Inhaltsverzeichnis

W 4 Gebrochenrationale Funktionen(EK)

Notizen

W4

Gebrochenrationale Funktionen (EK)

W 4.1 Begriffsklärung und Klassifizierung

Wir betrachten Funktionen, die sich als Quotient zweier ganzrationaler Funktionen schreiben lassen. Die Variable x soll dabei auch im Nenner auftreten, d.h. im Nenner darf keine konstante Funktion stehen.

Gebrochenrationale Funktion

Seien p_n und q_m ganzrationale Funktionen vom Grad n bzw. m und $m \neq 0$.
Die Funktion

$$f: D_{\max} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \frac{p_n(x)}{q_m(x)} \text{ mit } \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

mit $a_n, b_m \neq 0$ heißt **gebrochenrationale Funktion** mit dem **Zählergrad *n*** und dem **Nennergrad *m***.

Wir unterteilen gebrochenrationale Funktionen in zwei Klassen:

- gilt Zählergrad $n <$ Nennergrad m, so heißt f **echt gebrochen**,
- gilt Zählergrad $n \geq$ Nennergrad m, so heißt f **unecht gebrochen**.

Beispiele (Klassifizierung gebrochenrationaler Funktionen)

a) $f(x) = \frac{x^3 - 2x}{x^2 + 1}$ ist unecht gebrochenrational.

b) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ ist echt gebrochenrational.

c) $f(x) = \frac{x-1}{2} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ist nicht gebrochenrational, sondern ganzrational.

d) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^3 + 1}$ ist nicht rational ($\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, also kein ganzzahliger Exponent).

Aufgabe

1. Entscheiden Sie, ob eine gebrochenrationale Funktion vorliegt. Geben Sie gegebenenfalls den Typ der gebrochenrationalen Funktion an.

   a) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ b) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2 + 1}$ c) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{10}$ d) $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x}$

W 4.2 Bestimmung der Definitionsmenge

Bei der Bildung des Quotienten zweier Funktionen ist darauf zu achten, dass im Nenner des Bruchs immer ein von null verschiedener Wert stehen muss. Für die maximale Definitionsmenge einer gebrochenrationalen Funktion gilt somit:

$$D_{\max} = \{x \in \mathbb{R} \mid q_m(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}.$$

Dabei sind $x_1, x_2, \ldots, x_r$ die Nullstellen des Nennerpolynoms q_m.
Sie heißen **Definitionslücken** der gebrochenrationalen Funktion f.

Zur Bestimmung der Definitionsmenge einer gebrochenrationalen Funktion bietet sich folgende Vorgehensweise an:

- Nennerpolynom q_m möglichst faktorisieren,
- Nullstellen von q_m bestimmen (Definitionslücken),
- Definitionslücken aus der Menge $\mathbb{R}$ ausschließen.

Beispiele (Definitionsmenge und Nullstellen gebrochenrationaler Funktionen)

a) Betrachtet wird $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}$. Faktorisierung: $f(x) = \dfrac{(x+1)\cdot(x-1)}{(x-2)\cdot(x-3)}$

Nullstellen: $x = -1$, $x = +1$ (beide einfach)
Definitionslücken: $x = 2$, $x = 3$ (beide einfach)
Maximale Definitionsmenge: $D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$

b) Betrachtet wird $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 + 6x + 9}$. Faktorisierung: $f(x) = \dfrac{x+1}{(x+3)^2}$

Nullstelle: $x = -1$ (einfach)
Definitionslücke: $x = -3$ (doppelt)
Maximale Definitionsmenge: $D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

Aufgaben

2. Lesen Sie an dem Funktionsterm die maximale Definitionsmenge ab. Entscheiden Sie zusätzlich, ob die Funktionen gebrochenrational sind.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ b) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{2}}$ c) $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}\cdot x}{x+1}$ e) $f(x) = \dfrac{x-1}{(x-4)^2}$ f) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 1$

g) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{4x}$ h) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{4}$ i) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

3. Bestimmen Sie für die gebrochenrationalen Funktionen die maximale Definitionsmenge und geben Sie an, um welche Art einer gebrochenrationalen Funktion es sich jeweils handelt.

a) $f(x)=\frac{1}{x-5}$ b) $f(x)=\frac{x^2}{x+2}$ c) $f(x)=\frac{x^2+1}{(x-1)\cdot(x+1)}$

d) $f(x)=\frac{x-1}{x^2-2x}$ e) $f(x)=\frac{x}{(x-3)^2}$ f) $f(x)=\frac{x^2}{x^2-4x+4}$

g) $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+6x+9}$ h) $f(x)=\frac{x}{x^2+7}$ i) $f(x)=\frac{1}{x^2-x-6}$

4. Bestimmen Sie $D_{\max}$ und die Nullstellen. Welche Art einer gebrochenrationalen Funktion liegt vor?

a) $f(x)=\frac{1}{x+1}$ b) $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ c) $f(x)=\frac{x^2-1}{(x+2)^2}$

d) $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x^2-6x+9}$ e) $f(x)=\frac{x^2-2x}{x^2-2}$ f) $f(x)=\frac{x^2+2x+2}{x^2+x-2}$

5. Bei welchen der folgenden Funktionen handelt es sich um eine gebrochenrationale Funktion? Begründen Sie Ihre Entscheidung durch eine Umformung des Funktionsterms und geben Sie $D_{\max}$ an.

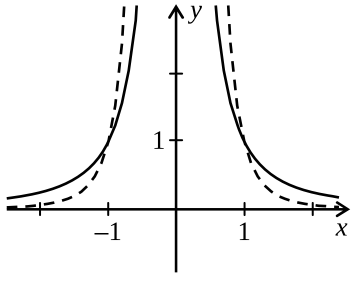
a) $f(x)=x^{-1}$ b) $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ c) $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}$

d) $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$ e) $f(x)=x^0$ f) $f(x)=x^{-4}$

6. Die Abbildungen zeigen die Graphen von Potenzfunktionen mit negativen Exponenten.
   a) Begründen Sie, dass es sich bei diesen Funktionen um gebrochenrationale Funktionen handelt.
   b) Welche Definitionslücken treten auf? Geben Sie $D_{\max}$ an.
   c) Beschreiben Sie den Verlauf der Graphen in der Nähe ihrer Definitionslücke.

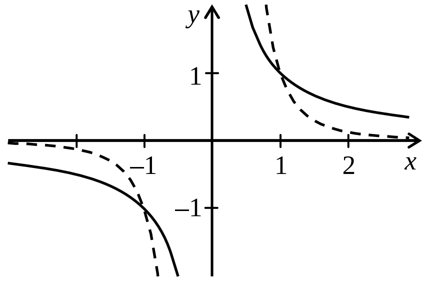
Gerade Exponenten

$f(x)=x^{-2}, x^{-4}, \ldots$



Ungerade Exponenten

$f(x)=x^{-3}, x^{-5}, \ldots$



W 4.3 Polstellen

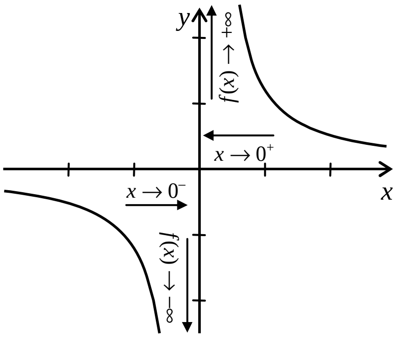
Begriff der Polstelle

Bei gebrochenrationalen Funktionen muss das Verhalten in der Nähe der Definitionslücken untersucht werden.

Schon am Beispiel der Kehrwertfunktion

$$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$$

kann man erkennen, dass sich die Graphen gebrochenrationaler Funktionen nicht immer in einem Zuge zeichnen lassen. Bei der Kehrwertfunktion ist dafür die Definitionslücke an der Stelle 0 verantwortlich.



Am Graphen kann man erkennen:		Grenzwertschreibweise
• Bei Annäherung an die Lücke 0 von links fallen die Funktionswerte nach −∞.	$x \to 0^-$ $f(x) \to -\infty$	$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$
• Bei Annäherung an die Lücke 0 von rechts steigen die Funktionswerte nach +∞.	$x \to 0^+$ $f(x) \to +\infty$	$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

Es ergibt sich jeweils keine reelle Zahl als Grenzwert. Es liegt kein Grenzwert im eigentlichen Sinn vor. Ein solches Grenzwertverhalten ist charakteristisch für gebrochenrationale Funktionen. Man spricht von **uneigentlichen Grenzwerten**.

Beispiel (Verhalten in der Nähe einer Definitionslücke)

Betrachtet wird $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2 - 1}{x - 2}$ in der Nähe der Lücke $x_0 = 2$.

Annäherung von links an $x_0 = 2$ $(x \to 2^-)$

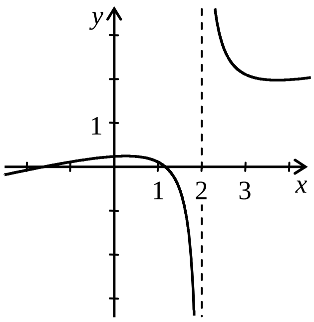
x	$f(x)$
1	0,0
1,5	–0,6
1,9	–6,5
1,99	–74,0
1,999	–749,0
1,9999	–7499,0

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$$

Annäherung von rechts an $x_0 = 2$ $(x \to 2^+)$

x	$f(x)$
3	2,0
2,5	2,6
2,1	8,5
2,01	76,0
2,001	751,0
2,0001	7501,0

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$$



Polgerade: $x = 2$

In der Nähe der Stelle $x_0 = 2$ streben die Funktionswerte $f(x)$ gegen $-\infty$ oder $+\infty$. Man bezeichnet die Stelle $x_0 = 2$ als **Polstelle** oder **Unendlichkeitsstelle**. Anschaulich bedeutet dies, dass sich der Graph von f immer mehr der Parallelen zur y-Achse mit der Gleichung $x = 2$ annähert.

Allgemein definiert man:

Polstelle

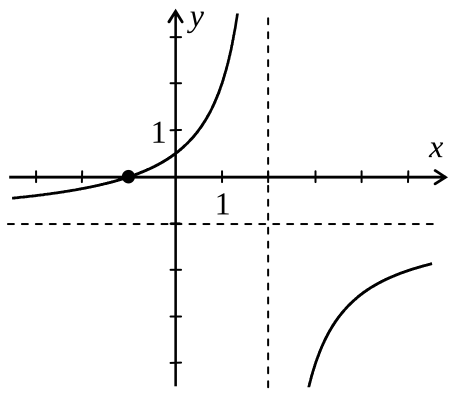
Es sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und x_0 eine Definitionslücke. Gilt für die einseitigen Grenzwerte

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty \text{ und } \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty,$$

so heißt die Definitionslücke x_0 **Polstelle** oder **Unendlichkeitsstelle**.
Die Parallele zur y-Achse mit der Gleichung $x = x_0$ heißt **Polgerade**.

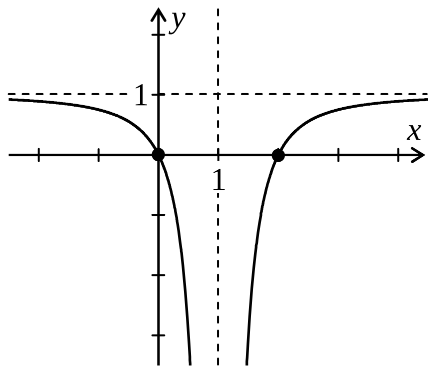
Aufgaben

7. Gegeben ist die Funktion $f: D_{\max} \to \mathbb{R}, x \mapsto -\frac{x+1}{x-2}$.



   a) Geben Sie $D_{\max}$ an.
   b) Begründen Sie die Lage der Nullstelle.
   c) Begründen Sie, dass es sich bei der Definitionslücke um eine Polstelle handelt. Lesen Sie dazu aus der Zeichnung die uneigentlichen Grenzwerte ab.
   d) Bestätigen Sie das Ergebnis durch Berechnung einiger Funktionswerte in der Nähe der Definitionslücke.

8. Gegeben ist die Funktion $f: D_{\max} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$.



   a) Geben Sie $D_{\max}$ an.
   b) Begründen Sie die Lage der Nullstellen.
   c) Begründen Sie, dass eine Polstelle vorliegt. Lesen Sie dazu aus der Zeichnung die uneigentlichen Grenzwerte ab.
   d) Welcher Unterschied zeigt sich im Verlauf des Graphen in der Nähe der Polstelle im Vergleich zu der Funktion aus der vorangehenden Aufgabe?

Polstellenkriterium

Die Entscheidung, ob es sich bei der Definitionslücke einer gebrochenrationalen Funktion um eine Polstelle handelt, haben wir bisher mithilfe von Grenzwertbetrachtungen getroffen.
Wünschenswert wäre es, wenn man diese Entscheidung schon direkt durch einen Blick auf den Funktionsterm treffen könnte.

Begründung des Polstellenkriteriums

Wir betrachten eine gebrochenrationale Funktion $f(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}$.

- Für eine Definitionslücke x_0 gilt für das Nennerpolynom $q_m(x_0) = 0$. Der Nenner von f nimmt deshalb für $x \to x_0$ (betragsmäßig) beliebig kleine Werte an.
- Gilt zusätzlich für das Zählerpolynom $p_n(x_0) \neq 0$, so steht für $x \to x_0$ im Zähler eine feste reelle Zahl.

Der Quotient $f(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}$ strebt folglich dem Betrag nach gegen unendlich.

Hieraus ergibt sich das folgende Kriterium zur Charakterisierung der Definitionslücken einer gebrochenrationalen Funktion:

Polstellenkriterium

Es sei $f: D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}$ eine gebrochenrationale Funktion.

Ist eine Stelle x_0 Nullstelle des Nennerpolynoms, zugleich jedoch keine Nullstelle des Zählerpolynoms, d. h. gilt

$$q_m(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad p_n(x_0) \neq 0,$$

so handelt es sich bei x_0 um eine **Polstelle.**

Die Untersuchung des Sonderfalls, dass x_0 gleichzeitig Nullstelle des Nennerpolynoms **und** des Zählerpolynoms ist, wird an einer späteren Stelle vorgenommen.

Das Polstellenkriterium ist vor allem in den Fällen leicht anwendbar, in denen sich der Funktionsterm faktorisieren lässt.

Beispiel (Polstellenkriterium anwenden)

Betrachtet wird die Funktion $f: D_{\max} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x+1}{x^2 + x - 2}$.

Aus der Faktorisierung $f(x) = \frac{x+1}{(x+2)\cdot(x-1)}$ ergibt sich:

- Nullstelle des Zählerpolynoms: $x = -1$ (einfach)
- Nullstellen des Nennerpolynoms: $x = -2$ oder $x = 1$ (beide einfach)

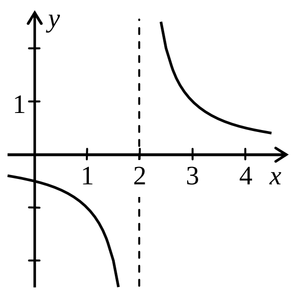
Nach dem Polstellenkriterium sind die Stellen –2 und 1 Polstellen.

Vielfachheit von Polstellen

Wie bei den Nullstellen einer Funktion ist auch bei den Polstellen die Vielfachheit zu beachten, mit der sie auftreten. Diese Vielfachheit hat Auswirkungen auf den Verlauf des Graphen. In folgenden Abbildungen sind anhand einfacher Funktionen die verschiedenen Möglichkeiten dargestellt.

