{,}25\cdot\frac{(x+1)^2\cdot(2x+2)-(x^2+2x)\cdot 2\cdot(x+1)\cdot 1}{(x+1)^4}$$

$$=0{,}25\cdot\frac{(x+1)\cdot(2x+2)-(2x^2+4x)}{(x+1)^3}$$

$$=0{,}25\cdot\frac{2x^2+2x+2x+2-2x^2-4x}{(x+1)^3}=0{,}25\cdot\frac{2}{(x+1)^3}\neq 0$$

Es gibt keine Wendepunkte.

- **Graph**



HP Polst. Nullst. = TP

W4, Seite 22

29. Gegeben ist die Funktion $f: D_{\max} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \frac{x^2-5}{x-3}$ mit $D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

- **Faktorisierung**: $f(x) = \frac{(x+\sqrt{5})\cdot(x-\sqrt{5})}{x-3}$
  - Nullstellen: $x = -\sqrt{5} \approx -2{,}34$; $x = \sqrt{5} \approx 2{,}34$ (beide einfach, mit VzW)
  - Polstelle: $x = 3$ (einfach, mit VzW)
- **Vorzeichentabelle für $f(x)$**

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$	0	$\sqrt{5}$		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0 mit VzW	$+$	0 mit VzW	$-$	| mit VzW Polst.	$+$	

Testwert: $f(0) = \frac{0^2-5}{0-3} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3} > 0$

- **Grenzwertverhalten an der Polstelle**

$$\lim_{x\to 3^\pm} f(x) = \lim_{x\to 3^\pm} \frac{x^2-5}{x-3} = \pm\infty$$

- **Grenzwertverhalten für $x \to \pm\infty$**
  Polynomdivision

$$\begin{array}{l} (x^2 \quad\quad -5) : (x-3) = x+3+\frac{4}{x-3} \\ \underline{-(x^2-3x)} \\ \quad 0 \;+3x-5 \\ \quad\quad \underline{-(3x-9)} \\ \quad\quad\quad\quad 4 \end{array}$$

Es ergibt sich die Zerlegung: $f(x) = \underbrace{x+3}_{f_A(x)} + \underbrace{\frac{4}{(x-3)}}_{r(x)}$.

Asymptote: $f_A(x) = x+3$ (schiefe Gerade)

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} r(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x-3} = 0^\pm$ und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f_A(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (x+3) = \pm\infty$

- **Extrempunkte**
  - Erste Ableitung

$$f'(x) = \frac{(x-3)\cdot 2x-(x^2-5)\cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{2x^2-6x-x^2+5}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2} = \frac{(x-1)\cdot(x-5)}{(x-3)^2}$$

  - Notwendige Bedingung

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)\cdot(x-5)}{(x-3)^2} = 0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot(x-5) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x=1}_{\text{einfach, mit VzW}} \vee \underbrace{x=5}_{\text{einfach, mit VzW}}$$

W4, Seite 22 ; Fortsetzung von Nr. 29

– Hinreichende Bedingung

Vorzeichentabelle für $f'(x)$

x	$-\infty$	0	1		3		5	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 mit VzW HP	–	| ohne VzW Polst.	–	0 mit VzW TP	+	

Vielfachheit der Polstelle von f' beachten (hier doppelt).

Testwert: $f'(0) = \frac{(0-1)\cdot(0-5)}{(0-3)^2} = \frac{5}{9} > 0$

Angabe der Extrempunkte

Mit $f(1) = \frac{1^2-5}{1-3} = 2$ ergibt sich $H(1|2)$.

Mit $f(5) = \frac{5^2-5}{5-3} = 10$ ergibt sich $T(5|10)$.

- **Wendepunkte**

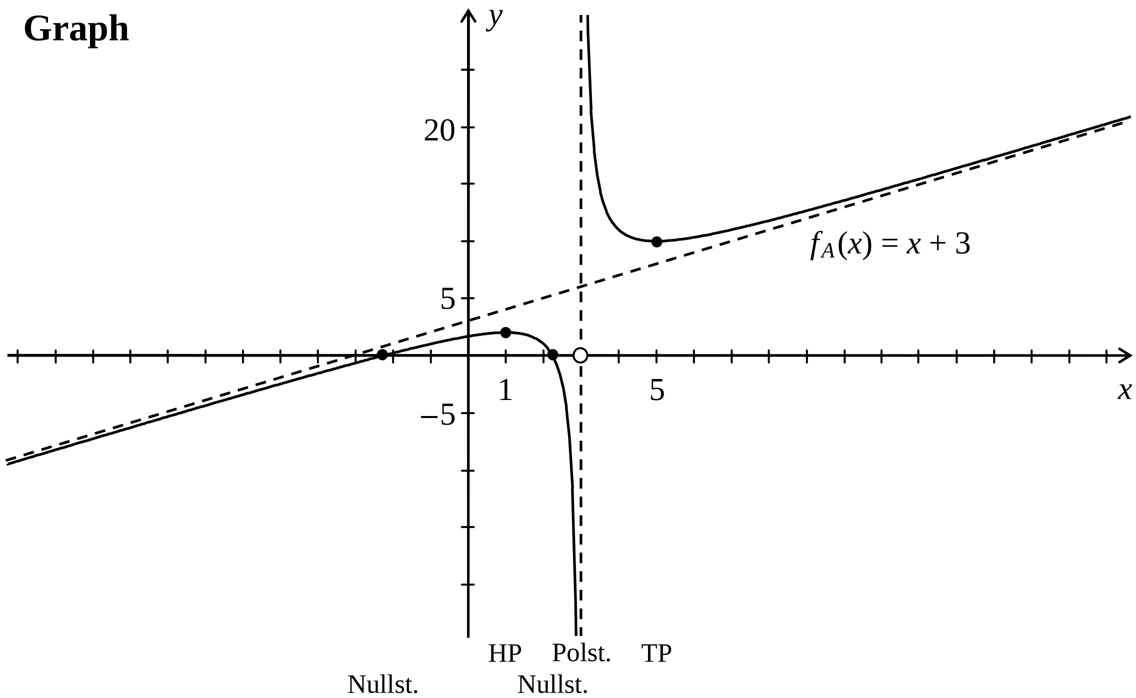
$$f''(x) = \frac{(x-3)^2\cdot(2x-6)-(x^2-6x+5)\cdot 2\cdot(x-3)\cdot 1}{(x-3)^4}$$

$$= \frac{(x-3)\cdot(2x-6)-(x^2-6x+5)\cdot 2}{(x-3)^3} = \frac{2x^2-12x+18-2x^2+12x-10}{(x-3)^3}$$

$$= \frac{8}{(x-3)^3}$$

Wegen $f''(x) = \frac{8}{(x-3)^3} \neq 0$ für alle $x \in D_{max} = \mathbb{R}\setminus\{3\}$ hat die Funktion keine Wendepunkte.

- **Graph**



W4, Seite 22

30. Gegeben ist die Funktion $f: D_{\max} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{4x - x^3}{x^2 - 1}$ mit $D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$.

a) Null- und Polstellen

– Faktorisierung: $f(x) = \dfrac{x \cdot (4 - x^2)}{(x-1)\cdot(x+1)} = -\dfrac{x \cdot (x^2 - 4)}{(x-1)\cdot(x+1)} = -\dfrac{x\cdot(x-2)\cdot(x+2)}{(x-1)\cdot(x+1)}$

– Nullstellen: $x = -2$; $x = 0$; $x = 2$ (alle einfach, mit VzW)

– Polstellen: $x = -1$; $x = 1$ (beide einfach, mit VzW)

b) Symmetrie

Es ist $f(-x) = \dfrac{4\cdot(-x) - (-x)^3}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{-4x + x^3}{x^2 - 1} = -\dfrac{4x - x^3}{x^2 - 1} = -f(x)$ für alle $x \in D_{\max}$.

G_f ist also punktsymmetrisch zum Ursprung.

c) Zerlegung des Funktionsterms und Grenzwertverhalten für $x \to \pm\infty$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} (-x^3 + 4x) : (x^2 - 1) = -x + \dfrac{3x}{x^2+1} \\ \underline{-(-x^3 + \ \ x)} \\ \quad 0 \ \ + 3x \end{array}$$

Asymptote: $f_A(x) = -x$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x - x^3}{x^2 - 1} = \lim_{x\to\pm\infty} (-x) = \mp\infty$$

(Zählergrad ist um 1 größer als der Nennergrad)

d) Extrempunkte und Monotonieintervalle

– Erste Ableitung

$$f'(x) = \frac{(x^2-1)\cdot(4-3x^2) - (4x - x^3)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{4x^2 - 3x^4 - 4 + 3x^2 - 8x^2 + 2x^4}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{-x^4 - x^2 - 4}{(x^2-1)^2} = -\frac{x^4 + x^2 + 4}{(x^2-1)^2}$$

– Notwendige Bedingung

$$f'(x) = 0 \iff -\frac{x^4 + x^2 + 4}{(x^2-1)^2} = 0 \iff x^4 + x^2 + 4 = 0 \quad \text{(unerfüllbar)}$$

f hat keine Extrempunkte.

Weiterhin gilt: $-\dfrac{x^4 + x^2 + 4}{(x^2-1)^2} < 0$ in $D_{\max}$.

Daraus ergibt sich (Polstellen beachten):

f ist in $]-\infty; -1[$, in $]-1;1[$ und in $]1-\infty; +\infty[$ streng monoton fallend.