- *Polstellen mit Vorzeichenwechsel*
  (einfache, dreifache, … Nullstelle des Nennerpolynoms)

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$



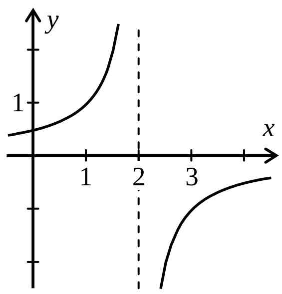
Vorzeichentabelle:

x		2	
$f(x)$	$-$	| mit VzW Polst.	$+$

Grenzwerte an der Polstelle 2:

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

$$f(x) = \frac{-1}{x-2}$$



Vorzeichentabelle:

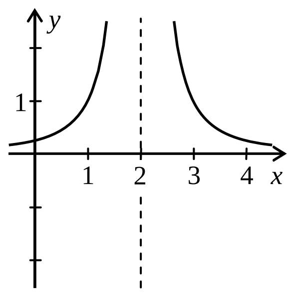
x		2	
$f(x)$	$+$	| mit VzW Polst.	$-$

Grenzwerte an der Polstelle 2:

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

- *Polstellen ohne Vorzeichenwechsel*
  (doppelte, vierfache, … Nullstelle des Nennerpolynoms)

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$



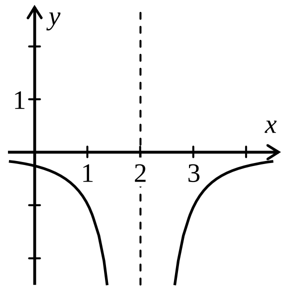
Vorzeichentabelle:

x		2	
$f(x)$	$+$	| ohne VzW Polst.	$+$

Grenzwerte an der Polstelle 2:

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

$$f(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}$$



Vorzeichentabelle:

x		2	
$f(x)$	$-$	| ohne VzW Polst.	$-$

Grenzwerte an der Polstelle 2:

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

Beachtet man die Vielfachheit von Nullstellen und Polstellen, so kann man anhand des faktorisierten Funktionsterms eine Vorzeichentabelle erstellen und damit bereits einen groben Überblick über den Verlauf des Graphen gewinnen.

Bei Erstellung der Vorzeichentabellen wird ausgenutzt, dass eine gebrochenrationale Funktion als stetige Funktion ihr Vorzeichen nur an Nullstellen oder Definitionslücken wechseln kann.

Beispiel (Polstelle mit Vorzeichenwechsel)

Betrachtet wird die Funktion $f(x) = \dfrac{0{,}5x - 1}{x}$.

- *Faktorisierung*: $f(x) = \dfrac{0{,}5 \cdot (x-2)}{x}$

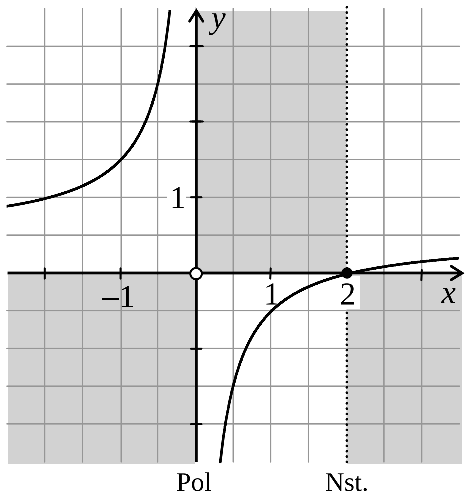
  Nullstelle: $x = 2$ (einfach, mit VzW)

  Polstelle: $x = 0$ (einfach, mit VzW)

- *Vorzeichentabelle*

x		0		2	
$f(x)$	+	❚ mit VzW Polst.	–	0 mit VzW	+
	$+\infty \uparrow$	❚	$\downarrow -\infty$		

Testwert: $f(1) = -0{,}5$



Grenzwerte an der Polstelle 0:

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

Beispiel (Polstelle ohne Vorzeichenwechsel)

Betrachtet wird die Funktion $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2x + 1}$.

- *Faktorisierung*: $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$

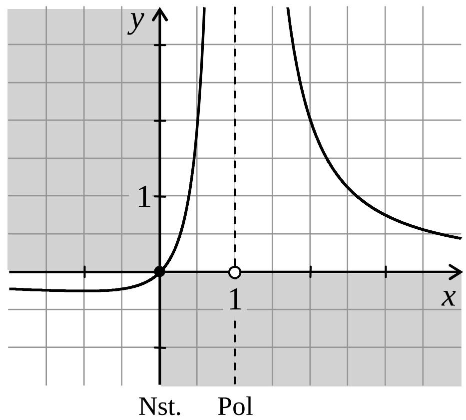
  Nullstelle: $x = 0$ (einfach, mit VzW)

  Polstelle: $x = 1$ (doppelt, mit VzW)

- *Vorzeichentabelle*

x		0		1	
$f(x)$	–	0 mit VzW	+	❚ ohne VzW Polst.	+
			$+\infty \uparrow$	❚	$\uparrow +\infty$

Testwert: $f(2) = 2$



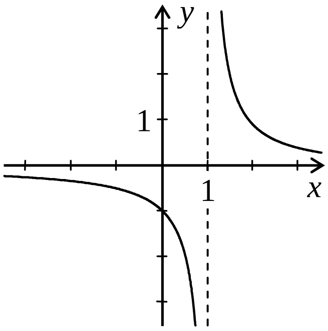
Grenzwerte an der Polstelle 1:

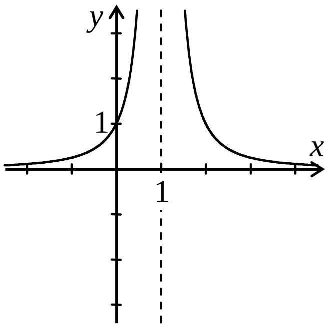
$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

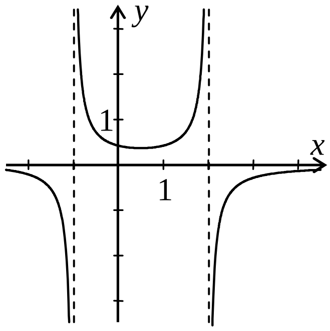
In den Skizzen der Graphen wurden als Zeichenhilfe Gebietssperrungen im Koordinatensystem vorgenommen. Mithilfe der Vorzeichentabelle lassen sich diejenigen Gebiete sperren, in denen keine Punkte des Graphen liegen können. Zur Sperrung dieser „verbotenen“ Gebiete wurde bei dem Graphen des oberen Beispiels an der Nullstelle 2 eine senkrechte Gerade ergänzt.
Siehe dazu auch Anhang A3.

Aufgaben

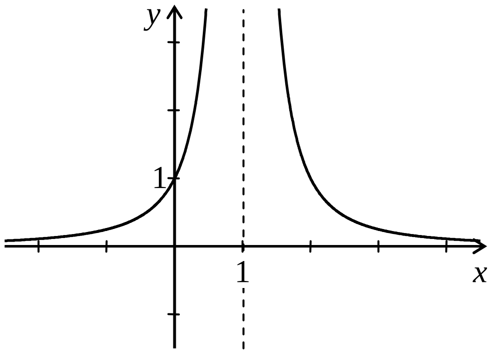
9. Lesen Sie aus den Abbildungen die Polstelle ab und geben Sie an, um welche Art von Polstelle es sich handelt.

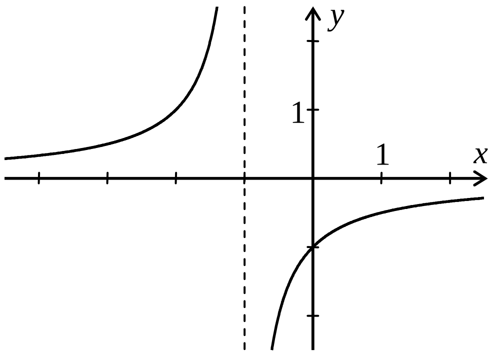
a)


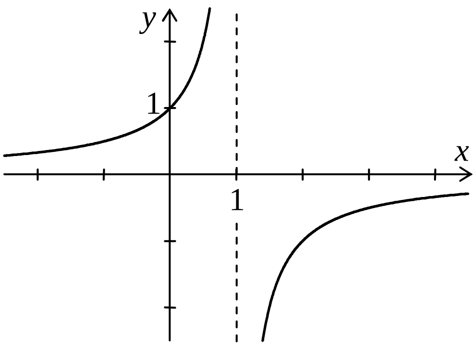
b)


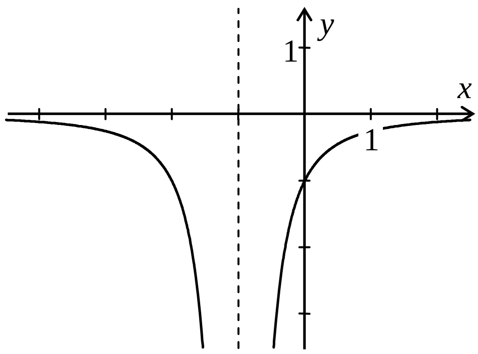
c)


10. Ordnen Sie die Funktionsgraphen den richtigen Funktionen zu.
Begründen Sie Ihre Antwort mit möglichst vielen Argumenten. Bestimmen Sie zur Kontrolle rechnerisch den y-Achsenabschnitt.

a)


b)


c)


d)


① $f: x \mapsto \frac{-1}{x-1}$; ② $g: x \mapsto \frac{-1}{x+1}$; ③ $h: x \mapsto \frac{-1}{(x+1)^2}$; ④ $k: x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2}$

11. Geben Sie $D_{\max}$ an und begründen Sie, dass eine Polstelle auftritt.
Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen in der Nähe der Polstelle.

a) $f: D_{\max} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \frac{1}{x+1}$

b) $f: D_{\max} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \frac{-1}{(x-1)^2}$

c) $f: D_{\max} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \frac{-1}{x-1}$

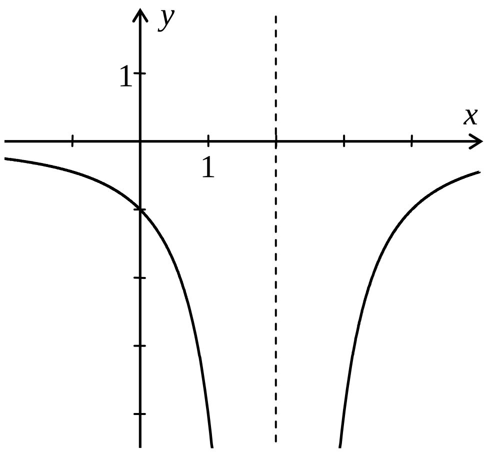
d) $f: D_{\max} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \frac{1}{x^2+2x+1}$

Lassen Sie sich zur Kontrolle die Funktionsgraphen darstellen.

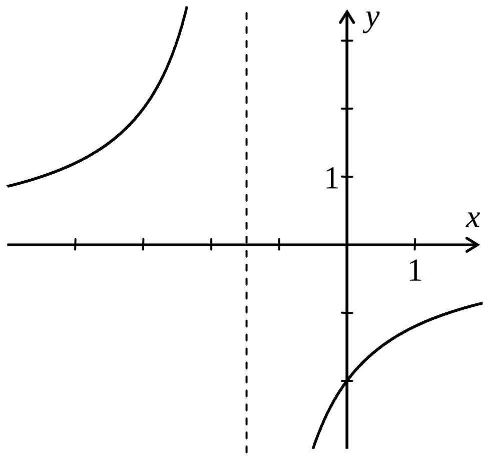
12. Die Graphen in den folgenden Abbildungen gehören zu Funktionen des Typs $x \mapsto \frac{a}{x - x_0}$ bzw. $x \mapsto \frac{a}{(x - x_0)^2}$. Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung.

    Tipp: Der Wert des Parameters a kann z.B. über den y-Achsenabschnitt bestimmt werden.

a)



b)



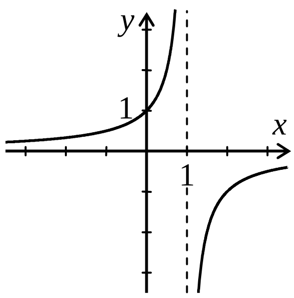
13. Prüfen Sie den Funktionsterm auf Nullstellen und Polstellen. Legen Sie eine Vorzeichentabelle an und notieren Sie die einseitigen Grenzwerte an den Polstellen.

a) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ b) $f(x) = \frac{x}{x+2}$ c) $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x+1}$

d) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2x + 1}$ e) $f(x) = \frac{x+2}{x^2 - 6x + 9}$ f) $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 4x + 4}$

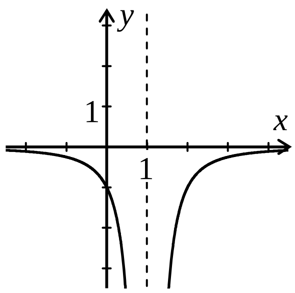
14. Die jeweils angegebene Funktionsgleichung passt nicht zu dem dargestellten Graphen. Was ist hier falsch? Geben Sie mindestens eine Begründung an.

a)



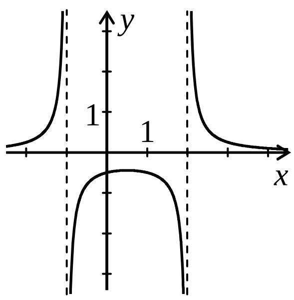
$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

b)



$f(x) = \frac{-1}{x^2 + 1}$

c)



$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 4}$

W 4.4 Verhalten gebrochenrationaler Funktionen für $x \to \pm\infty$

Für $x \to \pm\infty$ nähern sich die Graphen gebrochenrationaler Funktionen häufig einer Geraden an, die als Zeichenhilfe sehr nützlich sein kann. Eine solche Gerade wird als **Asymptote** bezeichnet. Zur Bestimmung einer Gleichung der Asymptote ist das Verfahren der Polynomdivision bedeutsam.

Polynomdivision bei unecht gebrochenrationalen Funktionen

Der Funktionsterm einer unecht gebrochenrationalen Funktion lässt sich mithilfe einer Polynomdivision in eine Summe zerlegen. Die beiden Beispiele greifen typische Fälle auf, die auch für das Folgende wichtig sind.

Beispiel (Zählergrad = Nennergrad)

Betrachtet wird $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

Polynomdivision durch $(x-1)$

$$\begin{array}{l} (2x+1):(x-1) = 2 + \dfrac{3}{x-1} \\ \underline{-(2x-2)} \\ \quad 3 \end{array}$$

Mithilfe der Polynomdivision ergibt sich die Darstellung des Funktionsterms als Summe.

$$f(x) = \underbrace{2}_{f_A(x)} + \underbrace{\frac{3}{x-1}}_{r(x)}$$

Ganzrationaler Anteil: $f_A(x) = 2$

Echt gebrochener Rest: $r(x) = \dfrac{3}{x-1}$ mit $\lim\limits_{x \to \pm\infty} r(x) = 0$

Der ganzrationale Anteil ist in diesem Fall eine Konstante. Im Restterm $r(x)$ tritt die Variable x nur noch im Nennerpolynom auf. Daher gilt $r(x) \to 0$ für $x \to \pm\infty$.

Beispiel (Zählergrad = Nennergrad + 1)

Betrachtet wird $f(x) = \dfrac{x^2+3x-3}{x+2}$.