W4, Seite 22 ; Fortsetzung von Nr. 30

e) Wendepunkte des Graphen

– Zweite Ableitung

$$f''(x)=\frac{(x^2-1)^2\cdot(-4x^3-2x)-(-x^4-x^2-4)\cdot 2\cdot(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}$$

$$=\frac{(x^2-1)\cdot(-4x^3-2x)-(-x^4-x^2-4)\cdot 2\cdot 2x}{(x^2-1)^3}$$

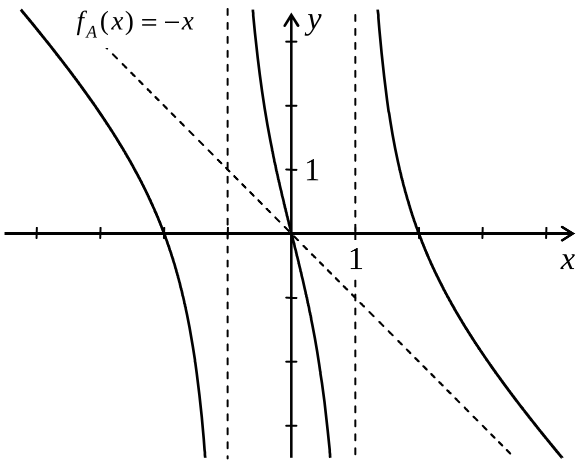
$$=\frac{-4x^5-2x^3+4x^3+2x+4x^5+4x^3+16x}{(x^2-1)^3}=\frac{6x^3+18x}{(x^2-1)^3}=\frac{6x\cdot(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

– Notwendige Bedingung

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{6x\cdot(x^2+3)}{(x^2-1)^3}=0 \Leftrightarrow 6x\cdot(x^2+3)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ (einf. mit VzW)}$$

Mit $f(0)=0$ ergibt sich der Wendepunkt $W(0|0)$.

f) Graph



g) Abstand des Graphen zur Asymptote kleiner als 0,8 für $x>1$

Für den Abstand des Graphen von der Asymptote gilt: $d=|r(x)|=\left|\frac{3x}{x^2-1}\right|$.

Dieser Abstand soll kleiner als 0,8 sein.

Also ist die Ungleichung $\left|\frac{3x}{x^2-1}\right|<0{,}8$ für $x>1$ zu lösen.

$$\left|\frac{3x}{x^2-1}\right|<\frac{4}{5} \overset{x>1}{\Leftrightarrow} \frac{3x}{x^2-1}<\frac{4}{5} \Leftrightarrow 15x<4x^2-4 \Leftrightarrow 4x^2-15x-4>0$$

$$\Leftrightarrow x^2-\frac{15}{4}x>1 \Leftrightarrow \left(x^2-\frac{15}{8}\right)^2>1+\frac{225}{64} \Leftrightarrow \left(x-\frac{15}{8}\right)^2>\frac{289}{64}$$

$$\Leftrightarrow x-\frac{15}{8}<-\frac{17}{8} \vee x-\frac{15}{8}>\frac{17}{8} \Leftrightarrow x<-\frac{2}{8} \vee x>\frac{32}{8} \Leftrightarrow \underbrace{x<-\frac{1}{4}}_{\text{entfällt, da n.Vor. } x>1} \vee x>4$$

Ergebnis: Für $x>4$ ist der Abstand des Graphen von der Asymptote $<0{,}8$.

W4, Seite 22

31. Gegeben ist die Funktion $f: D_{f_{\max}} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \dfrac{x^2-4}{x^2+1}$; $D_{f_{\max}} = \mathbb{R}$.

a) Null- und Polstellen

- Faktorisierung: $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+1} = \dfrac{(x-2)\cdot(x+2)}{x^2+1}$
- Maximale Definitionsmenge: $D_{f_{\max}} = \mathbb{R}$
- Nullstellen: $x=-2$; $x=2$ (beide einfach, mit VzW)
- Polstellen: keine ($x^2+1 \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$)

b) Zerlegung des Funktionsterms und Grenzwertverhalten für $x \to \pm\infty$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} (x^2-4) : (x^2+1) = 1 + \dfrac{-5}{x^2+1} \\ \underline{-(x^2+1)} \\ \quad 0 \ \ -5 \end{array}$$

Asymptote: $f_A(x) = 1$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-4}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{-5}{x^2+1}\right) = 1^-$$

c) Extrempunkte

- Erste Ableitung

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)\cdot 2x-(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3+2x-2x^3+8x}{(x^2+1)^2} = \frac{10x}{(x^2+1)^2}$$

- Notwendige Bedingung

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{10x}{(x^2+1)^2}=0 \Leftrightarrow 10x=0 \Leftrightarrow x=0 \quad \text{(einfach, mit VzW)}$$

0 ist Nullstelle von f' mit VzW der Form $-0+$, also Minimumstelle.

(Testwert: $f'(-1) = \dfrac{10\cdot(-1)}{((-1)^2+1)^2} = \dfrac{-10}{4} = -\dfrac{5}{2} < 0$)

Mit $f(0) = \dfrac{0^2-4}{0^2+1} = -4$ ergibt sich der Tiefpunkt $T(0\,|\,-4)$.

d) Betrachtet wird $g: D_{g_{\max}} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \dfrac{1}{f(x)}$. Es ist $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$.

- Maximale Definitionsmenge: $D_{g_{\max}} = \mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$

  Die Nullstellen von f sind die Definitionslücken von g.
- Waagerechte Asymptote: $g_A = 1$ (Zählergrad = Nennergrad)
- Polstellen von g: $x=-2$ und $x=2$

  Die Nullstellen von f sind die Polstellen von g.
- Nullstellen von g: g hat keine Nullstellen, da f keine Definitionslücken hat.

W4, Seite 22 ; Fortsetzung von Nr. 31

– Extrempunkte
Erste Ableitung

$$g'(x)=\frac{(x^2-4)\cdot 2x-(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{2x^3-8x-2x^3-2x}{(x^2-4)^2}=\frac{-10x}{(x^2-4)^2}$$

Notwendige Bedingung

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-10x}{(x^2-4)^2}= \Leftrightarrow -10x=0 \Leftrightarrow x=0$$

0 ist Nullstelle von g' mit VzW der Form $+0-$, also Maximumstelle.

(Testwert: $g'(1)=-\frac{10\cdot 1}{(1^2-4)^2}=-\frac{10}{9}<0$)

Mit $g(0)=\frac{0^2+1}{0^2-4}=-\frac{1}{4}=-0{,}25$ ergibt sich der Hochpunkt $H(0\,|-0{,}25)$.

e) Schnittpunkte der Graphen von f und g
Zu lösen ist die Gleichung $f(x)=g(x)$ mit $x\neq -2;2$.

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x^2+1}=\frac{x^2+1}{x^2-4} \Leftrightarrow (x^2-4)^2=(x^2+1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2-4=-(x^2+1)^2 \vee x^2-4=x^2+1$$

$$\Leftrightarrow x^2-4=-(x^2+1) \vee x^2-4=x^2+1 \text{ (unerfüllbar)}$$

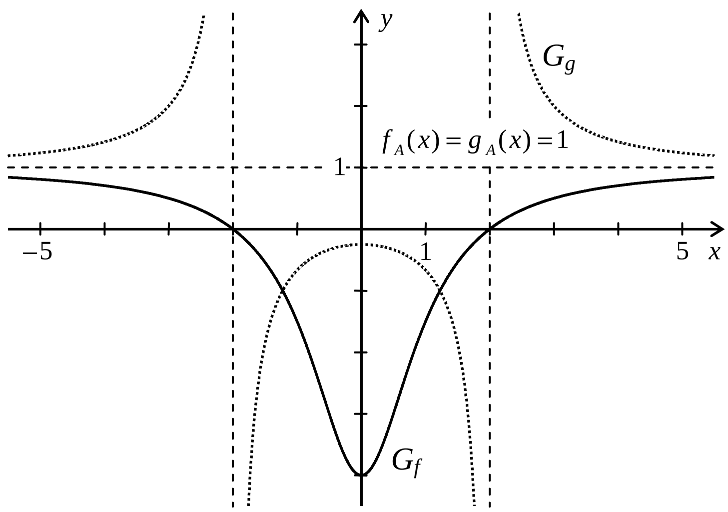
$$\Leftrightarrow x^2-4=-x^2-1 \Leftrightarrow 2x^2=3$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{3}{2} \Leftrightarrow x=-\sqrt{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6} \vee x=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}$$

Mit $f(\pm\sqrt{3/2})=\frac{(\pm\sqrt{1{,}5})^2-4}{(\pm\sqrt{1{,}5})^2+1}=\frac{1{,}5-4}{1{,}5+1}=-1$ erhält man die Schnittpunkte

$S_1\left(-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\,|-1\right)$ und $S_2\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\,|-1\right)$.

f) Graphen G_f und G_g



W4, Seite 27

W 4.6 Behebbare Definitionslücken

32. a) $f(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{x+2}=\dfrac{(x+2)^2}{x+2}=x+2 \quad ; \quad D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

Gekürzter Term: $\overline{f}(x)=x+2$ für alle $x\in\mathbb{R}$

$\overline{f}$ ist an der Stelle $x_0=-2$ mit $\overline{f}(-2)=0$ definiert.