Polynomdivision durch $(x+2)$

$$\begin{array}{l} (x^2+3x-3):(x+2) = x+1+\dfrac{-5}{x+2} \\ \underline{-(x^2+2x)} \\ \qquad x-3 \\ \qquad \underline{-(x+2)} \\ \qquad\quad -5 \end{array}$$

Mithilfe der Polynomdivision ergibt sich die Darstellung des Funktionsterms als Summe.

$$f(x) = \underbrace{x+1}_{f_A(x)} + \underbrace{\frac{-5}{x+2}}_{r(x)}$$

Ganzrationaler Anteil: $f_A(x) = x+1$

Echt gebrochener Rest: $r(x) = \dfrac{-5}{x+2}$ mit $\lim\limits_{x \to \pm\infty} r(x) = 0$

Der ganzrationale Anteil ist hier ein linearer Term. Für den Restterm $r(x)$ gilt wie oben $r(x) \to 0$ für $x \to \pm\infty$.

Allgemein formuliert lässt sich jede unecht gebrochenrationale Funktion $f(x)$ durch eine Polynomdivision in zwei Anteile zerlegen:

- in einen ganzrationalen Anteil $f_A(x)$
- und einen echt gebrochenen Restterm $r(x)$.

Zerlegung mithilfe einer Polynomdivision

$$f(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ganz-} \\ \text{rational}}}{f_A(x)} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{echt ge-} \\ \text{brochen}}}{r(x)}$$

Für das Grenzwertverhalten des echt gebrochenen Restterms gilt: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} r(x) = 0$.

x-Achse als Asymptote

Wir betrachten zunächst den Fall, dass die gegebene gebrochenrationale Funktion echt gebrochen ist. In diesem Fall ist keine Polynomdivision durchzuführen.

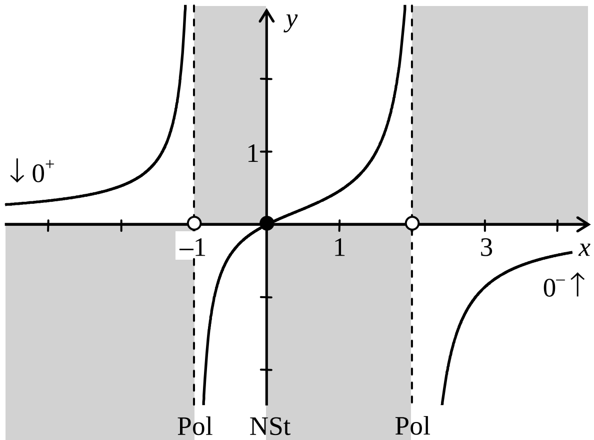
Beispiel (x-Achse als Asymptote)

Betrachtet wird $f(x)=\dfrac{-x}{x^2-x-2}$.

- **Faktorisierung**: $f(x)=\dfrac{-x}{(x+1)\cdot(x-2)}$
  – Nullstelle: $x = 0$ (einf. mit VzW)
  – Polstellen: $x = -1$ (einf. mit VzW)
  $x = 2$ (einf. mit VzW)
- **Vorzeichentabelle**

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f(x)$		+	mit VzW Polst.	−	0 mit VzW	+	mit VzW Polst.	−	

Testwert: $f(1)=0,5>0$



Grenzwerte:

$\lim\limits_{x\to -1^{\pm}} f(x)=\mp\infty$ und $\lim\limits_{x\to 2^{\pm}} f(x)=\mp\infty$

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)=0^{\mp}$

- **Grenzwertverhalten für $x\to\pm\infty$**
  Ohne Polynomdivision ergibt sich die Zerlegung:

$$f(x)=\underbrace{0}_{f_A(x)}+\underbrace{\frac{-x}{x^2-x-2}}_{r(x)}.$$

Asymptote: $f_A(x)=0$ (x-Achse)

Dabei gilt:
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} r(x)=0$ und

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_A(x)=0.$

Das Nennerpolynom dominiert wegen des höheren Grades über das Zählerpolynom.

Anschaulich bedeutet dies, dass sich der Graph der Funktion f für $x\to-\infty$ und auch für $x\to+\infty$ immer mehr der x-Achse anschmiegt, jedoch nicht mit ihr zusammenfällt. Man sagt: Die x-Achse ist **Asymptote** für $x\to\pm\infty$.

Allgemein lässt sich für eine echt gebrochenrationale Funktion feststellen, dass bezüglich des Grenzwertverhaltens für $x\to\pm\infty$ das Nennerpolynom aufgrund des höheren Grades über das Zählerpolynom dominiert. Es kann folgende Regel formuliert werden:

Grenzwerte für $x\to\pm\infty$ bei echt gebrochenrationalen Funktionen

Sei f eine echt gebrochenrationale Funktion. Dann besitzt f für $x\to\pm\infty$ den Grenzwert 0:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

Die x-Achse mit der Gleichung $y = 0$ ist **Asymptote** für den Graphen der Funktion.

Zählergrad < Nennergrad

Waagerechte Asymptote

Wir betrachten eine gebrochenrationale Funktion, bei der Zähler- und Nennergrad übereinstimmen. In diesem Fall ist eine Polynomdivision möglich.

Beispiel (Waagerechte Asymptote)

Betrachtet wird $f(x)=\dfrac{2x+2}{x-1}$.

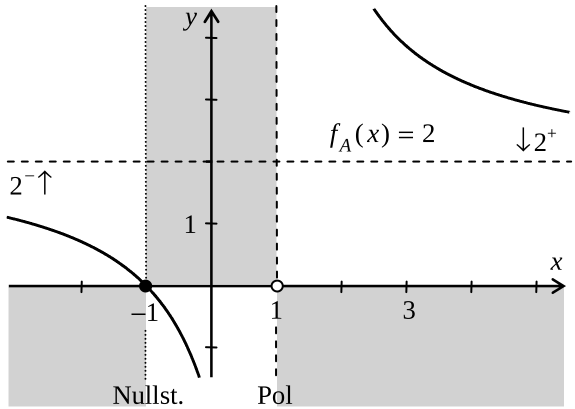
- **Faktorisierung**: $f(x)=\dfrac{2\cdot(x+1)}{x-1}$

  – Nullstelle: $x=-1$ (einfach, mit VzW)
  – Polstelle: $x=1$ (einfach, mit VzW)

- **Vorzeichentabelle**

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f(x)$	+	0 mit VzW	−	| mit VzW Polst.	+

Testwert: $f(0)=-2<0$



Grenzwerte:
$\lim\limits_{x\to 1^\pm} f(x)=\pm\infty$ und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=2^\pm$

- **Grenzwertverhalten für $x\to\pm\infty$**

  Die Polynomdivision ergibt die Zerlegung:

$$f(x)=\underbrace{2}_{f_A(x)}+\underbrace{\frac{4}{x-1}}_{r(x)}.$$

Polynomdivision durch $(x-1)$

$$\begin{array}{l} (2x+2):(x-1)=2+\dfrac{4}{x-1} \\ \underline{-(2x-2)} \\ \quad 4 \end{array}$$

Dabei gilt: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} r(x)=0$ und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_A(x)=2$.

Das Nennerpolynom dominiert bei $r(x)$ wegen des höheren Grades über das Zählerpolynom.

Asymptote: $f_A(x)=2$ (Parallele zur x-Achse)

Der Graph der Funktion f schmiegt sich für $x\to-\infty$ und auch für $x\to+\infty$ immer mehr einer Parallelen zur x-Achse an, fällt jedoch nicht mit ihr zusammen. Man sagt: Die Gerade parallel zur x-Achse mit der Gleichung $f_A(x)=2$ ist **waagerechte Asymptote**.

Der Term der waagerechten Asymptote lässt sich auch ohne Polynomdivision am Funktionsterm von f ablesen. Er ergibt sich als Quotient der Koeffizienten der höchsten x-Potenzen des Zähler- und Nennerpolynoms.

$$\boxed{f_A(x)=\frac{2}{1}=2}$$

Allgemein kann folgende Regel formuliert werden:

Grenzwerte für $x\to\pm\infty$ bei unecht gebrochenrationalen Funktionen

Für $f(x)=\dfrac{a_n x^n+\ldots+a_0}{b_n x^n+\ldots+b_0}$ gilt: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{a_n}{b_n}$.

Zählergrad = Nennergrad

Die Parallele zur x-Achse $f_A(x)=\dfrac{a_n}{b_n}$ ist **waagerechte Asymptote** von G_f.

Schiefe Asymptote

Wir betrachten unecht gebrochenrationale Funktionen, bei denen der Zählergrad um 1 größer als der Nennergrad ist. Hierbei ist eine Polynomdivision durchführbar.

Beispiel (Schiefe Asymptote)

Betrachtet wird $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x+1}$.

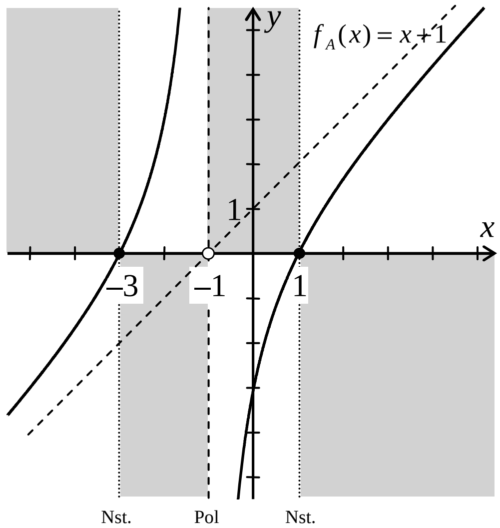
- **Faktorisierung**: $f(x)=\dfrac{(x+3)\cdot(x-1)}{(x+1)}$

  – Nullstellen: $x=-3$ (einf., mit VzW)
  $x=1$ (einf., mit VzW)
  – Polstelle: $x=-1$ (einf., mit VzW)

- **Vorzeichentabelle**

x	$-\infty$	-3		-1		1	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0 mit VzW	$+$	| mit VzW Polst.	$-$	0 mit VzW	$+$

Testwert: $f(0)=-3<0$



Grenzwerte:
$\lim\limits_{x\to-1^{\pm}} f(x)=\mp\infty$ und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$

- **Grenzwertverhalten für $x\to\pm\infty$**
  Mithilfe einer Polynomdivision ergibt sich die Zerlegung:

$$f(x)=\underbrace{x+1}_{f_A(x)}+\underbrace{\frac{-4}{x+1}}_{r(x)}.$$

Polynomdivision durch $(x+1)$

$$\begin{array}{l} (x^2+2x-3):(x+1)=x+1+\frac{-4}{x+1} \\ \underline{-(x^2+\;\;x)} \\ \qquad x-3 \\ \quad \underline{-(x+1)} \\ \qquad\;\; -4 \end{array}$$

Dabei gilt: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} r(x)=0$

und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_A(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x+1)=\pm\infty$.

Asymptote: $f_A(x)=x+1$ (schiefe Gerade)

Der Graph der Funktion f schmiegt sich für $x\to-\infty$ und auch für $x\to+\infty$ immer mehr einer schiefen Geraden an. Man sagt: Der Graph nähert sich für $x\to\pm\infty$ einer **schiefen Asymptote**.

Allgemein kann folgende Regel formuliert werden:

Grenzwerte für $x\to\pm\infty$ bei unecht gebrochenrationalen Funktionen

Sei f eine unecht gebrochenrationale Funktion, bei der der Zählergrad um 1 größer ist als der Nennergrad. Dann gilt

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty.$$

Zählergrad = Nennergrad + 1

Die Asymptote für $x\to\pm\infty$ ist eine **„schiefe“ Gerade**. Eine Gleichung der zugehörigen linearen Funktion erhält man mithilfe der Polynomdivision.

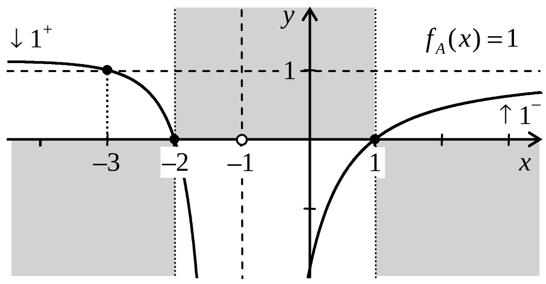
Schnittpunkt und Annäherung an die Asymptote

Für den Restterm, der sich bei der Polynomdivision einer unecht gebrochenrationalen Funktion ergibt, gilt die Darstellung: $r(x) = f(x) - f_A(x)$.

Einer möglichen Nullstelle von $r(x)$ sowie dem Vorzeichen von $r(x)$ für $x \to \pm\infty$ kommt bezüglich des Verlaufs des Graphen von G_f eine besondere Bedeutung zu.

Beispiel (Untersuchung des Restterms)

Betrachtet wird $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x + 1}$.



- **Faktorisierung**: $f(x) = \dfrac{(x+2)\cdot(x-1)}{(x+1)^2}$
  - – Nullstellen: $x = -2$ (einfach, mit VzW)
    $x = 1$ (einfach, mit VzW)
  - – Polstelle: $x = -1$ (doppelt, ohne VzW)

- **Zerlegung durch eine Polynomdivision**

$$f(x) = \underbrace{1}_{f_A(x)} + \underbrace{\frac{-x-3}{(x+1)^2}}_{r(x)}$$

Polynomdivision durch $(x^2 + 2x + 1)$

$$\begin{array}{l} (x^2 + x - 2) : (x^2 + 2x + 1) = 1 + \dfrac{-x-3}{x^2+2x+1} \\ \underline{-(x^2 + 2x + 1)} \\ \quad -x - 3 \end{array}$$

- **Annäherung an die Asymptote**

  Mithilfe des Vorzeichens des Restterms $r(x)$ kann die Art der Annäherung des Graphen G_f für $x \to \pm\infty$ an die Asymptote beschrieben werden.

  – $r(x) = f(x) - f_A(x) = \dfrac{-x-3}{(x+1)^2} > 0$ für $x \to -\infty$

  Der Graph nähert sich der Asymptote von oben.

  – $r(x) = f(x) - f_A(x) = \dfrac{-x-3}{(x+1)^2} < 0$ für $x \to +\infty$

  Der Graph nähert sich der Asymptote von unten.

Deutung des Vorzeichens des Restterms
Das Vorzeichen von
$r(x) = f(x) - f_A(x)$
beschreibt für $x \to \pm\infty$ die Annäherung des Graphen an die Asymptote.

- **Schnittpunkt mit der Asymptote**

  Einer möglichen Nullstelle des Restterms kommt eine besondere Bedeutung zu. Es gilt:

  $$r(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - f_A(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f_A(x).$$

  Anschaulich bedeutet dies, dass die Asymptote f_A den Graphen G_f an den Stellen schneidet, für die die Restfunktion r den Wert null annimmt:

  $$r(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x-3}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow -x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3.$$

Deutung einer Nullstelle des Restterms
Eine Nullstelle von
$r(x) = f(x) - f_A(x)$
gibt eine Schnittstelle des Graphen mit der Asymptote an.

Wegen $f_A(-3) = 1$ schneidet G_f die waagerechte Asymptote im Punkt $S(-3|1)$.