Stetige Fortsetzung: $\overline{f}(x)=\begin{cases} f(x) & \text{, wenn } x_0\neq -2 \\ 0 & \text{, wenn } x_0=-2 \end{cases}$

b) $f(x)=\dfrac{3x^2-15x}{x-5}=\dfrac{3x\cdot(x-5)}{x-5}=3x \quad ; \quad D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{5\}$

Gekürzter Term: $\overline{f}(x)=3x$ für alle $x\in\mathbb{R}$

$\overline{f}$ ist an der Stelle $x_0=5$ mit $\overline{f}(5)=15$ definiert.

Stetige Fortsetzung: $\overline{f}(x)=\begin{cases} f(x) & \text{, wenn } x_0\neq 5 \\ 15 & \text{, wenn } x_0=5 \end{cases}$

c) $f(x)=\dfrac{x^3+3x-10}{x-2}=\dfrac{(x+5)\cdot(x-2)}{x-2}=x+5 \quad ; \quad D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

Gekürzter Term: $\overline{f}(x)=x+5$ für alle $x\in\mathbb{R}$

$\overline{f}$ ist an der Stelle $x_0=5$ mit $\overline{f}(5)=7$ definiert.

Stetige Fortsetzung: $\overline{f}(x)=\begin{cases} f(x) & \text{, wenn } x_0\neq 2 \\ 7 & \text{, wenn } x_0=2 \end{cases}$

d) $f(x)=\dfrac{x^3-x^2}{x-1}+1=\dfrac{x^2\cdot(x-1)}{x-1}+1=x^2+1 \quad ; \quad D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Gekürzter Term: $\overline{f}(x)=x^2+1$ für alle $x\in\mathbb{R}$

$\overline{f}$ ist an der Stelle $x_0=1$ mit $\overline{f}(1)=2$ definiert.

Stetige Fortsetzung: $\overline{f}(x)=\begin{cases} f(x) & \text{, wenn } x_0\neq 1 \\ 2 & \text{, wenn } x_0=1 \end{cases}$

W4, Seite 27

33. a) $x_1 = -1$; $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 1{,}5$; behebbare Lücke mit $f(-1) = 1{,}5$

$x_2 = 1$; $\lim\limits_{x \to 1^{\pm}} f(x) = \mp\infty$; Polstelle mit VzW

b) $x_1 = 2$; $\lim\limits_{x \to 2^{\pm}} f(x) = +\infty$; Polstelle ohne VzW

$x_1 = 3$; $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 2$; behebbare Lücke mit $f(3) = 2$

c) $x_1 = -1$; $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$; Polstelle ohne VzW

$x_2 = 2$; $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0$; behebbare Lücke mit $f(2) = 0$

d) $x_1 = -1$; $\lim\limits_{x \to -1^{\pm}} f(x) = \mp\infty$; Polstelle mit VzW

$x_2 = 2$; $\lim\limits_{x \to 2^{-}} f(x) = 0{,}2$ und $\lim\limits_{x \to 2^{+}} f(x) = 2$; hier liegt eine nichtbehebbare Definitionslücke vor, weil der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ nicht existiert.

34. a) $f(x) = \dfrac{16 - x^2}{x+4} = \dfrac{(4-x)\cdot(4+x)}{x+4} = 4 - x$; $D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$

$\lim\limits_{x \to -4} f(x) = 8$; behebbare Lücke mit $f(-4) = 8$

b) $f(x) = \dfrac{3x}{x-3}$; $D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$\lim\limits_{x \to 3^{\pm}} f(x) = \pm\infty$; Polstelle

c) $f(x) = \dfrac{2x - x^2}{x-2} = \dfrac{x\cdot(2-x)}{x-2} = -x$; $D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -2$; behebbare Lücke mit $f(2) = -2$

d) $f(x) = \dfrac{9 - 6x + x^2}{x^2 - 9} = \dfrac{(x-3)^2}{(x-3)\cdot(x+3)} = \dfrac{(x-3)}{(x+3)}$; $D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$

$\lim\limits_{x \to -3^{\pm}} f(x) = \pm\infty$; Polstelle mit VzW

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0$; behebbare Lücke mit $f(3) = 0$

W4, Seite 31

W 4.7 Integration gebrochenrationaler Funktionen

35. a) $f(x)=\frac{3}{3x+1}$ $\quad D_{max}=\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{3}\}$ $\quad F(x)=\ln|3x+1|$

b) $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ $\quad D_{max}=\mathbb{R}$ $\quad F(x)=\ln|x^2+1|$

c) $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+2}$ $\quad F(x)=\ln|x^2+x+2|$

$x^2+x+2=0$

$\Leftrightarrow x^2+x+\frac{1}{4}=-2+\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{7}{4}$

(unerfüllbar)

$D_{max}=\mathbb{R}$

d) $f(x)=\frac{1}{5x-3}=\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{5x-3}$ $\quad D_{max}=\mathbb{R}\setminus\{\frac{3}{5}\}$ $\quad F(x)=\frac{1}{5}\cdot\ln|5x-3|$

e) $f(x)=\frac{2x}{x^2+5}$ $\quad D_{max}=\mathbb{R}$ $\quad F(x)=\ln|x^2+5|$

f) $f(x)=1+\frac{1}{x-1}$ $\quad D_{max}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ $\quad F(x)=x+\ln|x-1|$

36. a) $\int_0^1 \frac{1}{4x+7}dx=\frac{1}{4}\cdot\int_0^1\frac{4}{4x+7}dx=\frac{1}{4}\cdot\left[\ln|4x+7|\right]_0^1=\frac{1}{4}\cdot\left(\ln(11)-\ln(7)\right)=\frac{1}{4}\cdot\ln\left(\frac{11}{7}\right)$

b) $\int_1^2 \frac{2}{2x-1}dx=\left[\ln|2x-1|\right]_1^2=\ln(3)-\underbrace{\ln(1)}_{=0}=\ln(3)$

c) $\int_1^2 \frac{2x-1}{x^2-x}dx=\left[\ln|x^2-x|\right]_2^3=\ln(6)-\ln(2)=\ln\left(\frac{6}{2}\right)=\ln(3)$

d) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+4}dx=\frac{1}{2}\cdot\int_0^1\frac{2x}{x^2+4}dx=\frac{1}{2}\cdot\left[\ln|x^2+4|\right]_0^1=\frac{1}{2}\cdot\left(\ln(5)-\ln(4)\right)=\frac{1}{2}\cdot\ln(1,25)$

W4, Seite 31

37. a) $f(x)=\frac{x+1}{x+2}$; $D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

$f(x)=\frac{x+1}{x+2}=1-\frac{1}{x+2}$

$F(x)=x-\ln|x+2|$

Polynomdivision durch (x + 2)

$$\begin{array}{l}(x+1):(x+2)=1-\frac{1}{x+2}\\ \underline{-(x+2)}\\ \quad -1\end{array}$$

b) $f(x)=\frac{x+1}{x-4}$; $D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{4\}$

$f(x)=\frac{x+1}{x-4}=1+\frac{5}{x-4}=1+5\cdot\frac{1}{x-4}$

$F(x)=x+5\cdot\ln|x-4|$

Polynomdivision durch (x – 4)

$$\begin{array}{l}(x+1):(x-4)=1+\frac{5}{x-4}\\ \underline{-(x-4)}\\ \quad 5\end{array}$$

c) $f(x)=\frac{2x}{x+3}$; $D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

$f(x)=\frac{2x}{x+3}=2-\frac{6}{x+3}=2-6\cdot\frac{1}{x+3}$

$F(x)=2x-6\cdot\ln|x+3|$

Polynomdivision durch (x + 3)

$$\begin{array}{l}2x \quad : (x+3)=2-\frac{6}{x+3}\\ \underline{-(2x+6)}\\ \quad -6\end{array}$$

38. a) $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$

1. *Zerlegung des Nenners in Linearfaktoren*
   Nach der 3. binomischen Formel gilt: $x^2-4=(x-2)\cdot(x+2)$.

2. *Ansatz mit Einzelbrüchen*

$$\frac{1}{(x-2)\cdot(x+2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2} \underset{\cdot(x-2)\cdot(x+2)}{\Leftrightarrow} 1=A\cdot(x+2)+B\cdot(x-2)$$

3. *Bestimmung der Konstanten A und B*
   Einsetzen der Nennernullstellen x = 2 und x = –2

$x=2:\quad 1=A\cdot 4+B\cdot 0 \;\Leftrightarrow\; A=\frac{1}{4}$

$x=-2:\quad 1=A\cdot 0+B\cdot(-4) \;\Leftrightarrow\; B=-\frac{1}{4}$

Dies liefert die Zerlegung:

$$f(x)=\frac{1}{x^2-4}=\frac{\frac{1}{4}}{x-2}+\frac{-\frac{1}{4}}{x+2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+2}.$$

Daraus ergibt sich ein Stammfunktionsterm:

$$F(x)=\frac{1}{4}\cdot\ln|x-2|-\frac{1}{4}\cdot\ln|x+2|=\frac{1}{4}\cdot\left(\ln|x-2|-\ln|x+2|\right).$$

W4, Seite 31 ; Fortsetzung von Nr. 38

b) $f(x)=\frac{3}{x^2-9}$

1. *Zerlegung des Nenners in Linearfaktoren*
   Nach der 3. binomischen Formel gilt: $x^2-9=(x-3)\cdot(x+3)$.
2. *Ansatz mit Einzelbrüchen*
   $$\frac{3}{(x-3)\cdot(x+3)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+3} \underset{\cdot(x-3)\cdot(x+3)}{\Leftrightarrow} 3=A\cdot(x+3)+B\cdot(x-3)$$
3. *Bestimmung der Konstanten A und B*
   Einsetzen der Nennernullstellen x = 3 und x = −3
   $x=3$: $3=A\cdot 6+B\cdot 0 \Leftrightarrow A=\frac{1}{2}$
   $x=-3$: $3=A\cdot 0+B\cdot(-6) \Leftrightarrow B=-\frac{1}{2}$

Dies liefert die Zerlegung:

$$f(x)=\frac{1}{x^2-9}=\frac{\frac{1}{2}}{x-3}+\frac{-\frac{1}{2}}{x+3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+3}.$$

Daraus ergibt sich ein Stammfunktionsterm:

$$F(x)=\frac{1}{2}\cdot\ln|x-3|-\frac{1}{2}\cdot\ln|x+3|=\frac{1}{2}\cdot\left(\ln|x-3|-\ln|x+3|\right).$$

c) $f(x)=\frac{1}{x^2-x}$

1. *Zerlegung des Nenners in Linearfaktoren*
   $x^2-x=x\cdot(x-1)$
2. *Ansatz mit Einzelbrüchen*
   $$\frac{1}{x\cdot(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1} \underset{\cdot x\cdot(x-1)}{\Leftrightarrow} \Leftrightarrow 1=A\cdot(x-1)+B\cdot x$$
3. *Bestimmung der Konstanten A und B*
   Einsetzen der Nennernullstellen x = 0 und x = 1
   $x=0$: $1=A\cdot(-1)+B\cdot 0 \Leftrightarrow A=-1$
   $x=1$: $1=A\cdot 0+B\cdot 1 \Leftrightarrow B=1$

Dies liefert die Zerlegung:

$$f(x)=\frac{1}{x^2-x}=\frac{-1}{x}+\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}.$$

Daraus ergibt sich ein Stammfunktionsterm:

$$F(x)=-\ln|x|-\ln|x-1|.$$

W4, Seite 31 ; Fortsetzung von Nr. 38

d) $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - x - 12}$

1. *Zerlegung des Nenners in Linearfaktoren*
   Nach der Zerlegungsformel gilt: $x^2 - x - 12 = (x-4)\cdot(x+3)$.

2. *Ansatz mit Einzelbrüchen*
   $$\frac{2}{(x-4)\cdot(x+3)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+3} \underset{\cdot(x-4)\cdot(x+3)}{\Leftrightarrow} 2 = A\cdot(x+3) + B\cdot(x-4)$$

3. *Bestimmung der Konstanten A und B*
   Einsetzen der Nennernullstellen $x = 4$ und $x = -3$
   $x = 4:\quad 2 = A\cdot 7 + B\cdot 0 \Leftrightarrow A = \frac{2}{7}$
   $x = -3:\quad 2 = A\cdot 0 + B\cdot(-7) \Leftrightarrow B = -\frac{2}{7}$

Dies liefert die Zerlegung:
$$f(x) = \frac{2}{x^2 - x - 12} = \frac{\frac{2}{7}}{x-4} + \frac{-\frac{2}{7}}{x+3} = \frac{2}{7}\cdot\frac{1}{x-4} - \frac{2}{7}\cdot\frac{1}{x+3}.$$

Daraus ergibt sich ein Stammfunktionsterm:
$$F(x) = \frac{2}{7}\cdot\ln|x-4| - \frac{2}{7}\cdot\ln|x+3| = \frac{2}{7}\cdot\left(\ln|x-4| - \ln|x+3|\right).$$

e) $f(x) = \dfrac{5x+12}{x^2 + 5x + 6}$

1. *Zerlegung des Nenners in Linearfaktoren*
   Nach der Zerlegungsformel gilt: $x^2 + 5x + 6 = (x+3)\cdot(x+2)$.

2. *Ansatz mit Einzelbrüchen*
   $$\frac{5x+12}{(x+3)\cdot(x+2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+2} \underset{\cdot(x+3)\cdot(x+2)}{\Leftrightarrow} 5x+12 = A\cdot(x+2) + B\cdot(x+3)$$

3. *Bestimmung der Konstanten A und B*
   Einsetzen der Nennernullstellen $x = -3$ und $x = -2$
   $x = -3:\quad -3 = A\cdot(-1) + B\cdot 0 \Leftrightarrow A = 3$
   $x = -2:\quad 2 = A\cdot 0 + B\cdot 1 \Leftrightarrow B = 2$

Dies liefert die Zerlegung:
$$\frac{5x+12}{(x+3)\cdot(x+2)} = \frac{3}{x+3} + \frac{2}{x+2} = 3\cdot\frac{1}{x+3} + 2\cdot\frac{1}{x+2}.$$

Daraus ergibt sich ein Stammfunktionsterm:
$F(x) = 3\cdot\ln|x+3| + 2\cdot\ln|x+2|.$

W4, Seite 31 ; Fortsetzung von Nr. 38

f) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-4x-5}$

1. *Zerlegung des Nenners in Linearfaktoren*
   Nach der Zerlegungsformel gilt: $x^2-4x-5=(x-5)\cdot(x+1)$.
2. *Ansatz mit Einzelbrüchen*
   $$\frac{2x-1}{(x-5)\cdot(x+1)}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x+1} \underset{\cdot(x-5)\cdot(x+1)}{\Leftrightarrow} 2x-1=A\cdot(x+1)+B\cdot(x-5)$$
3. *Bestimmung der Konstanten A und B*
   Einsetzen der Nennernullstellen $x = 5$ und $x = -1$
   $x=5:\quad 9=A\cdot 6+B\cdot 0 \Leftrightarrow A=\frac{3}{2}$
   $x=-1:\quad -3=A\cdot 0+B\cdot(-6) \Leftrightarrow B=\frac{1}{2}$

Dies liefert die Zerlegung:

$$\frac{2x-1}{(x-5)\cdot(x+1)}=\frac{\frac{3}{2}}{x-5}+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}.$$

Daraus ergibt sich ein Stammfunktionsterm:

$$F(x)=\frac{3}{2}\cdot\ln|x-5|+\frac{1}{2}\cdot\ln|x+1|.$$

39. a) $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$; $D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$

$$f(x)=f(x)=\frac{2x^2}{x^2-1}=2+\frac{2}{x^2-1}$$

Polynomdivision durch (x^2-1)

$$\begin{array}{l} 2x^2 \qquad :(x^2-1)=2+\dfrac{2}{x^2-1} \\ \underline{-(2x^2-2)} \\ \qquad 2 \end{array}$$

Partialbruchzerlegung

1. *Zerlegung des Nenners in Linearfaktoren*
   Nach der 3. binomischen Formel gilt: $x^2-1=(x-1)\cdot(x+1)$.
2. *Ansatz mit Einzelbrüchen*
   $$\frac{2}{(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1} \underset{\cdot(x-1)\cdot(x+1)}{\Leftrightarrow} 2=A\cdot(x+1)+B\cdot(x-1)$$
3. *Bestimmung der Konstanten A und B*
   Einsetzen der Nennernullstellen $x = 1$ und $x = -1$
   $x=1:\quad 2=A\cdot 2+B\cdot 0 \Leftrightarrow A=1$
   $x=-1:\quad 2=A\cdot 0+B\cdot(-2) \Leftrightarrow B=-1$

Dies liefert insgesamt die Zerlegung:

$$\frac{2x^2}{x^2-1}=2+\frac{2}{x^2-1}=2+\frac{1}{x-1}+\frac{-1}{x+1}=2+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}.$$

Daraus ergibt sich ein Stammfunktionsterm:
$F(x)=2x+\ln|x-1|-\ln|x+1|$.

W4, Seite 31 ; Fortsetzung von Nr. 39

b) $f(x)=\dfrac{5x^2+5}{x^2-x-6}=\dfrac{5x^2+5}{(x-3)\cdot(x+2)}$; $D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{-2;3\}$

Polynomdivision durch (x^2-x-6)

$$\begin{array}{l} (5x^2 \qquad +5)\ :\ (x^2-x-6)=5+\dfrac{5x+35}{x^2-x-6} \\ \underline{-(5x^2-5x-30)} \\ \qquad 5x+35 \end{array}$$

$$f(x)=\frac{5x^2+5}{x^2-x-6}=5+\frac{5x+35}{x^2-x-6}$$

Partialbruchzerlegung

1. *Zerlegung des Nenners in Linearfaktoren*
   Nach der Zerlegungsformel gilt: $x^2-x-6=(x-3)\cdot(x+2)$.

2. *Ansatz mit Einzelbrüchen*
   $$\frac{5x+35}{(x-3)\cdot(x+2)}=\frac{A}{(x-3)}+\frac{B}{(x+2)} \underset{\cdot(x-3)\cdot(x+2)}{\Leftrightarrow} 5x+35=A\cdot(x+2)+B\cdot(x-3)$$

3. *Bestimmung der Konstanten A und B*
   Einsetzen der Nennernullstellen $x = 3$ und $x = -2$
   $x=3:\quad 50=A\cdot 5+B\cdot 0 \Leftrightarrow A=10$
   $x=-2:\quad 25=A\cdot 0+B\cdot(-5) \Leftrightarrow B=-5$

Dies liefert insgesamt die Zerlegung:

$$f(x)=\frac{5x^2+5}{x^2-x-6}=5+\frac{5x+35}{x^2-x-6}=5+\frac{10}{x-3}+\frac{-5}{x+2}=5+10\cdot\frac{1}{x-3}-5\cdot\frac{1}{x+2}$$

Daraus ergibt sich ein Stammfunktionsterm:

$F(x)=5x+10\cdot\ln|x-3|-5\cdot\ln|x+2|$.