- **Abstand zur Asymptote**

  Mithilfe des Restterms lässt sich nicht nur die Annäherung des Graphen an die Asymptote beschreiben. Er kann auch dazu verwendet werden, den Abstand an einer bestimmten Stelle zu berechnen.
  Für die betrachtete Funktion gilt z.B. für die Stelle $x = 3$:

  $$d = |r(3)| = \left|\frac{-3-3}{(3+1)^2}\right| = \left|-\frac{6}{16}\right| = \frac{3}{8} = 0{,}375.$$

  An der Stelle $x = 3$ hat der Graph von der Asymptote den Abstand 0,375.

> *Deutung des Betrags des Restterms*
> Der Betrag
> $$|r(x)| = |f(x) - f_A(x)|$$
> beschreibt für eine Stelle x den Abstand des Graphen G_f von der Asymptote.
> Dieser Abstand strebt für $x \to \pm\infty$ gegen 0.

Aufgaben

15. Zerlegen Sie die unecht gebrochenrationale Funktion f in einen ganzrationalen und einen echt gebrochenrationalen Anteil.

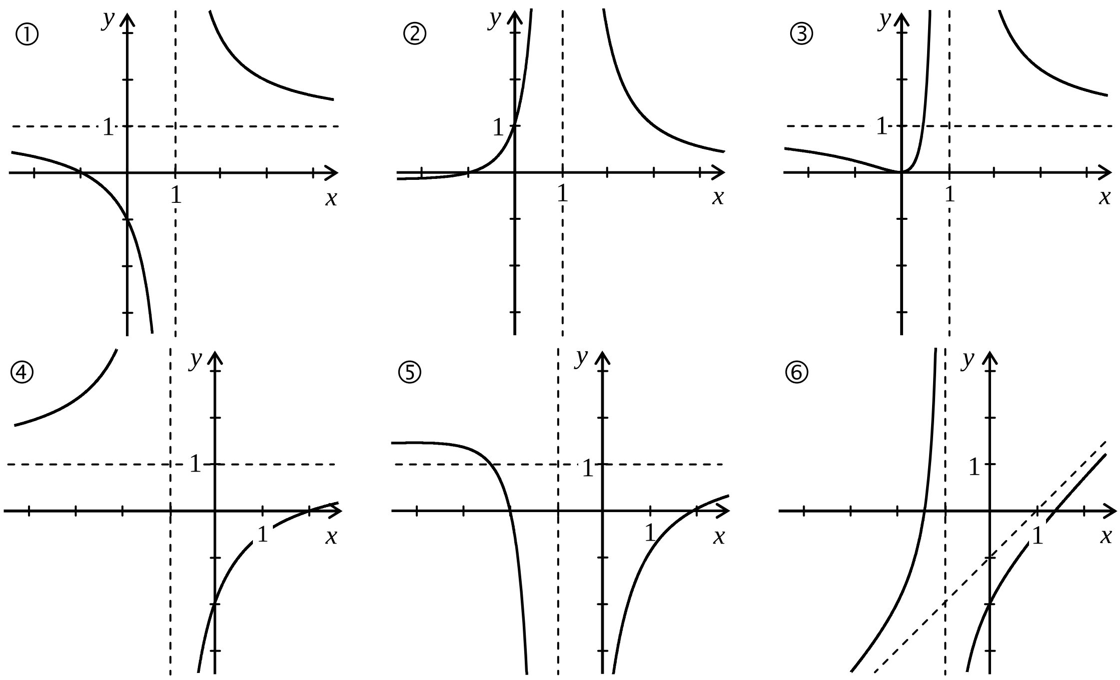
    a) $f(x) = \frac{x+5}{x-2}$ b) $f(x) = \frac{x^2+3}{x-2}$ c) $f(x) = \frac{x^2+3x-5}{x}$

    d) $f(x) = \frac{x^2-x+2}{x-2}$ e) $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x+1}$ f) $f(x) = \frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}$

16. Ordnen Sie den Funktionsgleichungen den richtigen Graphen zu. Begründen Sie Ihre Entscheidung mit möglichst vielen Argumenten.

    a) $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ b) $f(x) = \frac{x^2-2}{x+1}$ c) $f(x) = \frac{x^2-4}{(x+1)^2}$

    d) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ e) $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$ f) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x+1}$



17.* Zerlegen Sie die unecht gebrochenrationale Funktion f in einen ganzrationalen und einen echt gebrochenrationalen Anteil ($a \neq 0$).

a) $f(x)=\frac{ax-1}{x-2}$ b) $f(x)=\frac{ax^3}{x^2-2}$ c) $f(x)=\frac{ax^3-x^2+1}{ax^2+1}$

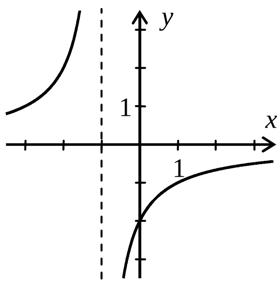
18. Bestimmen Sie eine Gleichung der Asymptote zu der gebrochenrationalen Funktion f und untersuchen Sie, ob es Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit der Asymptote gibt. Geben Sie die Schnittpunkte gegebenenfalls an.

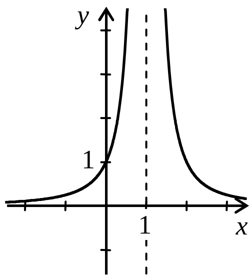
a) $f(x)=\frac{2x-3}{x-2}$ b) $f(x)=\frac{1-x}{x+1}$ c) $f(x)=\frac{x^2-2x}{x^2+3}$

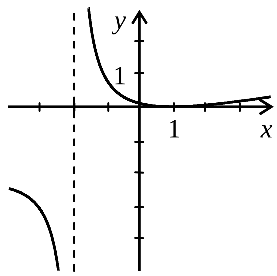
d) $f(x)=\frac{2x^2+3}{x^2+1}$ e) $f(x)=\frac{x^2}{x+3}$ f) $f(x)=\frac{x^2-2}{x^2+x}$

19. Der angegebene Funktionsterm passt nicht zu dem dargestellten Graphen. Was ist hier falsch? Geben Sie mindestens eine Begründung an.

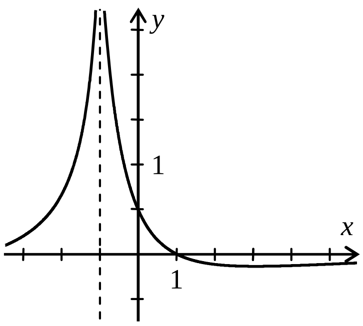
a) $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ b) $f(x)=\frac{-1}{x^2+1}$ c) $f(x)=\frac{x-1}{(x+2)^2}$

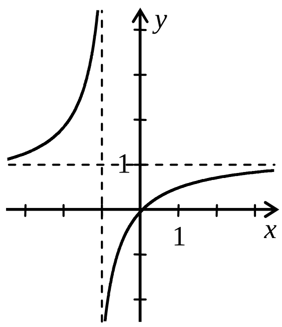


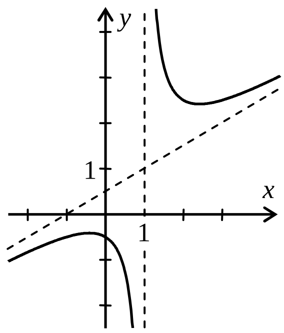


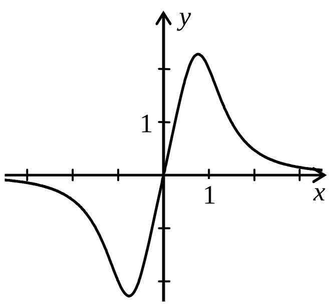


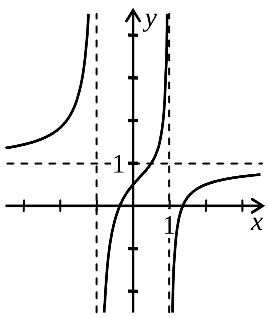
20. Lesen Sie die möglichen Polstellen und die Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ ab. Bestimmen Sie anhand der Abbildung eine Gleichung der Asymptote und beschreiben Sie die Annäherung des Graphen an die Asymptote für $x \to \pm\infty$.

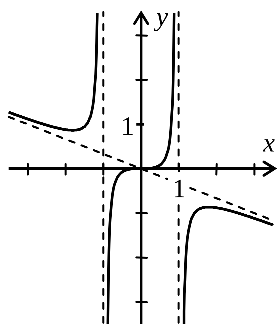
a)


b)


c)


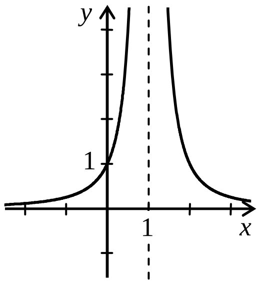
d)


e)


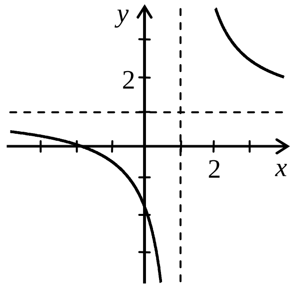
f)


21. Geben Sie für die im Folgenden dargestellten gebrochenrationalen Funktionen eine mögliche Funktionsgleichung an.

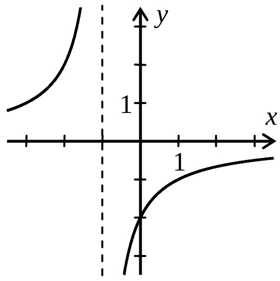
a)



b)

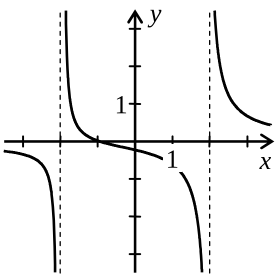


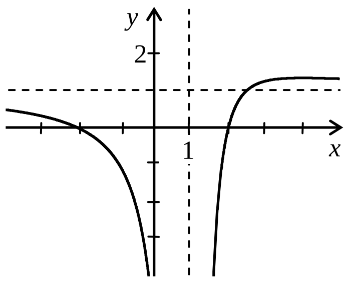
c)

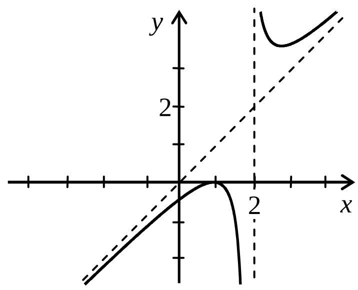


22. Begründen Sie anhand des Funktionsterms die Lage und die Art der Nullstellen und Polstellen. Bestimmen Sie die Asymptote, mögliche Schnittstellen der Asymptote mit G_f sowie die Annäherung von G_f an die Asymptote.

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-2x+1}$ c) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x-2}$







23. Bestimmen Sie (gegebenenfalls mithilfe einer Polynomdivision) eine Gleichung der Asymptote der gebrochenrationalen Funktion f.
Untersuchen Sie, ob sich der Funktionsgraph für $x \to -\infty$ und für $x \to +\infty$ der Asymptote von oben oder von unten nähert.

a) $f(x) = \dfrac{9}{x-4}$ b) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+4}$ c) $f(x) = \dfrac{4x-2}{x+2}$

d) $f(x) = \dfrac{-x}{(x+2)^2}$ e) $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x-2}$ f) $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$

24. Bestimmen Sie eine Gleichung der Asymptote zu der gebrochenrationalen Funktion f und geben Sie gegebenenfalls die Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit der Asymptote an. Geben Sie auch $D_{\max}$ an.
Berechnen Sie für die Stellen $x = 10$ und $x = -20$ den Abstand des Graphen von der Asymptote.

a) $f(x) = x + 1 + \dfrac{2x}{x^2-9}$ b) $f(x) = x - 1 + \dfrac{x^2-3x}{x^3-8}$

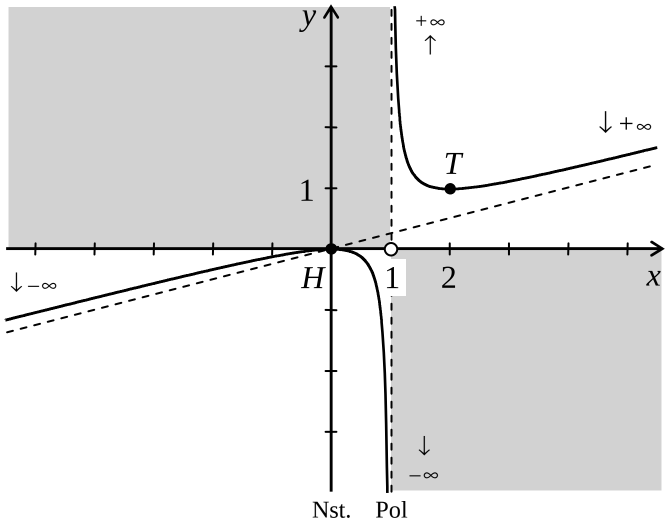
W 4.5 Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten

In den bisherigen Beispielen wurden gebrochenrationale Funktionen auf mögliche Nullstellen, Polstellen und Asymptoten untersucht. Anhand der Ergebnisse kann meist schon eine aussagekräftige Skizze des Graphen erstellt werden.
Zu einer vollständigen Untersuchung einer gebrochenrationalen Funktion gehört auch die rechnerische Bestimmung der Extrem- und Wendepunkte.

Beispiel (Extrempunkte und Monotonieintervalle bestimmen)

Wir untersuchen die Funktion $f: D_{\max} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{x-1}$.

Anhand des Funktionsterms lassen sich direkt folgende Informationen gewinnen:



- **Nullstelle**
  $x = 0$ (doppelt, ohne VzW)
- **Polstelle**
  $x = 1$ (einfach, mit VzW)
- **Extrempunkte**
  – *Erste Ableitung*

$$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{(x-1) \cdot 2x - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{x \cdot (x-2)}{(x-1)^2}$$

  – *Notwendige Bedingung*
  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$ (beide einfach, mit VzW)

  – *Hinreichende Bedingung*
  Vorzeichentabelle für $f'(x)$

x	$-\infty$		0		1		2	3	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 mit VzW HP	−	❙ ohne VzW Polst.	−	0 mit VzW TP	+	

Vielfachheit der Polstelle von f' beachten (hier doppelt).
Testwert:
$f'(3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3 \cdot (3-2)}{(3-1)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3 \cdot 1}{2^2} = \frac{3}{16} > 0$

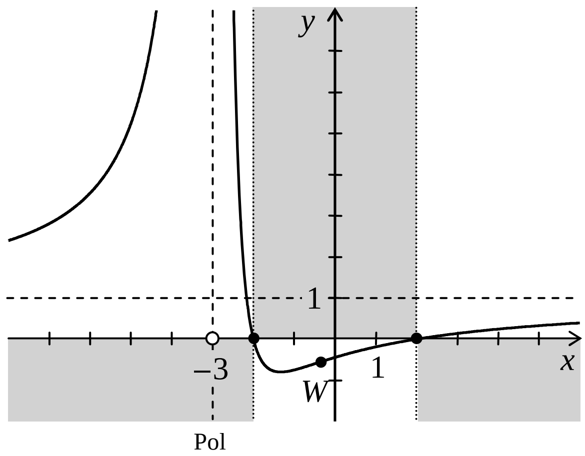
Angabe der Extrempunkte
Zusammen mit $f(0) = 0$ und $f(2) = 1$ ergibt sich $H(0\,|\,0)$ und $T(2\,|\,1)$.