W4, Seite 31 ; Fortsetzung von Nr. 39

c) $f(x)=\frac{2x^2-x}{x^2-4}=\frac{2x^2-x}{(x-2)\cdot(x+2)}$; $D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$

Polynomdivision durch (x^2-4)

$$\begin{array}{l} (2x^2-x\quad) \ : \ (x^2-4)=2+\frac{-x+8}{x^2-4}=2-\frac{x-8}{x^2-4} \\ \underline{-(2x^2\quad -8)} \\ \qquad -x+8 \end{array}$$

$$f(x)=\frac{2x^2-x}{x^2-4}=2-\frac{x-8}{x^2-4}$$

Partialbruchzerlegung

1. *Zerlegung des Nenners in Linearfaktoren*
   Nach der 3. Binomischen Formel gilt: $x^2-4=(x-2)\cdot(x+2)$.
2. *Ansatz mit Einzelbrüchen*
   $$\frac{x-8}{x^2-4}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x+2)} \underset{\cdot(x-2)\cdot(x+2)}{\Leftrightarrow} x-8=A\cdot(x+2)+B\cdot(x-2)$$
3. *Bestimmung der Konstanten A und B*
   Einsetzen der Nennernullstellen $x = -$ und $x = -2$
   $x=2:\quad -6=A\cdot 4+B\cdot 0 \ \Leftrightarrow \ A=-\frac{3}{2}$
   $x=-2:\quad -10=A\cdot 0+B\cdot(-4) \ \Leftrightarrow \ B=\frac{5}{2}$

Dies liefert insgesamt die Zerlegung:

$$f(x)=\frac{2x^2-x}{x^2-4}=2-\frac{x-8}{x^2-4}=2-\frac{-\frac{3}{2}}{x-2}-\frac{\frac{5}{2}}{x+2}=2+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x+2}$$

Daraus ergibt sich ein Stammfunktionsterm:

$$F(x)=2x+\frac{3}{2}\cdot\ln|x-2|-\frac{5}{2}\cdot\ln|x+2|.$$

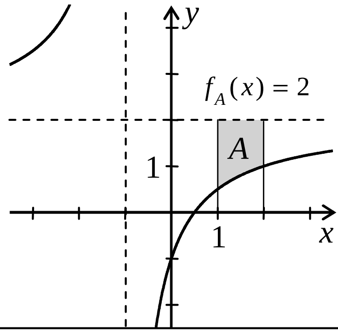
40. a) $\int_2^3 \frac{2}{2x-1}\,dx=\left[\ln|2x-1|\right]_2^3=\ln(5)-\ln(3)=\ln(\frac{5}{3})$

b) $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\int_2^3 \frac{2x}{x^2-1}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\left[\ln|x^2-1|\right]_2^3=\frac{1}{2}\cdot\left(\ln(8)-\ln(2)\right)=\frac{1}{2}\cdot\ln(4)$

c) $\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-2}\,dx=\left[\ln|x^2+x-1|\right]_2^3=\ln(11)-\ln(5)=\ln(\frac{11}{5})$

W4, Seite 31 ; Fortsetzung von Nr. 39

41. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$.



a) –1 ist Nullstelle des Nenners und nicht Nullstelle des Zählers, also ist , also –1 Polstelle von f.

b) Es ist $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}=2-\dfrac{3}{x+1}$.

Somit ist $f_A(x)=2$ eine Gleichung der waagerechten Asymptote.

Polynomdivision durch $(x+1)$

$$\begin{array}{l} (2x-1)\ :\ (x+1)=2-\dfrac{3}{x+1} \\ \underline{-(2x+2)} \\ \quad -3 \end{array}$$

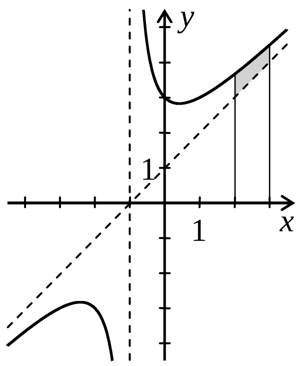
c) Für das Maß der Fläche A gilt:

$$\mu(A)=\int_1^2 (f_A(x)-f(x)\,dx$$

$$=\int_1^2\left(2-2+\frac{3}{x+1}\right)dx=\int_1^2\frac{3}{x+1}dx=3\cdot\int_1^2\frac{1}{x+1}dx=3\cdot\left[\,\ln|x+1|\,\right]_1^2$$

$$=3\cdot\left(\ln(3)-\ln(2)\right)=3\cdot\ln(1{,}5)\approx 1{,}22$$

42. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x+1}$.



a) –1 ist Nullstelle des Nenners und nicht Nullstelle des Zählers, also ist –1 Polstelle von f.

b) Es ist $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x+1}=x+1+\dfrac{2}{x+1}$, also ist $f_A(x)=x+1$ eine Gleichung der schiefen Asymptote.
Weiterhin gilt:

$r(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{x+1}=0$ (unerfüllbar),

also schneiden sich der Graph von f und die Asymptote nicht.

Polynomdivision durch $(x+1)$

$$\begin{array}{l} (x^2+2x+3)\ :\ (x+1)=x+1+\dfrac{2}{x+1} \\ \underline{-(x^2+\ \ x)} \\ \qquad\quad x+3 \\ \qquad \underline{-(x+1)} \\ \qquad\qquad 2 \end{array}$$

c) Für das Maß der Fläche A gilt:

$$\mu(A)=\int_2^3 (f(x)-f_A(x)\,dx$$

$$=\int_2^3\left(x+1+\frac{2}{x+1}-(x+1)\right)dx=\int_2^3\frac{2}{x+1}dx$$

$$=2\cdot\int_2^3\frac{1}{x+1}dx=2\cdot\left[\,\ln|x+1|\,\right]_2^3=2\cdot\left(\ln(4)-\ln(3)\right)\approx 0{,}58.$$

W4, Seite 33

W 4.8 Abituraufgabenteile zu gebrochenrationalen Funktionen

A1. Gegeben ist die Funktion $f: D_{\max} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{x-1}$.

a) $D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (1 ist Nullstelle des Nennerpolynoms)

Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2} \vee x = \dfrac{1}{2}$

b) Veränderte Darstellung des Funktionsterms

$$4 \cdot x + 4 + \frac{3}{x-1} = \frac{(4 \cdot x + 4) \cdot (x-1)}{x-1} + \frac{3}{x-1} = \frac{4x^2 - 4x + 4x - 4 + 3}{x-1}$$

$$= \frac{4x^2 - 1}{x-1} = f(x)$$

Alternativ: Polynomdivision

Polynomdivision durch $(x-1)$

$$\begin{array}{l} (4x^2 \qquad -1) : (x-1) = 4x + 4 + \frac{3}{x-1} \\ \underline{-(4x^2 - 4x)} \\ \qquad 4x - 1 \\ \quad \underline{-(4x - 4)} \\ \qquad\quad 3 \end{array}$$

c) Aus Teil a) ergeben sich die Integrationsgrenzen –0,5 und 0,5.
Die Fläche liegt oberhalb der x-Achse.

Testwert: $f(0) = 4 \cdot 0 + 4 + \dfrac{3}{0-1} = 4 - 3 = 1$

Somit benötigen wir keine Betragsstriche.

$$\mu(A) = \int_{-0,5}^{0,5} f(x)\,dx = \int_{-0,5}^{0,5} \left(4x + 4 + \frac{3}{x-1}\right) dx$$

$$= \left[2x^2 + 4x + 3 \cdot \ln|x-1|\right]_{-0,5}^{0,5}$$

$$= 2 \cdot 0,25 + 2 + 3 \cdot \ln|0,5-1| - \left(2 \cdot 0,25 - 2 + 3 \cdot \ln|-0,5-1|\right)$$

$$= 0,5 + 2 + 3 \cdot \ln(0,5) - 0,5 + 2 - 3 \cdot \ln(1,5)$$

$$= 4 + 3 \cdot \ln(0,5) - 3 \cdot (\ln 1,5) \approx 0,70 \text{ FE}$$

(Vergleiche dazu W 4.7)

W4, Seite 33 ; Fortsetzung von A1

d) • Funktionsgleichung des verschobenen Graphen

Einer Verschiebung um 1 in negative x-Richtung entspricht der Übergang $x \to x+1$ im Funktionsterm.

$$g(x) = \underbrace{f(x+1)}_{\substack{\text{Verschiebung} \\ \text{in } x\text{-Richtung}}} \underbrace{-8}_{\substack{\text{Verschiebung} \\ \text{in } y\text{-Richtung}}} = 4\cdot(x+1)+4+\frac{3}{(x+1)-1}-8$$

$$= 4x+4+4+\frac{3}{x}-8 = 4x+\frac{3}{x}$$

• Symmetrie des verschobenen Graphen

– Die Definitionsmenge $D_{\max} = \mathbb{R}^*$ ist symmetrisch zum Ursprung.

– Für alle $x \in \mathbb{R}^*$ gilt:

$$g(-x) = 4\cdot(-x)+\frac{3}{-x} = -\left(4x+\frac{3}{x}\right) = -g(x).$$

Somit ist der verschobene Graph symmetrisch zum Ursprung.

A2. Gegeben ist die Funktion $f: D_{\max} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{x^2-2}{(x+2)^2}$.

a) • $D_{\max} = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$ (–2 ist doppelte Nullstelle des Nennerpolynoms)

• Schnittpunkt mit der y-Achse

$$f(0) = \frac{0^2-2}{(0+2)^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist $S_y\left(0 \mid -\frac{1}{2}\right)$.

• Schnittpunkte mit der x-Achse

$$f(x)=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x^2-2}{(x+2)^2}=0 \;\Leftrightarrow\; x^2-2=0 \;\Leftrightarrow\; x=-\sqrt{2} \;\vee\; x=\sqrt{2}$$

(beide einfach, mit VzW)

Die Schnittpunkte mit der x-Achse sind $S_{x1}\left(-\sqrt{2} \mid 0\right)$ und $S_{x2}\left(\sqrt{2} \mid 0\right)$.

• Verhalten von f in der Nähe der Definitionslücke

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{\overbrace{x^2-2}^{\to +2}}{\underbrace{(x+2)^2}_{\to 0^+}} = +\infty$$

Die Definitionslücke –2 ist Polstelle ohne VzW.

W4, Seite 33 ; Fortsetzung von A2

b) • Asymptote

Polynomdivision

$$\text{Polynomdivision: } (x^2 \qquad -2):(x^2+2x+4)=1+\frac{-2x-6}{(x+2)^2} = \underbrace{1}_{f_A(x)} - \underbrace{\frac{2x+6}{(x+2)^2}}_{r(x)}$$
$$\underline{-(x^2+2x+4)}$$
$$-2x-4$$

Die Gleichung der waagerechten Asymptote ist $y=1$.

• Annäherung an die Asymptote

Mithilfe des Vorzeichens des Restterms $r(x)$ kann die Art der Annäherung des Graphen G_f für $x \to \pm\infty$ an die Asymptote beschrieben werden.

$r(x) = -\dfrac{2x+6}{(x+2)^2} > 0$ für $x \to -\infty$; Annäherung von oben

$r(x) = -\dfrac{2x+6}{(x+2)^2} < 0$ für $x \to +\infty$; Annäherung von unten

G_f nähert sich für $x \to -\infty$ der Asymptote $y=1$ von oben und für $x \to +\infty$ von unten.

c) • Extrempunkte

– Erste Ableitung

$$f'(x) = \frac{(x+2)^2 \cdot 2x - (x^2-2)\cdot 2\cdot(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{(x+2)\cdot 2x - (x^2-2)\cdot 2}{(x+2)^3}$$
$$= \frac{2x^2+4x-2x^2+4}{(x+2)^3} = \frac{4x+4}{(x+2)^3} = 4\cdot\frac{x+1}{(x+2)^3}$$

– Notwendige Bedingung

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4\cdot\frac{x+1}{(x+2)^2}=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1 \text{ (einf. mit VzW)}$$

– Hinreichende Bedingung

Zweite Ableitung

$$f''(x) = 4\cdot\frac{(x+2)^3\cdot 1-(x+1)\cdot 3\cdot(x+2)^2\cdot 1}{(x+2)^6} = 4\cdot\frac{(x+2)-(x+1)\cdot 3}{(x+2)^4}$$
$$= 4\cdot\frac{x+2-3x-3}{(x+2)^4} = 4\cdot\frac{-2x-1}{(x+2)^4} = -4\frac{2x+1}{(x+2)^4}$$

$$f''(-1) = -4\cdot\frac{2\cdot(-1)+1}{(-1+2)^4} = -4\cdot\frac{-1}{1} = 4 > 0$$

Die Stelle –1 ist eine Minimumstelle.

Mit $f(-1) = \dfrac{(-1)^2-2}{(-1+2)^2} = \dfrac{-1}{1} = -1$ ergibt sich der Tiefpunkt $T(-1|-1)$.

W4, Seite 33 ; Fortsetzung von A2, Teil c

Alternativ: f' hat bei $x=-1$ einen einfachen VzW.

Testwert: $f'(0)=4\cdot\frac{0+1}{(0+2)^2}=1>0$

f' hat also bei $x=-1$ einen VzW von – 0 + und die Monotonie wechselt von streng monoton fallend nach streng monoton wachsend.

- Wendepunkte
  - Notwendige Bedingung

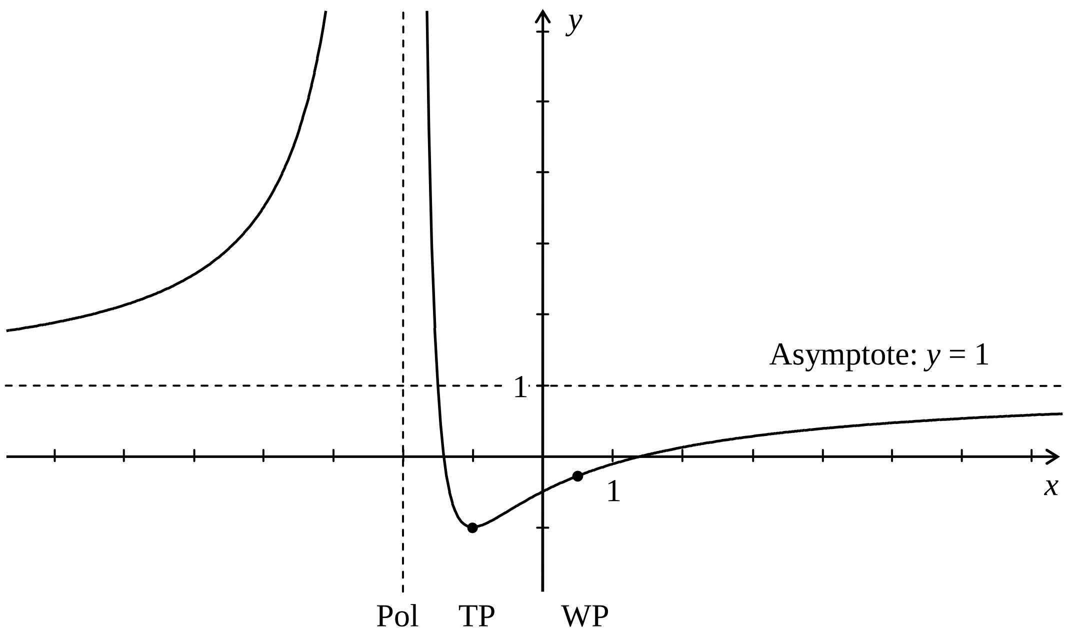
    $f''(x)=0 \Leftrightarrow -4\frac{2x+1}{(x+2)^4}=0 \Leftrightarrow 2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

    (einfach, mit VzW)
    Testwert: $f''(-1)=4>0$ (siehe bei Extrempunkt)

    f'' hat also bei $x=-\frac{1}{2}$ einen VzW von + 0 – und die Krümmung wechselt von rechts- nach linksgekrümmt.

Mit $f(-0{,}5)=\frac{(-\frac{1}{2})^2-2}{(-\frac{1}{2}+2)^2}=\frac{-\frac{7}{4}}{\frac{9}{4}}=-\frac{7}{9}$ ergibt sich der Wendepunkt $W(-\frac{1}{2}|-\frac{7}{9})$.

d) Graph



W4, Seite 33

A3. • Bild ① gehört zur Funktion g.

Begründung:

Es ist $f(x)=\dfrac{2}{x^2+1} \Rightarrow g(x)=\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{x^2+1}{2}=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$.

Dies ist die Gleichung einer nach oben geöffneten Parabel mit dem Scheitel $S\left(0\,|\,\frac{1}{2}\right)$.

• Bild ③ gehört zur Funktion f.

– Die Funktion f ist eine echt gebrochenrationale Funktion ohne Nullstellen und ohne Pole. Die x-Achse ist die Asymptote.

– Die Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ sind:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\Big(\frac{2}{\underbrace{x^2+1}_{\to+\infty}}\Big)=0^+ \text{ und } \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{2}{\underbrace{x^2+1}_{\to+\infty}}\Big)=0^+.$$

Das Nennerpolynom dominiert wegen des höheren Grades über das Zählerpolynom.

Der Graph von f nähert sich also für $x \to \pm\infty$ der x-Achse von oben.

– Es gilt $f'(x)=\dfrac{-2\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-4x}{(x^2+1)^2}$.

Die Ableitung hat die Nullstelle $x=0$ (einfach, mit VzW +0–).

Somit hat f an der Stelle 0 eine Maximumstelle.

Mit $f(0)=\dfrac{2}{0^2+1}=2$ ergibt sich der Hochpunkt $H(0\,|\,2)$.

• Bild ② gehört zur Ableitungsfunktion f'.

– Die Ableitungsfunktion f' ist eine echt gebrochenrationale Funktion mit der Nullstelle $x=0$. Sie hat keine Pole und die x-Achse ist die Asymptote.

– Die Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ sind:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\Bigg(\frac{\overbrace{-4x}^{\to+\infty}}{\underbrace{(x^2+1)^2}_{\to+\infty}}\Bigg)=0^+ \text{ und } \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\Bigg(\frac{\overbrace{-4x}^{\to-\infty}}{\underbrace{(x^2+1)^2}_{\to+\infty}}\Bigg)=0^-.$$

Das Nennerpolynom dominiert wegen des höheren Grades über das Zählerpolynom.

Der Graph von f nähert sich also für $x \to -\infty$ der x-Achse von oben und für $x \to +\infty$ von unten.

– Die Ableitungsfunktion f' hat an der Stelle $x=0$ den Wert 0. Dort hat die Funktion f eine waagerechte Tangente.