- **Monotonieintervalle** (siehe Vorzeichentabelle für $f'(x)$)
  f ist in $]-\infty; 0]$ und in $[2; +\infty[$ streng monoton wachsend.
  f ist in $[0; 1[$ und in $]1; 2]$ streng monoton fallend.
  Die hinreichende Bedingung lässt sich auch mithilfe der zweiten Ableitung überprüfen. Diese müsste aber im vorliegenden Fall nur zu diesem Zweck berechnet werden.

Beispiel (Wendepunkte und Krümmungsintervalle bestimmen)

Wir untersuchen die Funktion $f: D_{\max} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \dfrac{x^2-4}{(x+3)^2}$.

Anhand des Funktionsterms lassen sich direkt folgende Informationen gewinnen:



- **Nullstellen**

  $x^2-4=0 \Leftrightarrow x=-2 \vee x=2$

  (beide einfach, mit VzW)

- **Polstelle**

  $x=-3$ (doppelt, ohne VzW)

- **Wendepunkte**

  Zur Berechnung der Wendepunkte ist die erste und die zweite Ableitung zu bestimmen.

  – *Ableitungen*

  $$f'(x)=\frac{(x+3)^2\cdot 2x-(x^2-4)\cdot 2\cdot (x+3)}{(x+3)^4}$$

  $$=\frac{(x+3)\cdot 2x-(x^2-4)\cdot 2}{(x+3)^3}=\frac{2x^2+6x-2x^2+8}{(x+3)^3}=\frac{6x+8}{(x+3)^3}=2\cdot\frac{3x+4}{(x+3)^3}$$

  $$f''(x)=2\cdot\frac{(x+3)^3\cdot 3-(3x+4)\cdot 3\cdot (x+3)^2}{(x+3)^6}=2\cdot\frac{(x+3)\cdot 3-(3x+4)\cdot 3}{(x+3)^4}=6\cdot\frac{(x+3)-(3x+4)}{(x+3)^4}$$

  $$=6\cdot\frac{-2x-1}{(x+3)^4}=-6\cdot\frac{2x+1}{(x+3)^4}$$

  – *Notwendige Bedingung*

  $f''(x)=0 \Leftrightarrow 2x+1=0 \Leftrightarrow x=-0{,}5$ (einfach, mit VzW)

  – *Hinreichende Bedingung*

  Vorzeichentabelle für $f''(x)$

x	$-\infty$		-3		$-0{,}5$	1	$+\infty$
$f''(x)$		+	❙ ohne VzW Polst.	+	0 mit VzW TP	−	

  Vielfachheit der Polstelle von f'' beachten (hier vierfach).

  Testwert:

  $f''(1)=-6\cdot\frac{2\cdot 1+1}{(1+3)^4}=-6\cdot\frac{3}{216}=-\frac{9}{128}<0$

  Angabe des Wendepunktes

  Mit $f(-0{,}5)=\dfrac{(-0{,}5)^2-4}{(-0{,}5+3)^2}=\dfrac{-3{,}75}{2{,}5^2}=\dfrac{-3{,}75}{6{,}25}\underset{1{,}25}{=}-\dfrac{3}{5}=-0{,}6$

  ergibt sich $W(-0{,}5|-0{,}6)$.

- **Krümmungsintervalle** (siehe Vorzeichentabelle für $f''(x)$)

  G_f ist in $]-\infty;-3[$ und in $]-3;-0{,}5]$ linksgekrümmt.

  G_f ist in $[-0{,}5;+\infty[$ rechtsgekrümmt.

Aufgaben

25. Berechnen Sie die erste Ableitung.

a) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$ b) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-3}$ c) $f(x)=\dfrac{-x^2}{x^2-x-2}$ d) $f(x)=\dfrac{x+1}{(x+3)^2}$

Terme zur Kontrolle: $-\dfrac{3}{(x-2)^2}$; $\dfrac{x^2-6x}{(x-3)^2}$; $\dfrac{x^2+4x}{(x^2-x-2)^2}$; $\dfrac{-x+1}{(x+3)^3}$

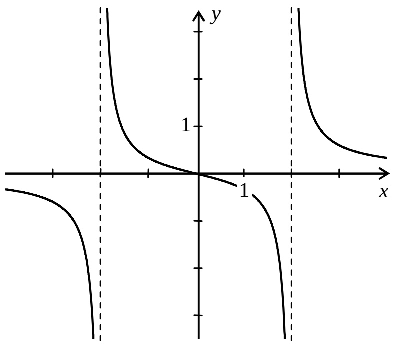
26. Berechnen Sie die erste und die zweite Ableitung.

a) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ b) $f(x)=\dfrac{(x+2)^2}{x-4}$ c) $f(x)=\dfrac{x^2}{(x+1)^2}$

Terme zur Kontrolle: $-\dfrac{1}{(x-1)^2}$, $\dfrac{2}{(x-1)^3}$; $\dfrac{x^2-8x-20}{(x-4)^2}$, $\dfrac{72}{(x-4)^3}$; $\dfrac{2x}{(x+1)^3}$, $\dfrac{-4x+2}{(x+1)^4}$

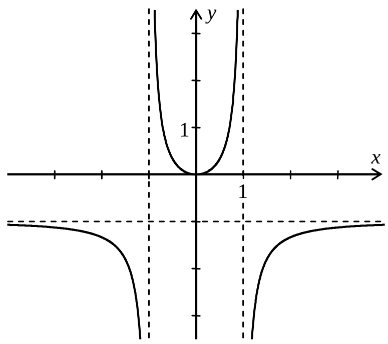
27. Bestimmen Sie $D_{\max}$ und eine Gleichung der Asymptote. Verifizieren Sie die Lage der Nullstellen, der Extrem- und der Wendepunkte.
Geben Sie zusätzlich die Monotonie- und die Krümmungsintervalle an.

a) $f: D_{\max} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{x}{x^2-4}$



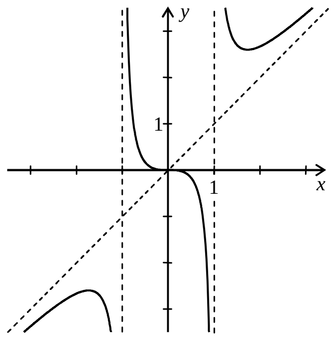
Kontrolle: $f''(x)=\dfrac{2x^3+24x}{(x^2-4)^3}$

b) $f: D_{\max} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{-x^2}{x^2-1}$



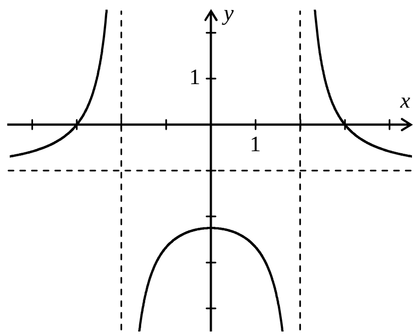
Kontrolle: $f''(x)=-\dfrac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$

c) $f: D_{\max} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{x^3}{x^2-1}$



Kontrolle: $f''(x)=\dfrac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}$

d) $f: D_{\max} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{9-x^2}{x^2-4}$



Kontrolle: $f''(x)=\dfrac{10\cdot(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$

28. Erstellen Sie eine Skizze von G_f ($D_{\max}$, Pol- und Nullstellen, Asymptote mit möglicher Schnittstelle mit G_f und die Annäherung von G_f an die Asymptote). Bestätigen Sie durch Rechnung die Lage möglicher Extrem- und Wendepunkte.

a) $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$ c) $f(x) = \dfrac{0{,}25 \cdot x^2}{x+1}$

29. Gegeben ist die Funktion $f: D_{\max} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{x^2 - 5}{x - 3}$.

Bestimmen Sie $D_{\max}$, die Null- und die Polstellen, die Asymptote, die möglichen Extrem- und Wendepunkte und zeichnen Sie mit diesen Informationen den Graphen von f.

30. Gegeben ist die Funktion $f: D_{\max} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{4x - x^3}{x^2 - 1}$.

a) Bestimmen Sie $D_{\max}$, die Null- und die Polstellen von f.
b) Prüfen Sie, ob der Funktionsgraph symmetrisch ist.
c) Zeigen Sie, dass für den Funktionsterm von f gilt: $f(x) = -x + \dfrac{3x}{x^2 - 1}$.
Geben Sie die Asymptote und das Grenzwertverhalten für $x \to \pm\infty$ an.
d) Untersuchen Sie den Funktionsgraphen auf Extrempunkte. Geben Sie die Monotonieintervalle an.
e) Bestimmen Sie die Wendepunkte des Graphen.
f) Zeichnen Sie den Graphen anhand der vorliegenden Informationen.
g) Für welche Werte mit $x > 1$ beträgt der Abstand des Graphen zur Asymptoten weniger als 0,8?

31. Gegeben ist die Funktion $f: D_{f_{\max}} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$.

a) Bestimmen Sie $D_{f_{\max}}$, die Null- und die Polstellen.
b) Geben Sie eine Gleichung der Asymptote an.
c) Bestimmen Sie die Extrempunkte. Zeichnen Sie mit den vorliegenden Informationen den Graphen der Funktion f.
d) Betrachtet wird nun die Funktion $g: D_{g_{\max}} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{f(x)}$.
Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge, die Gleichung der Asymptote, die Null- und Polstellen sowie die Extrempunkte.
Welche Informationen lassen sich aus den obigen Teilaufgaben übertragen?
e) Berechnen Sie die Schnittpunkte der Graphen von f und g.
f) Zeichnen Sie den Graphen von g in das vorhandene Koordinatensystem.

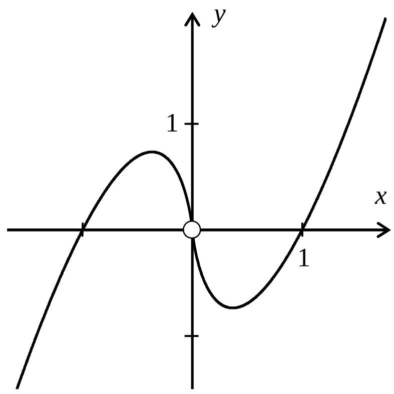
W 4.6 Behebbare Definitionslücken

Begriff der behebbaren Definitionslücke

Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion [1]

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$$

mit einer Definitionslücke an der Stelle $x_0 = 0$.
Die Funktion f ist an der Stelle 0 nicht definiert. Für die Stelle 0 ist demnach kein Funktionswert erklärt.
Betrachtet man den Graphen, so entsteht der Eindruck, dass sich die Definitionslücke „reparieren“ lässt. Man erkennt, dass für die Stelle 0 die einseitigen Grenzwerte existieren und dabei auch übereinstimmen:



$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0\,.$$

Der Graph von f besitzt an der Stelle 0 ein „Loch“. Das Grenzwertverhalten an der Stelle 0 legt nahe, den Graphen durch den Punkt $O(0\,|\,0)$ zu ergänzen. Dieser Punkt fügt sich stetig („ohne Sprung“) in das Schaubild ein. Man sagt, dass sich die Definitionslücke **stetig beheben** lässt.

Die stetige Fortsetzung der Funktion f lässt sich in diesem Fall wie folgt angeben:

$$\overline{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{, wenn } x \neq 0 \\ 0 & \text{, wenn } x = 0 \end{cases}$$

Diese Betrachtung führt zu folgender Definition:

Behebbare Definitionslücke
Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und x_0 eine Definitionslücke.
Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, so heißt x_0 **behebbare Definitionslücke**, sonst **nichtbehebbare Definitionslücke**.
Die Lücke wird durch die Festlegung $\overline{f}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ **stetig behoben**.
Es entsteht so eine neue Funktion $\overline{f}$, die so genannte **stetige Fortsetzung von *f***.

Bei den bisherigen Untersuchungen von gebrochenrationalen Funktionen waren die Definitionslücken stets Polstellen (Unendlichkeitsstellen). Sie sind dadurch gekennzeichnet, dass die einseitigen Grenzwerte stets uneigentlich sind. Im Sinne der obigen Betrachtung handelt es sich bei Polstellen um nichtbehebbare Definitionslücken.
Wir wollen im Folgenden Situationen betrachten, für die bei gebrochenrationalen Funktionen auch behebbare Definitionslücken auftreten.

[1] Der Graph gehört zu der Funktion mit der Gleichung $f(x) = x \cdot \ln(x^2)$. Die behebbare Definitionslücke an der Stelle 0 entsteht hier nicht durch Erweitern des Funktionsterms.

Behebbare Definitionslücken bei gebrochenrationalen Funktionen

Wir betrachten eine gebrochenrationale Funktion $f(x) = \dfrac{p_n(x)}{q_m(x)}$.

Nach dem Polstellenkriterium handelt es sich bei einer Stelle x_0 um eine Polstelle, wenn x_0 Nullstelle des Nennerpolynoms q_m, nicht aber des Zählerpolynoms p_n ist.

Wir greifen den Fall auf, dass eine Stelle x_0 gleichzeitig Nullstelle des Nennerpolynoms q_m **und** des Zählerpolynoms p_n ist. In diesem Fall tritt in den Faktorisierungen von Zähler- und auch Nennerpolynom der Linearfaktor $(x - x_0)$ auf.
Zu beachten sind dabei die entsprechenden Vielfachheiten.

Wir untersuchen die möglichen Fälle anhand konkreter Beispiele.

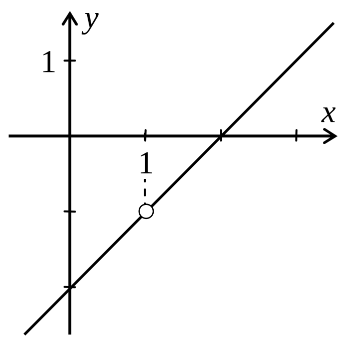
Beispiel (Behebbare Definitionslücke)

Wir betrachten die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 2}{x-1}$ mit $D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

- Faktorisierung: $f(x) = \dfrac{(x-1)\cdot(x-2)}{x-1}$

  Der Linearfaktor $(x - 1)$ tritt sowohl im Zähler- als auch im Nennerpolynom mit gleicher Vielfachheit auf und lässt sich vollständig kürzen.
- Gekürzter Term: $\overline{f}(x) = x - 2$

  $\overline{f}$ ist an der Stelle $x_0 = 1$ mit $\overline{f}(1) = -1$ definiert.
- Graph von f:



- Entscheidung: $x_0 = 1$ ist eine behebbare Definitionslücke.

  Stetige Fortsetzung: $\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{, wenn } x_0 \neq 1 \\ -1 & \text{, wenn } x_0 = 1 \end{cases}$

  Es ist zu bemerken, dass sich $\overline{f}$ in diesem Fall auch ohne Fallunterscheidung schreiben lässt.
  Es gilt: $\overline{f}(x) = x - 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beispiel (Behebbare und nichtbehebbare Definitionslücke)

Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - x}$ mit $D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.

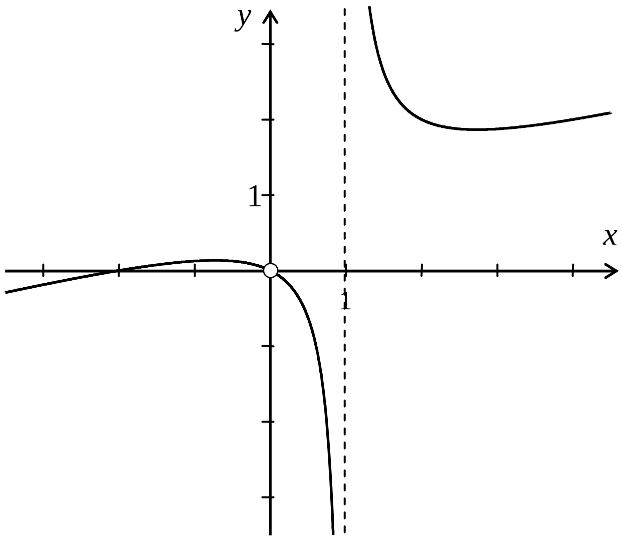
- Faktorisierung: $f(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2 \cdot (x+2)}{x \cdot (x-1)}$

  Der Faktor *x* tritt im Zählerpolynom mit größerer Vielfachheit als im Nennerpolynom auf. Nach dem Kürzen bleibt der Faktor *x* im Zählerpolynom erhalten.