W4, Seite 34

A4. Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto x-2+\frac{4}{x-1}$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

a) Verhalten der Funktion an den Rändern der Definitionsmenge

Die Ränder der Definitionsmenge sind $-\infty$, $+\infty$ und 1, daher sind die Grenzwerte von f für $x \to -\infty$, $x \to +\infty$, $x \to -1^-$ und $x \to -1^+$ zu bestimmen.

- $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\Big(\underbrace{x-2}_{\to-\infty} + \frac{4}{\underbrace{x-1}_{\to 0^-}}\Big) = -\infty$$
- $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\Big(\underbrace{x-2}_{\to+\infty} + \frac{4}{\underbrace{x-1}_{\to 0^+}}\Big) = +\infty$$
- $$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\Big(\underbrace{x-2}_{\to-1} + \frac{4}{\underbrace{x-1}_{\to-\infty}}\Big) = -\infty$$
- $$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+}\Big(\underbrace{x-2}_{\to-1} + \frac{4}{\underbrace{x-1}_{\to+\infty}}\Big) = -\infty$$

Gleichung der Asymptote: $y = x-2$

b) • Extrempunkte

– Erste Ableitung

$$f'(x) = 1+\frac{(x-1)\cdot 0-4\cdot 1}{(x-1)^2} = 1+\frac{-4}{(x-1)^2} = 1-\frac{4}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{1\cdot(x-1)^2}{(x-1)^2} - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2-4}{(x-1)^2}$$

– Notwendige Bedingung

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2-4}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2-4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-3 = 0 \Leftrightarrow x^2-2x+1^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3 = 4 \Leftrightarrow x-1 = -2 \vee x-1 = 2$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3 \quad \text{(beide einfach, mit VzW)}$$

W4, Seite 34 ; Fortsetzung von A4, Teil b

– Hinreichende Bedingung

- Stelle $x=-1$

  Testwert: $f'(0)=\frac{(0-1)^2-4}{(0-1)^2}=-3<0$

  f' hat also bei $x=-1$ einen VzW von + 0 – und die Monotonie wechselt von streng monoton wachsend nach streng monoton fallend.

Mit $f(-1)=-1-2+\frac{4}{-1-1}=-5$ ergibt sich der Hochpunkt $H(-1|-5)$.

- Stelle $x=3$

  Testwert: $f'(4)=\frac{(4-1)^2-4}{(4-1)^2}=\frac{5}{9}>0$

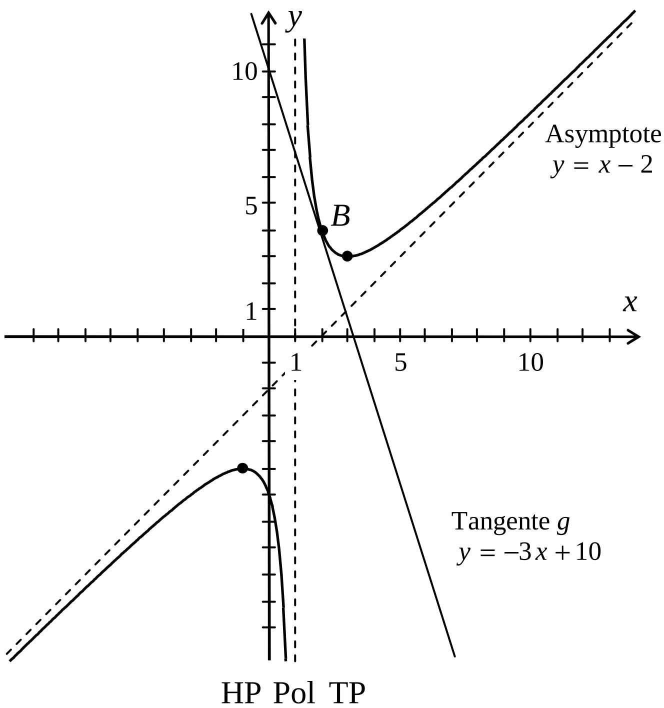
  f' hat also bei $x=3$ einen VzW von – 0 + und die Monotonie wechselt von streng monoton fallend nach streng monoton wachsend.

Mit $f(3)=3-2+\frac{4}{3-1}=3$ ergibt sich der Tiefpunkt $H(3|3)$.

c) Es ist: $f(-4)=-4-2+\frac{4}{-4-1}=-\frac{34}{5}=-6\frac{4}{5}$; $f(0)=0-2+\frac{4}{0-1}=-6$

$f(2)=2-2+\frac{4}{2-1}=4$; $f(6)=6-2+\frac{4}{6-1}=4+\frac{4}{5}=\frac{24}{5}=4\frac{4}{5}$

d) Graph



W4, Seite 34 ; Fortsetzung von A4

e) Bestimmung des Berührpunkts

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow -3x+10=x-2+\frac{4}{x-1} \Leftrightarrow -4x+12=\frac{4}{x-1}$$

$$\underset{:4}{\Leftrightarrow} -x+3=\frac{1}{x-1} \underset{\cdot(x-1)}{\Leftrightarrow} (-x+3)\cdot(x-1)=1$$

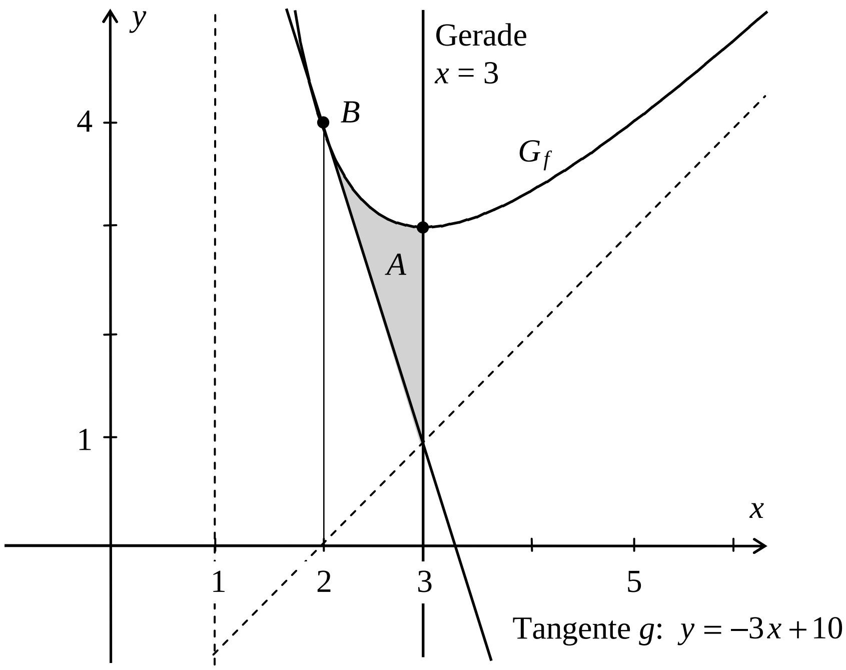
$$\Leftrightarrow -x^2+4x-4=0 \underset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow} x^2-4x+4=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ (doppelt)}$$

Für die y-Koordinate des Berührpunkts gilt: $f(2)=2-2+\frac{4}{2-1}=4$.

Dann ist $y=-3x+10$ die Gleichung der Tangente an G_f im Berührpunkt $B(2|4)$.

f) Zu berechnen ist die Fläche zwischen G_f und G_g in den Grenzen 2 bis 3.



Für das Maß der Fläche gilt:

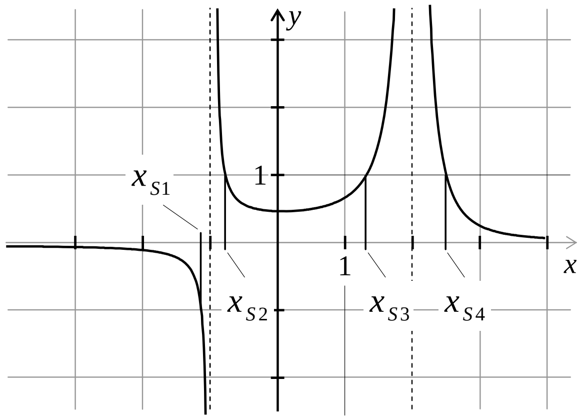
$$\mu(A)=\int_2^3 \left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_2^3\left(x-2+\frac{4}{x-1}-(-3x+10)\right)dx$$

$$=\int_2^3\left(4x-12+\frac{4}{x-1}\right)dx=\left[2x^2-12x+4\cdot\ln|x-1|\right]_2^3$$

$$=18-36+4\cdot\ln(2)-\left(8-24+4\cdot\ln(1)\right)=4\cdot\ln(2)-2.$$

W4, Seite 34

A5. Gegeben ist eine differenzierbare Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
Die Abbildung rechts zeigt den Graphen der Funktion
$g:\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\frac{1}{f(x)}$.



a) Nullstellen
Die Polstellen von g sind die Nullstellen von f.
Also sind $x_1=-1$ und $x_2=2$ die Nullstellen von f.

b) Schnittpunkte von G_f und G_g

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{f(x)}\Leftrightarrow[f(x)]^2=1\Leftrightarrow f(x)=-1\vee f(x)=1$$

$$\Leftrightarrow g(x)=\frac{1}{-1}=-1\vee g(x)=\frac{1}{1}=1$$

Die Schnittpunkte sind an den Stellen x, für die $g(x)=-1\vee g(x)=1$ gilt. Man kann sie aus der Zeichnung ablesen.
Man liest ab: $x_{s1}=-1{,}25$, $x_{s2}=-0{,}75$, $x_{S3}=1{,}25$, $x_{S4}=2{,}5$.

c) Als notwendige Bedingung muss $f'(0)=0$ und $f'(2)=0$ gelten.

Es ist: $g(x)=\frac{1}{f(x)}\Rightarrow g'(x)=-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}\Rightarrow f'(x)=-g'(x)\cdot[f(x)]^2$.

- $f'(0)=0$
  An der Zeichnung lesen wir ab, dass $g'(0)=0$ ist, denn an der Stelle $x=0$ hat der Graph von g eine waagerechte Tangente.
  Weiterhin lesen wir aus der Zeichnung ab:

  In $]-1;0]$ ist $g'(x)<0$, also gilt dort $f'(x)=-\underbrace{g'(x)}_{<0}\cdot\underbrace{[f(x)]^2}_{>0}>0$.

  In $[0;2[$ ist $g'(x)>0$, also gilt dort $f'(x)=-\underbrace{g'(x)}_{>0}\cdot\underbrace{[f(x)]^2}_{>0}<0$.

  An der Stelle $x=0$ hat f also einen Monotoniewechsel von streng monoton wachsend nach streng monoton fallend, d.h. die Stelle $x=0$ ist Maximumstelle.

W4, Seite 34 ; Fortsetzung von A4, Teil c

- $f'(2)=0$

  Wir lesen aus der Zeichnung ab:

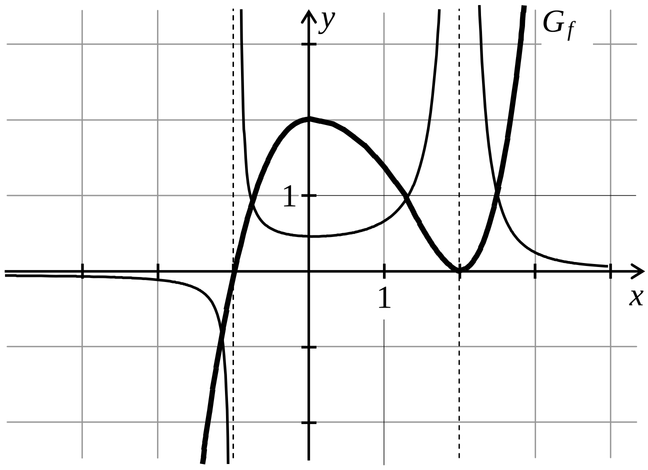
  In $[0\,;2[$ ist $g'(x)>0$, also gilt dort $f'(x)=-\underbrace{g'(x)}_{>0}\cdot\underbrace{\left[f(x)\right]^2}_{>0}<0$.

  In $]2\,;+\infty[$ ist $g'(x)<0$, also gilt dort $f'(x)=-\underbrace{g'(x)}_{<0}\cdot\underbrace{\left[f(x)\right]^2}_{>0}>0$.

  An der Stelle $x=2$ hat f also einen Monotoniewechsel von streng monoton fallend nach streng monoton wachsend, d.h. die Stelle $x=2$ ist Minimumstelle.

d) Es ist: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\underbrace{g(x)}_{\to 0^-}}=-\infty$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\underbrace{g(x)}_{\to 0^+}}=+\infty$.

e) Skizze des Graphen von f



Symmetriekriterien

1. a), b) und c jeweils individuelle Lösung

2. a) $f(x)=\frac{2x}{x^2-2}$
   - Das Zählerpolynom $p_n(x)=2x$ ist punktsymmetrisch.
   - Das Nennerpolynom $q_m(x)=x^2-2$ ist achsensymmetrisch.

   Nach dem 2. Symmetriekriterium ist die Funktion f daher punktsymmetrisch.

   b) $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$
   - Das Zählerpolynom $p_n(x)=x-1$ ist nicht symmetrisch.
   - Das Nennerpolynom $q_m(x)=x+2$ ist nicht symmetrisch.

   Keines der beiden Symmetriekriterien ist anwendbar.
   Da aber die Definitionsmenge $D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ keine zum Ursprung symmetrische Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, ist die Funktion f weder punkt- noch achsensymmetrisch.

   c) $f(x)=\frac{x^4+1}{x^2-9}$
   - Das Zählerpolynom $p_n(x)=x^4+1$ ist achsensymmetrisch.
   - Das Nennerpolynom $q_m(x)=x^2-9$ ist achsensymmetrisch.

   Nach dem 1. Symmetriekriterium ist die Funktion f daher achsensymmetrisch.

   d) $f(x)=\frac{x^4+x^2+1}{x^2-x}=\frac{x^4+x^2+1}{x\cdot(x-1)}$

   $D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$
   - Das Zählerpolynom $p_n(x)=x^4+x^2+1$ ist achsensymmetrisch.
   - Das Nennerpolynom $q_m(x)=x^2-x$ ist nicht symmetrisch.

   Keines der beiden Symmetriekriterien ist anwendbar.

   Da aber die Definitionsmenge keine zum Ursprung symmetrische Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, ist die Funktion f weder punkt- noch achsensymmetrisch.

A1, Seite 36 ; Fortsetzung von Nr. 2

e) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^3}$

- Das Zählerpolynom $p_n(x)=x^2+1$ ist achsensymmetrisch.
- Das Nennerpolynom $q_m(x)=x^3$ ist punktsymmetrisch.

Nach dem 2. Symmetriekriterium ist die Funktion f daher punktsymmetrisch.

f) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2-2}$

- $D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\}$
- Das Zählerpolynom $p_n(x)=x^3+1$ ist nicht symmetrisch.
- Das Nennerpolynom $q_m(x)=x^2-2$ ist achsensymmetrisch.

Keines der beiden Symmetriekriterien ist anwendbar.

Nullstellen: $f(x)=0 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{x^3+1}{x^2-2} \;\Leftrightarrow\; x^3+1=0 \;\Leftrightarrow\; x^3=-1 \;\Leftrightarrow\; x=-1$

Aus der Lage der Nullstelle kann man schließen, dass die Funktion f weder punkt- noch achsensymmetrisch ist.

3. a) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$

- $D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$
- Symmetrie
  - Das Zählerpolynom $p_n(x)=x^2$ ist achsensymmetrisch.
  - Das Nennerpolynom $q_m(x)=x^2-1$ ist achsensymmetrisch.

  Nach dem 1. Symmetriekriterium ist die Funktion f daher achsensymmetrisch.

- Nullstellen: $f(x)=0 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{x^2}{x^2-1} \;\Leftrightarrow\; x^2=0 \;\Leftrightarrow\; x=0$ (doppelt, ohne VzW)
- Polstellen: $x^2-1=0 \;\Leftrightarrow\; x^2=1 \;\Leftrightarrow\; x=-1 \vee x=1$ (beide einf. mit VzW)

Ergebnis: Zur Funktionsgleichung gehört der Graph ②.

A1, Seite 36 ; Fortsetzung von Nr. 3

b) $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$

- $D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$
- Symmetrie
  Da die Definitionsmenge keine zum Ursprung symmetrische Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, ist die Funktion f weder punkt- noch achsensymmetrisch.
- Nullstellen: $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x-1} \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$ (einf. mit VzW)
- Polstellen: $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ (einfach, mit VzW)

Ergebnis: Zur Funktionsgleichung gehört der Graph ③.

c) $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$

- $D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$
- Symmetrie
  – Das Zählerpolynom $p_n(x)=x$ ist punktsymmetrisch.
  – Das Nennerpolynom $q_m(x)=x^2-1$ ist achsensymmetrisch.
  Nach dem 2. Symmetriekriterium ist die Funktion f daher punktsymmetrisch.
- Nullstellen: $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x}{x^2-1}=0 \Leftrightarrow x=0$ (einfach, mit VzW)
- Polstellen: $x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=1$ (beide einf. mit VzW)

Ergebnis: Zur Funktionsgleichung gehört der Graph ①.

d) $f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{x^2-1}$

- $D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$
- Symmetrie
  – Das Zählerpolynom $p_n(x)=x^3$ ist punktsymmetrisch.
  – Das Nennerpolynom $q_m(x)=x^2-1$ ist achsensymmetrisch.
  Nach dem 2. Symmetriekriterium ist die Funktion f daher punktsymmetrisch.
- Nullstellen: $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{x^2-1} \Leftrightarrow x^3=0 \Leftrightarrow x=0$ (dreifach, mit VzW)
- Polstellen: $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ (einfach, mit VzW)

Ergebnis: Zur Funktionsgleichung gehört der Graph ⑥.

A1, Seite 36 ; Fortsetzung von Nr. 3

e) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

- $D_{\max}=\mathbb{R}$
- Symmetrie
  - Das Zählerpolynom $p_n(x)=x^2$ ist achsensymmetrisch.
  - Das Nennerpolynom $q_m(x)=x^2+1$ ist achsensymmetrisch.

  Nach dem 1. Symmetriekriterium ist die Funktion f daher achsensymmetrisch.
- Nullstellen: $f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x^2+1} \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$ (doppelt, ohne VzW)
- Polstellen: keine

Ergebnis: Zur Funktionsgleichung gehört der Graph ⑤.

f) $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}=\dfrac{x}{x^2-2x+1}$

- $D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$
- Symmetrie
  Da die Definitionsmenge keine zum Ursprung symmetrische Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, ist die Funktion f weder punkt- noch achsensymmetrisch.
- Nullstellen: $f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{(x-1)^2} \Leftrightarrow x=0$ (einfach, mit VzW)
- Polstellen: $(x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$ (einfach, mit VzW)

Ergebnis: Zur Funktionsgleichung gehört der Graph ④.