- Gekürzter Term: $\overline{f}(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{x \cdot (x+2)}{x-1}$

  $\overline{f}$ ist in $x_0 = 0$ mit $\overline{f}(0) = 0$ definiert.

- Graph von *f* :



- Entscheidung: $x_0 = 0$ ist eine behebbare Definitionslücke.

  Stetige Fortsetzung: $\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{wenn } x_0 \neq 0 \\ 0, & \text{wenn } x_0 = 0 \end{cases}$

  Auch in diesem Fall kann $\overline{f}$ ohne Fallunterscheidung geschrieben werden.

  Es gilt: $\overline{f}(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{x \cdot (x+2)}{x-1}$ für alle $D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

An der Definitionslücke 0 lässt sich der Graph „reparieren“. Die Stelle 0 ist stetig behebbar.

Hiervon zu unterscheiden ist das Verhalten der Funktion an der zweiten Definitionslücke 1. Betrachtet man den gekürzten Funktionsterm $\overline{f}(x)$, so erkennt man, dass der zugehörige Linearfaktor $(x - 1)$ weiter im Nennerpolynom auftritt. Die Stelle 1 ist nicht stetig behebbar. Es handelt sich um eine Polstelle, die auch bei der stetigen Ergänzung $\overline{f}$ auftritt.

Beispiel (Nichtbehebbare Definitionslücke)

Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{x-2}{x^3 - 4x^2 + 4x}$ mit $D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$.

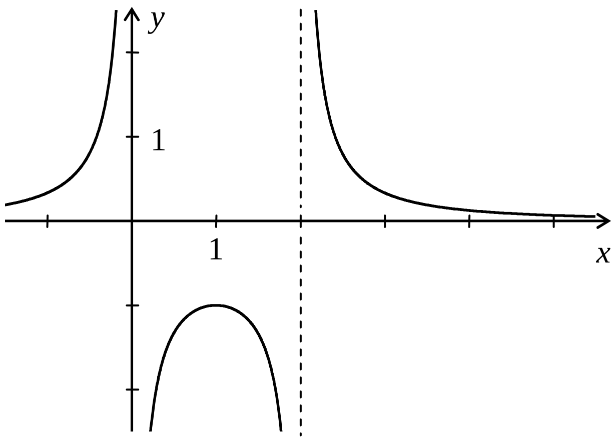
- Faktorisierung: $f(x) = \frac{x-2}{x^3 - 4x^2 + 4x} = \frac{x-2}{x \cdot (x-2)^2}$

  Der Linearfaktor $(x-2)$ tritt im Nennerpolynom mit größerer Vielfachheit als im Zählerpolynom auf. Nach dem Kürzen bleibt der Linearfaktor $(x-2)$ im Nennerpolynom erhalten.

- Gekürzter Term: $\overline{f}(x) = \frac{1}{x \cdot (x-2)}$

  $\overline{f}$ ist an der Stelle $x_0 = 2$ nicht definiert.

- Graph von f:



- Entscheidung: $x_0 = 2$ ist eine Polstelle. Es gibt keine stetige Fortsetzung.

Gebrochenrationale Funktionen können als Definitionslücken nur Polstellen oder stetig behebbare Definitionslücken aufweisen. Eine Definitionslücke kann nur dann stetig behebbar sein, wenn die ganzrationalen Funktionen im Nenner und Zähler an derselben Stelle eine Nullstelle haben.

Im Einzelnen lässt sich feststellen:

- Ist x_0 eine Nullstelle des Nenner- **und zugleich** des Zählerpolynoms, so tritt in der Faktorisierung der Linearfaktor $(x - x_0)$ im Zähler **und** im Nenner auf. Der Linearfaktor $(x - x_0)$ lässt sich somit kürzen.
- Anhand des gekürzten Funktionsterms kann man entscheiden, ob es sich bei x_0 um eine behebbare Definitionslücke oder um eine Polstelle handelt:
  - Der Linearfaktor $(x - x_0)$ kommt im Nenner des gekürzten Terms nicht mehr vor. Daher ist x_0 behebbare Definitionslücke.
  - Der Linearfaktor $(x - x_0)$ kommt im Nenner des gekürzten Terms weiter vor. Daher ist x_0 Polstelle.

Aufgaben

32. Bestimmen Sie $D_{\max}$ und vereinfachen Sie den Funktionsterm in $D_{\max}$.
Lesen Sie an dem vereinfachten Funktionsterm die stetige Fortsetzung an der Definitionslücke ab.

a) $f: D_{\max} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \dfrac{x^2+4x+4}{x+2}$

b) $f: D_{\max} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \dfrac{3x^2-15x}{x-5}$

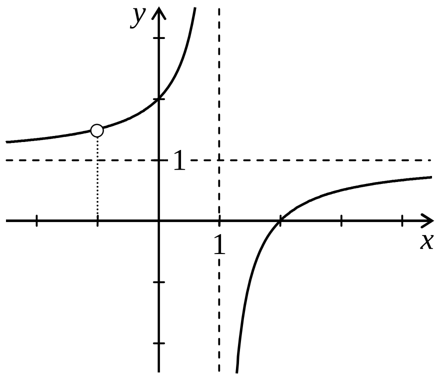
c) $f: D_{\max} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \dfrac{x^2+3x-10}{x-2}$

d) $f: D_{\max} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \dfrac{x^3-x^2}{x-1}+1$

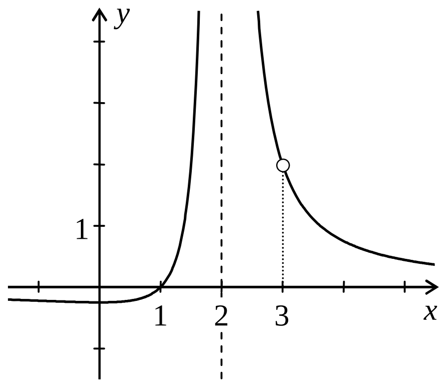
Lassen Sie sich zur Kontrolle die Funktionsgraphen darstellen.

33. Lesen Sie aus den Schaubildern die Grenzwerte an den angegebenen Definitionslücken ab. Entscheiden Sie, welche der Definitionslücken behebbar sind, und bei welchen es sich um Polstellen handelt.

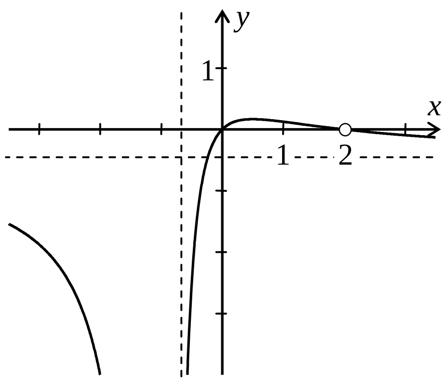
a) $x_1 = -1$; $x_2 = 1$



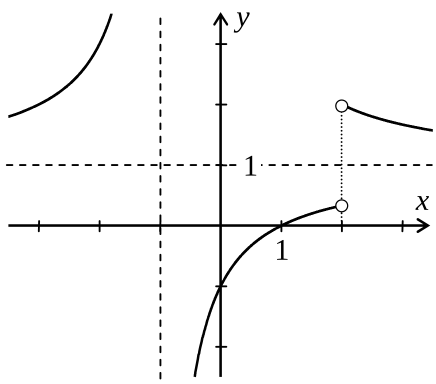
b) $x_1 = 2$; $x_2 = 3$



c) $x_1 = -1$; $x_2 = 2$



d) $x_1 = -1$; $x_2 = 2$



34. Bestimmen Sie die Definitionslücken. Entscheiden Sie, welche der Definitionslücken behebbar sind, und bei welchen es sich um Polstellen handelt.

a) $f(x) = \dfrac{16-x^2}{x+4}$

b) $f(x) = \dfrac{3x}{x-3}$

c) $f(x) = \dfrac{2x-x^2}{x-2}$

d) $f(x) = \dfrac{9-6x+x^2}{x^2-9}$

Lassen Sie sich zur Kontrolle die Funktionsgraphen darstellen.

W 4.7 Integration gebrochenrationaler Funktionen

Bekannte Integrale zu gebrochenrationalen Funktionen

Im Rahmen der Betrachtung von Integralen im Zusammenhang mit ln-Funktionen traten folgende Grundintegrale[1] auf, die auch für die Integration gebrochenrationaler Funktionen von ganz besonderer Bedeutung sind.

Integrale vom Typ $\displaystyle\int \frac{1}{ax+b}\,dx$ **mit** $a \neq 0$

Eine Stammfunktion zu $f(x)=\frac{1}{ax+b}$ ist $F(x)=\frac{1}{a}\cdot\ln|ax+b|$.

Bei unecht gebrochenrationalen Funktionen kann es vorkommen, dass dieses Grundintegral nicht direkt vorliegt, sondern sich erst nach einer Polynomdivision ergibt.

Beispiele (Anwendung des Grundintegrals)

a) $$\int_0^1 \frac{2}{3x+1}\,dx \overset{\text{(FR)}}{=} 2\cdot\int_0^1 \frac{1}{3x+1}\,dx \overset{\text{Grund-integral}}{=} 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\big[\ln|3x+1|\big]_0^1 = \frac{2}{3}\cdot\big((\ln(4)-\ln(1)\big) = \frac{2}{3}\cdot\ln(4)$$

b) $$\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx \overset{\text{Polynom-division}}{=} \int_0^1 \left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx \overset{\text{Grund-integral}}{=} \left[\frac{1}{2}x^2-x+\ln|x+1|\right]_0^1 = \frac{1}{2}-1+\ln(2) = -\frac{1}{2}+\ln(2)$$

Polynomdivision durch $(x+1)$

$$\begin{array}{l} x^2 \quad : (x+1) = x-1+\frac{1}{x+1} \\ \underline{-(x^2+x)} \\ \quad -x \\ \quad \underline{-x-1} \\ \qquad +1 \end{array}$$

Im Zusammenhang mit der ln-Funktion trat auch der Fall auf, dass im Zähler eines Bruchs (bis auf einen konstanten Vorfaktor) die Ableitung des Nenners steht.

Integrale vom Typ $\displaystyle\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx$

Eine Stammfunktion zu $f(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$ ist $F(x)=\ln|g(x)|$.

Integrale dieses Typs können auch bei gebrochenrationalen Funktionen auftreten.

Beispiel (Im Zähler steht bis auf einen Vorfaktor die Ableitung des Nenners.)

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx \overset{\text{Grund-integral}}{=} \frac{1}{2}\cdot\big[\ln|x^2+1|\big]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\big(\ln(2)-\ln(1)\big) = \frac{1}{2}\cdot\ln(2)$$

[1] Vergleiche dazu Band III, Seite 151, 152.

Partialbruchzerlegung

Für die Integration gebrochenrationaler Funktionen gibt es keine einheitliche Regel. Neben den besprochenen Regeln ergibt sich ein weiterer Ansatz durch die Zerlegung einer echt gebrochenrationalen Funktion in eine Summe aus so genannten **Partialbrüchen**. Eine solche Darstellungsform heißt **Partialbruchzerlegung**.
Wir werden uns auf Partialbruchzerlegungen der folgenden Form beschränken:

$$\frac{a\,x+b}{(x-x_1)\cdot(x-x_2)}=\frac{A}{(x-x_1)}+\frac{B}{(x-x_2)} \text{ mit } x_1 \neq x_2 \text{ und } A, B \in \mathbb{R}.$$

Im vorliegenden Fall kann man die Vorgehensweise bei der Partialbruchzerlegung in drei Schritte untergliedern.

1. **Schritt**: Zerlegung des Nenners in Linearenfaktoren $(x-x_1)$ und $(x-x_2)$
2. **Schritt**: Ansatz als Summe von Einzelbrüchen mit Konstanten A und B
3. **Schritt**: Bestimmung der Konstanten A und B mithilfe der Einsetzmethode

Wir erläutern diese Vorgehensweise anhand konkreter Beispiele.

Beispiel (Partialbruchzerlegung: konstante Funktion im Zähler)

Wir betrachten die Funktion mit der Gleichung $f(x)=\frac{2}{x^2-1}$.

1. *Zerlegung des Nenners in Linearfaktoren*
   Nach der 3. Binomischen Formel gilt: $x^2-1=(x-1)\cdot(x+1)$.
2. *Ansatz mit Einzelbrüchen*
   $$\frac{2}{(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1} \underset{\cdot(x-1)\cdot(x+1)}{\Leftrightarrow} 2=A\cdot(x+1)+B\cdot(x-1)$$
3. *Bestimmung der Konstanten A und B*
   Durch die bereits angedeutete Multiplikation mit dem Hauptnenner und direktes Kürzen gleicher Linearfaktoren ergibt sich:
   $2=A\cdot(x+1)+B\cdot(x-1)$.
   Diese Gleichung soll für alle Werte von x erfüllt sein. Eine elegante Möglichkeit, die Konstanten A und B zu bestimmen, besteht darin, geeignete Werte für x einzusetzen, wie z.B. die Nennernullstellen $x = 1$ und $x = -1$:
   $$x=1:\ 2=A\cdot 2+B\cdot 0 \Leftrightarrow A=1$$
   $$x=-1:\ 2=A\cdot 0+B\cdot(-2) \Leftrightarrow B=-1$$

Dies liefert die Zerlegung: $f(x)=\frac{2}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}+\frac{-1}{x+1}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$.

Damit ergibt sich direkt eine Stammfunktion: $F(x)=\ln|x-1|-\ln|x+1|$.

Hiermit lassen sich dann auch Integrale zur Funktion f berechnen:

$$\int_2^3 \frac{2}{x^2-1}\,dx=\left[\ln|x-1|\right]_2^3-\left[\ln|x+1|\right]_2^3=(\ln(2)-\ln(1))-(\ln(4)-\ln(3))$$
$$=\ln(2)-\ln(4)+\ln(3).$$

Beispiel (Partialbruchzerlegung: lineare Funktion im Zähler)

Wir betrachten die Funktion mit der Gleichung $f(x) = \frac{x+2}{x^2-x-2}$.

1. *Zerlegung des Nenners in Linearfaktoren*
   Nach der Zerlegungsregel gilt: $x^2 - x - 2 = (x-2)\cdot(x+1)$.
2. *Ansatz mit Einzelbrüchen*
   $$\frac{x+2}{(x-2)\cdot(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} \underset{\cdot(x-2)\cdot(x+1)}{\Leftrightarrow} x+2 = A\cdot(x+1) + B\cdot(x-2)$$
3. *Bestimmung der Konstanten A und B*
   Durch die Multiplikation mit dem Hauptnenner und direktes Kürzen gleicher Linearfaktoren ergibt sich: $(x+2) = A\cdot(x+1) + B\cdot(x-2)$.
   Bestimmung von A und B: Einsetzen der Nennernullstellen $x = 2$ und $x = -1$
   $x = 2:\ \ 4 = A\cdot 3 + B\cdot 0 \Leftrightarrow A = \frac{4}{3}$
   $x = -1:\ \ 1 = A\cdot 0 + B\cdot(-3) \Leftrightarrow B = -\frac{1}{3}$

Dies liefert die Zerlegung: $f(x) = \frac{x+2}{x^2-x-2} = \frac{4/3}{x-2} + \frac{-1/3}{x+1} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{x-2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}$.

Damit ergibt sich direkt eine Stammfunktion: $F(x) = \frac{4}{3}\cdot\ln|x-2| - \frac{4}{3}\cdot\ln|x+1|$.

Beispiel (Partialbruchzerlegung: quadratische Funktion im Zähler)

Wir betrachten die Funktion mit der Gleichung $f(x) = \frac{3x^2-4x-25}{x^2-x-6}$.

Die Funktion f ist unecht gebrochen. Eine Polynomdivision ergibt:

$$f(x) = \frac{3x^2-4x-25}{x^2-x-6} = 3 + \frac{x+7}{x^2-x-6}.$$

Auf den Restterm lässt sich das Verfahren der Partialbruchzerlegung anwenden.

1. *Zerlegung des Nenners in Linearfaktoren*
   Nach der Zerlegungsregel gilt: $x^2 - x - 6 = (x-3)\cdot(x+2)$.
2. *Ansatz mit Einzelbrüchen*
   $$\frac{x+7}{(x-3)\cdot(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} \underset{\cdot(x-3)\cdot(x+2)}{\Leftrightarrow} x+7 = A\cdot(x+2) + B\cdot(x-3)$$
3. *Bestimmung der Konstanten A und B*
   Es folgt die Bestimmungsgleichung: $x+7 = A\cdot(x+2) + B\cdot(x-3)$.
   Bestimmung von A und B: Einsetzen der Nennernullstellen $x = 3$ und $x = -2$
   $x = 3:\ \ 10 = A\cdot 5 + B\cdot 0 \Leftrightarrow A = 2$
   $x = -2:\ \ 5 = A\cdot 0 + B\cdot(-5) \Leftrightarrow B = -1$

Dies liefert die Zerlegung: $f(x) = \frac{3x^2-4x-25}{x^2-x-6} = 3 + \frac{2}{x-3} + \frac{-1}{x+2} = 3 + \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x+2}$.

Damit ergibt sich als Stammfunktion: $F(x) = 3x + 2\cdot\ln|x-3| - \ln|x+2|$.

Aufgaben

35. Geben Sie die maximale Definitionsmenge der Funktion f an und bestimmen Sie einen Stammfunktionsterm $F(x)$ zu $f(x)$.

a) $f(x)=\dfrac{3}{3x+1}$ b) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ c) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+2}$

d) $f(x)=\dfrac{1}{5x-3}$ e) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+5}$ f) $f(x)=1+\dfrac{1}{x-1}$

36. Berechnen Sie die Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4x+7}\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2}{2x-1}\,dx$ c) $\displaystyle\int_2^3 \frac{2x-1}{x^2-x}\,dx$ d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+4}\,dx$

37. Geben Sie die maximale Definitionsmenge der Funktion f an und bestimmen Sie einen Stammfunktionsterm $F(x)$ zu $f(x)$.

a) $f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$ b) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-4}$ c) $f(x)=\dfrac{2x}{2x+3}$

38. Zerlegen Sie den Funktionsterm $f(x)$ mithilfe einer Partialbruchzerlegung in eine Summe von Einzelbrüchen und geben Sie dann einen Stammfunktionsterm $F(x)$ zu $f(x)$ an.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$ b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-9}$ c) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x}$

d) $f(x)=\dfrac{2}{x^2-x-12}$ e) $f(x)=\dfrac{5x+12}{x^2+5x+6}$ f) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-4x-5}$

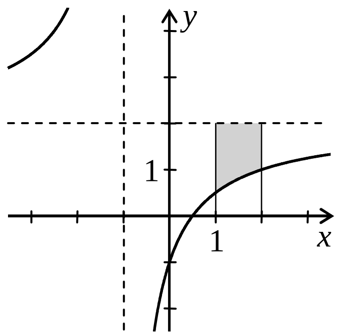
39. Zerlegen Sie den unecht gebrochenen Funktionsterm $f(x)$ mithilfe einer Polynomdivision sowie einer anschließenden Partialbruchzerlegung. Geben Sie dann einen Stammfunktionsterm $F(x)$ zu $f(x)$ an.

a) $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$ b) $f(x)=\dfrac{5x^2+5}{x^2-x-6}$ c) $f(x)=\dfrac{2x^2-x}{x^2-4}$

40. Berechnen Sie die Integrale.

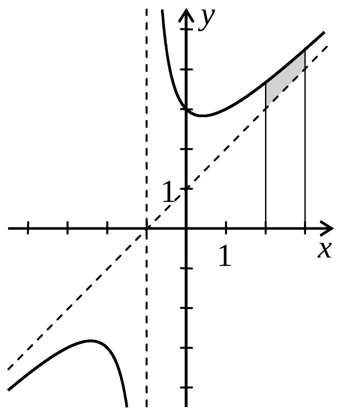
a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{2}{2x-1}\,dx$ b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}\,dx$ c) $\displaystyle\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-2}\,dx$

41. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$.



a) Begründen Sie, dass -1 Polstelle ist.
b) Begründen Sie, dass durch $f_A(x)=2$ eine Gleichung der waagerechten Asymptote gegeben ist.
c) Berechnen Sie das Maß der in der Abbildung gekennzeichneten Fläche.

42. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{x^2+2x+3}{x+1}$.



a) Begründen Sie, dass -1 Polstelle ist.
b) Begründen Sie, dass durch $f_A(x)=x+1$ eine Gleichung der schiefen Asymptote gegeben ist. Begründen Sie, dass sich der Graph von f und die Asymptote nicht schneiden.
c) Berechnen Sie das Maß der in der Abbildung gekennzeichneten Fläche.

W 4.8 Abituraufgabenteile zu gebrochenrationalen Funktionen

A1. Gegeben ist die Funktion $f: D_{\max} \to \mathbb{R}$ mit $f(x)=\dfrac{4x^2-1}{x-1}$.

a) Geben Sie $D_{\max}$ von f an und berechnen Sie die beiden Nullstellen.

b) Zeigen Sie, dass sich der Funktionsterm in der Form $4\cdot x+4+\dfrac{3}{x-1}$ darstellen lässt.

c) Der Graph der Funktion f schließt mit der x-Achse eine Fläche ein. Berechnen Sie deren Inhalt.

d) Der Graph der Funktion f wird um 1 Längeneinheit in negative x-Richtung und um 8 Längeneinheiten in negative y-Richtung verschoben.

- Zeigen Sie, dass der neue Graph die Gleichung $y=4\cdot x+\dfrac{3}{x}$ hat.
- Untersuchen Sie den neuen Graphen auf einfache Symmetrie.

A2. Gegeben ist die Funktion $f: D_{\max} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x^2-2}{(x+2)^2}$.

a) Bestimmen Sie $D_{\max}$ und die Schnittpunkte des Graphen G_f mit den Koordinatenachsen.
Untersuchen Sie das Verhalten von f in der Umgebung der Definitionslücke.

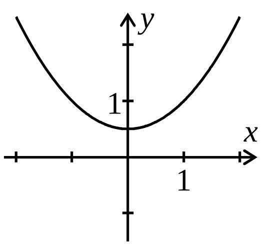
b) Zeigen Sie, dass der Graph G_f die Gerade $y = 1$ als waagerechte Asymptote besitzt und dass er sich dieser für $x \to +\infty$ von unten nähert.

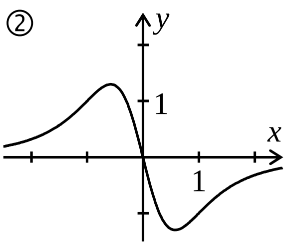
c) Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts.
Untersuchen Sie G_f auf Wendepunkte.
$\left[\text{Zur Kontrolle: } f'(x)=4\cdot\dfrac{x+1}{(x+2)^3}\right]$

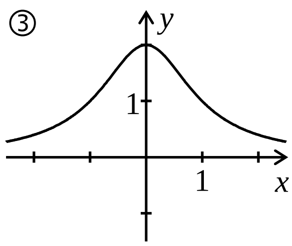
d) Zeichnen Sie den Graphen G_f.

A3. Gegeben sind die Graphen einer Funktion f mit $f(x)=\dfrac{2}{x^2+1}$, der Ableitungsfunktion $f'(x)$ sowie der Funktion g mit $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

Ordnen Sie die Funktionen f, f' und g den richtigen Schaubildern zu. Begründen Sie Ihre Entscheidung mit möglichst vielen Argumenten.

①


②


③


A4. Gegeben ist die Funktion $f: D_{\max} \to \mathbb{R},\, x \mapsto x - 2 + \dfrac{4}{x-1}$ mit $D_{\max} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

a) Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern der Definitionsmenge. Geben Sie die Gleichung der Asymptote von G_f an.

b) Bestimmen Sie Lage und Art der Extrempunkte.

c) Berechnen Sie $f(-4)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(6)$.

$\left[\text{Zur Kontrolle: } f'(x) = 4 \cdot \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}\right]$

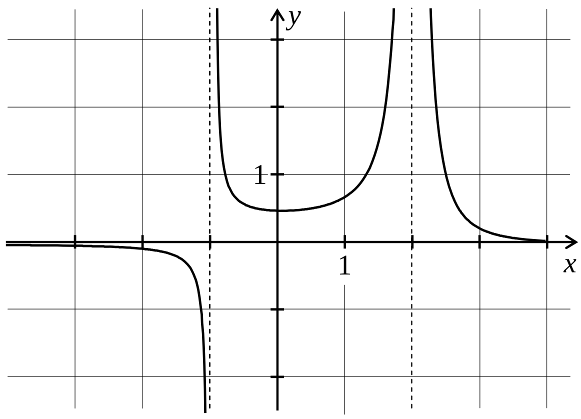
d) Zeichnen Sie den Graphen G_f sowie die Asymptote unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse.

e) Zeigen Sie, dass die Gerade g mit der Gleichung $y = -3x + 10$ Tangente an G_f ist, und geben Sie die Koordinaten des Berührpunktes B an.
[Teilergebnis: $x_p = 2$]

f) Der Graph G_f, die Gerade g aus der Teilaufgabe d) und die Gerade $x = 3$ begrenzen ein endliches Flächenstück A.
Berechnen Sie den Inhalt von A.

A5. Gegeben ist eine differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Die Abbildung rechts zeigt den Graphen der Funktion

$g: \mathbb{R}\setminus\{-1;2\} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \dfrac{1}{f(x)}$.



a) Geben Sie die Nullstellen der Funktion f an.

b) Begründen Sie, dass die Graphen G_f und G_g vier Schnittpunkte besitzen. Lesen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte näherungsweise aus der Abbildung ab.

c) Begründen Sie, dass G_f an den Stellen 0 und 2 lokale Extrempunkte besitzt und geben Sie die Art des Extremums an.

d) Bestimmen Sie die Grenzwerte von f für $x \to \pm\infty$.

e) Skizzieren Sie mithilfe dieser Informationen den Graphen von f.

A1

Symmetriekriterien

Bei einer ganzrationalen Funktion $x \to p(x)$ (Polynomfunktion) lässt sich eine mögliche Symmetrieeigenschaft des Graphen schon direkt am Funktionsterm ablesen. Enthält der Funktionsterm $p(x)$

- nur x-Potenzen mit *ungeraden* Exponenten
  $\to$ ist p punktsymmetrisch zum Ursprung (kurz: punktsymmetrisch),
- nur x-Potenzen mit *geraden* Exponenten und evtl. auch ein absolutes Glied
  $\to$ ist p achsensymmetrisch zur y-Achse (kurz: achsensymmetrisch).

Diese Eigenschaften ganzrationaler Funktionen lässt sich auch auf gebrochenrationale Funktionen übertragen.

Symmetrie bei gebrochenrationalen Funktionen

Wir betrachten für eine gebrochenrationale Funktion $f: D_{\max} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{p_n(x)}{q_m(x)}$

beispielhaft den folgenden möglichen Fall:

- Zählerpolynom ist achsensymmetrisch, d.h. $p_n(-x) = p_n(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
- Nennerpolynom ist punktsymmetrisch, d.h. $q_m(-x) = -q_m(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Wegen der Symmetrie des Nennerpolynoms liegen mögliche Nullstellen von q_m und damit Definitionslücken von f symmetrisch zum Ursprung. Dies bedeutet, dass $D_{\max}$ eine zu O symmetrische Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.

Für die gebrochenrationale Funktion f gilt dann für alle $x \in D_{\max}$:

$$f(-x) = \frac{p_n(-x)}{q_m(-x)} = \frac{p_n(x)}{-q_m(x)} = -\frac{p_n(x)}{q_m(x)} = -f(x).$$

Damit ist nachgewiesen, dass G_f in diesem Fall punktsymmetrisch ist.

In gleicher Weise ergibt sich eine Symmetrieeigenschaft auch in den anderen drei möglichen Fällen. Alle Fälle lassen sich wie folgt zusammenfassen.

Symmetriekriterien für gebrochenrationale Funktionen

Für eine gebrochenrationale Funktion $f: D_{\max} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{p_n(x)}{q_m(x)}$ gilt:

(1) Besitzen Zählerpolynom p_n und Nennerpolynom q_m die gleiche einfache Symmetrie, so ist der Graph von f achsensymmetrisch.

(2) Besitzen Zählerpolynom p_n und Nennerpolynom q_m unterschiedliche einfache Symmetrien, so ist der Graph von f punktsymmetrisch.

Beispiel (Anwendung eines Symmetriekriteriums)

Betrachtet wird die Funktion $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$ mit $D_{\max}=\mathbb{R}\setminus\{-2;\,2\}$.

- Das Zählerpolynom $p_n(x)=x^3$ ist punktsymmetrisch.
- Das Nennerpolynom $q_m(x)=x^2-4$ ist achsensymmetrisch.

Nach dem 2. Symmetriekriterium ist die Funktion f daher punktsymmetrisch.

Aufgaben

1. Notieren Sie jeweils zwei selbst gewählte, möglichst einfache Beispiele gebrochenrationaler Funktionen, die
   a) symmetrisch zur y-Achse sind,
   b) punktsymmetrisch zum Ursprung sind,
   c) keine dieser beiden einfachen Symmetrien aufweisen.

2. Entscheiden Sie anhand des Funktionsterms, welche der folgenden Funktionen symmetrisch sind. Geben Sie gegebenenfalls die Art der Symmetrie an.

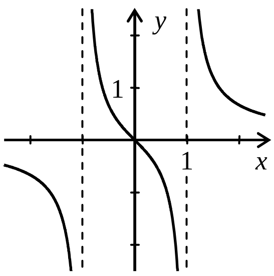
   a) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-2}$ b) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$ c) $f(x)=\dfrac{x^4+1}{x^2-9}$

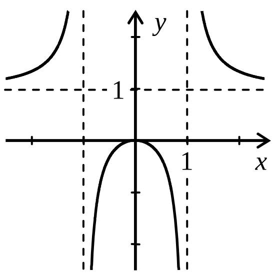
   d) $f(x)=\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2+x}$ e) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^3}$ f) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2-2}$

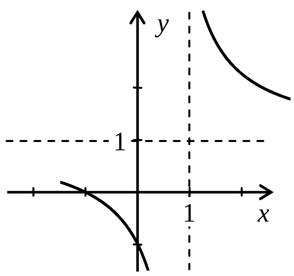
3. Ordnen Sie jeder Funktionsgleichung den passenden Graphen zu. Verwenden Sie als erstes Auswahlkriterium eine mögliche Symmetrie des Graphen.

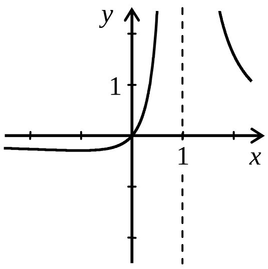
   a) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$ b) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ c) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

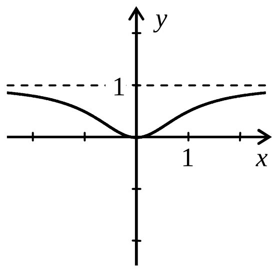
   d) $f(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^3}{x^2-1}$ e) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ f) $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$

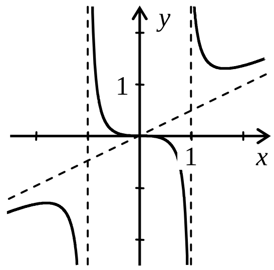
①


②


③


④


⑤


⑥


A2

Untersuchung einer gebrochen-rationalen Funktion

Analyse zur Funktion $f : D_{\max} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x^2}{x^2-4}$

Bei den nachfolgenden Untersuchungen wird auf unterschiedliche Darstellungsformen des Funktionsterms zurückgegriffen.

– *Faktorisierung*: $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4} = \dfrac{x^2}{(x+2)(x+2)}$

– *Zerlegung*: $f(x) = f_A(x) + r(x) = 1 + \dfrac{4}{x^2-4}$

$$\begin{array}{l} x^2 : \quad (x^2-4) = 1 + \dfrac{4}{x^2-4} \\ \underline{-(x^2-4)} \\ \quad 4 \end{array}$$

– *Partialbruchzerlegung*

Weitere Zerlegung in Einzelbrüche: $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x+2}$

Die Partialbruchzerlegung wird hier nicht explizit gezeigt.

❶ $D_{\max}$ und Art der Definitionslücken

Aus der Faktorisierung ergibt sich: $D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.

Es ergeben sich Polstellen, da die Definitionslücken nicht gleichzeitig auch Nullstellen des Zählerpolynoms sind.

Polstellen: $x = -2$ (einfach, mit VzW)
$x = +2$ (einfach, mit VzW)

❷ Nullstellen

Es gilt: $f(x) = 0 \iff x^2 = 0 \iff x = 0$ (doppelt, ohne VzW)

❸ Symmetrie

Es liegt Symmetrie zur y-Achse vor.

Begründung: Sowohl das Zähler- als auch das Nennerpolynom sind achsensymmetrisch.

❹ Grenzwertverhalten für $x \to \pm\infty$ und an den Polstellen

- Asymptote: $f_A(x) = 1$ (waagerechte Asymptote)

  Annäherung an die Assymptote:

  $$r(x) = \dfrac{4}{\underbrace{x^2-4}_{\to 0^+ \text{ für } x \to \pm\infty}} > 0 \text{ für } x \to \pm\infty, \text{ also } \lim_{x \to \pm\infty}\left(1 + \dfrac{4}{x^2-4}\right) = 1^+$$

  Der Graph nähert sich für $x \to \pm\infty$ der Asymptote von oben.

- An den Polstellen

$$r(x)=\underbrace{\frac{4}{x^2-4}}_{\to+\infty \text{ für } x\to-2^-}>0\text{, also }\lim_{x\to-2^-}\left(1+\frac{4}{x^2-4}\right)=+\infty$$

$$r(x)=\underbrace{\frac{4}{x^2-4}}_{\to+\infty \text{ für } x\to-2^+}<0\text{, also }\lim_{x\to-2^+}\left(1+\frac{4}{x^2-4}\right)=-\infty$$

$$r(x)=\underbrace{\frac{4}{x^2-4}}_{\to-\infty \text{ für } x\to2^-}<0\text{, also }\lim_{x\to2^-}\left(1+\frac{4}{x^2-4}\right)=-\infty$$

$$r(x)=\underbrace{\frac{4}{x^2-4}}_{\to-\infty \text{ für } x\to2^+}>0\text{, also }\lim_{x\to2^+}\left(1+\frac{4}{x^2-4}\right)=+\infty$$

❺ Extrempunkte und Monotonie

- $f'(x)=\dfrac{2x\cdot(x^2-4)-x^2\cdot2x}{(x^2-4)^2}=\dfrac{2x^3-8x-2x^3}{(x^2-4)^2}=-8\cdot\dfrac{x}{(x+2)^2\cdot(x-2)^2}$
- Notwendige Bedingung (Nullstellen von f')
  $f'(x)=0 \Leftrightarrow 8x=0 \Leftrightarrow x=0$ (einfach, mit VzW)

Vorzeichentabelle für $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		0	1	2		$+\infty$
$f'(x)$		+	| ohne VzW	+	0 mit VzW HP	−	| ohne VzW	−	

Testwert: $f'(1)=\frac{-8\cdot1}{(1-4)^2}=\frac{-8}{9}<0$

Bei Erstellen der Vorzeichentabelle ist zu beachten, dass die Polstellen von f auch Polstellen von f' sind. Wegen der Quotientenregel ändert sich jedoch die Vielfachheit (hier doppelt).

- Hinreichende Bedingung

Angabe des Extremums
Wegen des Vorzeichenwechsels der Form + 0 – ist die Stelle $x=0$ eine Maximumstelle. Mit $f(0)=0$ ergibt sich der Hochpunkt $H(0|0)$.

- Monotonieintervalle
  Aus der Vorzeichentabelle für $f'(x)$ lesen wir ab:
  f ist in $]-\infty;-2[$ und in $]-2;0[$ streng monoton wachsend.
  f ist in $]0;2[$ und in $]2;+\infty[$ streng monoton fallend.

❻ Wendepunkte und Krümmung

- $f''(x) = -8 \cdot \dfrac{1 \cdot (x^2-4)^2 - x \cdot 2 \cdot (x^2-4) \cdot 2x}{(x^2-4)^4} = -8 \cdot \dfrac{x^2-4-4x^2}{(x^2-4)^3} = 8 \cdot \dfrac{3x^2+4}{(x^2-4)^3}$
- Notwendige Bedingung (Nullstellen von f'')
  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2+4=0 \Leftrightarrow 3x^2 = -4$ (unerfüllbar)

Es gibt keine Nullstellen von f'' und damit keine Wendepunkte.

Vorzeichentabelle für $f''(x)$

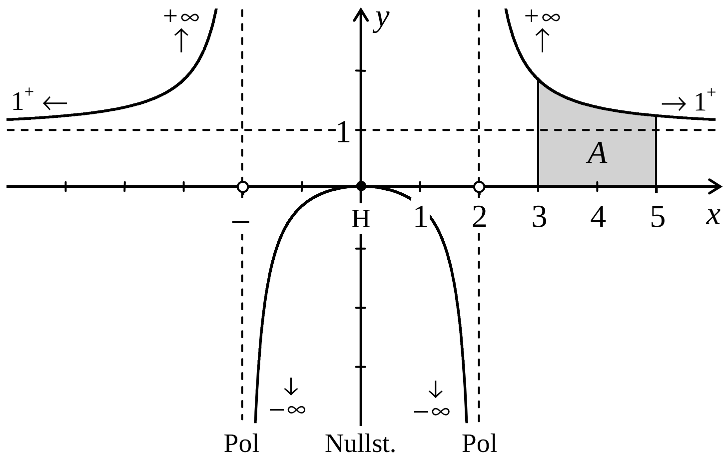
x	$-\infty$		-2	0	2		$+\infty$
$f''(x)$		+	| mit VzW	−	| mit VzW	+	

Wegen der Quotientenregel ändert sich auch hier die Vielfachheit der Polstellen (hier dreifach, mit VzW).

Testwert: $f''(0) = 8 \cdot \frac{3 \cdot 0^2+4}{(0^2-4)^3} = 8 \cdot \frac{4}{-64} = -0,5 < 0$

- Krümmungsintervalle
  G_f ist in $]-\infty; -2[$ und in $]2; +\infty[$ linksgekrümmt.
  G_f ist in $]-2; 2[$ rechtsgekrümmt.

❼ Graph



❽ Flächenberechnung

Berechnet werden soll das Maß der Fläche, den der Funktionsgraph mit der x-Achse über dem Intervall $[3;5]$ einschließt.

Bei der Integration greifen wir auf die Partialbruchzerlegung zurück.
Für die Fläche A gilt:

$$\mu(A) = \int_3^5 f(x)\,dx = \int_3^5 \left(1 + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right) dx = \left[\, x + \ln|x-2| - \ln|x+2| \,\right]_3^5$$

$$= 5 + \ln(3) - \ln(7) - \big(3 + \ln(1) - \ln(5)\big) = 2 + \ln(3) + \ln(5) - \ln(7)$$

$$\approx 2,76.$$

A3

Skizzieren von Graphen gebrochen-rationaler Funktionen

Bei gebrochenrationalen Funktionen kann man einen schnellen Überblick über den Verlauf des Graphen dadurch gewinnen, dass man die Koordinatenebene in Gebiete einteilt, in denen der Graph verlaufen bzw. nicht verlaufen kann. Diese Vorgehensweise soll an einem Beispiel schrittweise erläutert werden:

$$f: D_{\max} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{2-x}{x^2+x-2}.$$

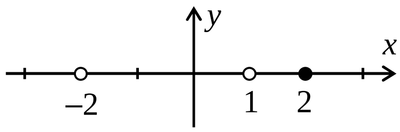
1. Schritt: Faktorisieren von Zähler und Nenner

Wir klammern im Zähler –1 aus, damit auch dort ein Linearfaktor $x - x_0$ steht.

Für das gewählte Beispiel gilt: $f(x) = \frac{2-x}{x^2+x-2} = \frac{2-x}{(x-1)(x+2)} = -\frac{x-2}{(x-1)(x+2)}$.

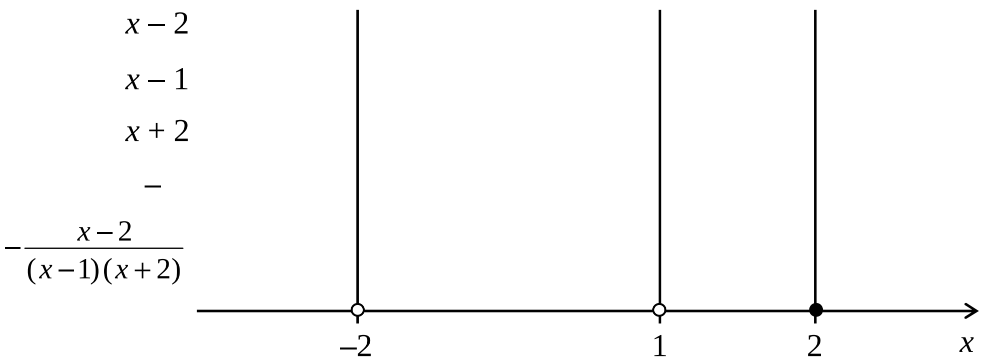
2. Schritt: Anlegen des Koordinatensystems für den Graphen

- Man bestimmt die Nullstellen und die Definitionslücken (hebbare Lücke oder Polstelle) der Funktion und markiert sie.
  Hier gilt: Nullstelle: 2; Polstellen: –2, 1.

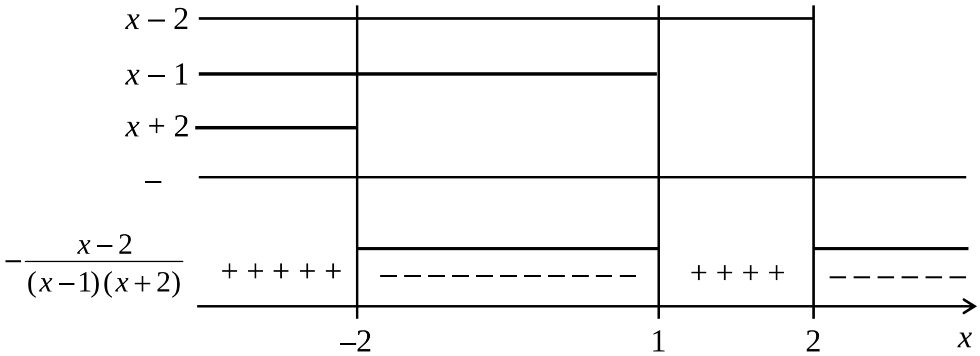


3. Schritt: Erstellen eines Vorzeichendiagramms

- Man markiert die Nullstellen und die Definitionslücken mit einem senkrechten Strich auf der Zahlengeraden. Dort hat der Funktionsterm kein Vorzeichen bzw. er existiert nicht. Nur beim Überqueren dieser Stellen kann der Funktionsterm sein Vorzeichen ändern.



- Man betrachtet den Funktionsterm $-\frac{x-2}{(x-1)(x+2)}$ und stellt das **Vorzeichenverhalten** der einzelnen Faktoren an einer Zahlengeraden dar.
  Die Linearfaktoren sind links von ihrer Nullstelle jeweils negativ. In dem Diagramm werden diese „negativen“ Intervalle durch einen waagerechten Strich gekennzeichnet. Die „positiven“ Intervalle der Faktoren werden nicht markiert. Der Faktor −1 (Minuszeichen) ist insgesamt negativ.

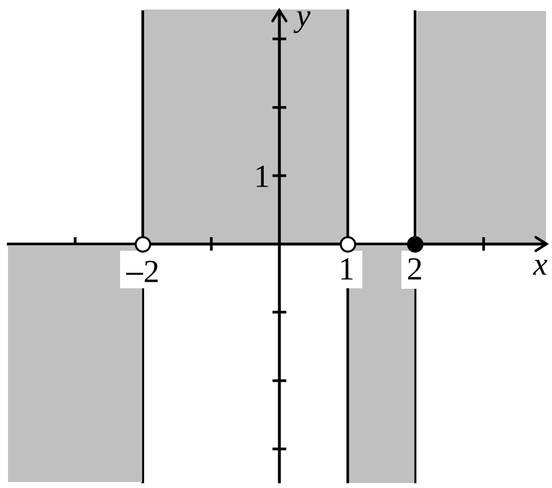


- Der Vorzeichenverlauf des Funktionsterms lässt sich durch „Abzählen der Minuszeichen“ bestimmen.

4. Schritt: Gebietssperrungen

Die eigentliche Idee des Verfahrens besteht darin, „Gebietssperrungen“ im Koordinatensystem vorzunehmen.

Mithilfe des Vorzeichenverlaufs des Funktionsterms „sperrt“ man diejenigen Gebiete, in denen keine Punkte des Graphen liegen können (grau unterlegt).



5. Schritt: Skizzieren des Graphen

- Durch die Gebietssperrungen kann der Verlauf des Graphen der gebrochenrationalen Funktion in der Nähe der Polstellen eingezeichnet werden.
- Mithilfe des Grenzverhaltens für $x \to \pm\infty$ (eventuell zusätzlich die Asymptote durch eine Polynomdivision bestimmen) kann der Graph skizziert werden.

  Hier: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2-x}{x^2+x-2} = 0$