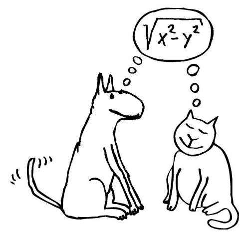


Glossar

Mathematik Vorklasse

1. Aussagenlogik, Mengenlehre, Rechenregeln

Grundlegende Begriffe

Teiler

Wenn man eine Zahl a ohne Rest durch eine Zahl b teilen kann, dann heißt a durch b **teilbar**.

Man sagt auch: „b ist **Teiler** von a.“ oder „a ist **Vielfaches** von b.“

Primzahl

Zahlen größer als 1, die nur durch 1 und sich selbst teilbar sind, heißen **Primzahlen**. Die Zahl 1 ist keine Primzahl.

Menge der Primzahlen: $\mathbb{P} = \{2\,;3\,;5\,;7\,;11\,;\ldots\}$

Quadratzahl

Eine **Quadratzahl** ist eine Zahl, die durch die Multiplikation einer ganzen Zahl mit sich selbst entsteht.

Erste Quadratzahlen: 0 ; 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; 49 ; 64 ; 81 ; 100 …

Zahlenmengen

Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$

$\mathbb{N} = \{0\,;1\,;2\,;\ldots\}$ bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen.

Menge der natürlichen Zahlen ohne 0: $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\setminus\{0\} = \{1\,;2\,;3\,;\ldots\}$

Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} = \{\ldots\,;-2\,;-1\,;0\,;1\,;2\,;\ldots\}$ bezeichnet die Menge der ganzen Zahlen.

Die Menge der natürlichen Zahlen ist eine Teilmenge der Menge der ganzen Zahlen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}\,, q \neq 0\}$ bezeichnet die Menge der rationalen Zahlen.

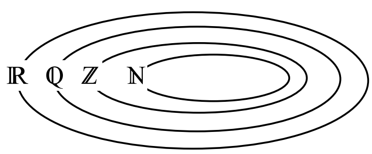
Jede rationale Zahl lässt sich als Bruch und auch als endliche oder periodische Dezimalzahl angeben.

Die Menge der ganzen Zahlen ist eine Teilmenge der Menge der rationalen Zahlen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

Unendliche, nichtperiodische Dezimalzahlen (z.B. $\sqrt{2}\,;\pi\,;\ldots$) heißen **irrationale Zahlen**. Sie bilden zusammen mit den rationalen Zahlen die Menge $\mathbb{R}$ der **reellen Zahlen**.

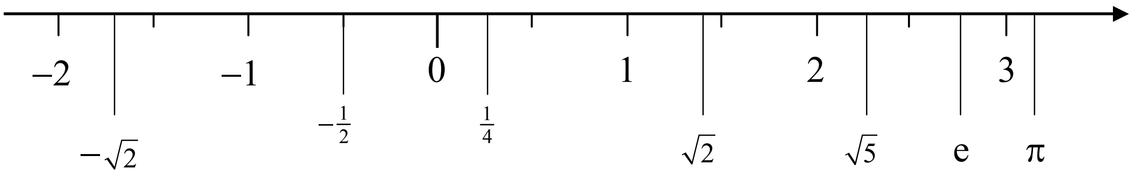
Die Menge der rationalen Zahlen ist eine Teilmenge der Menge der reellen Zahlen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



Darstellung an der Zahlengeraden

Zahlengerade

Jeder reellen Zahl entspricht ein Punkt auf der Zahlengeraden.



Die Punkte, die zu den reellen Zahlen gehören, füllen die Zahlengerade **vollständig** aus.

Intervalle

Intervalle sind eine verkürzte Schreibweise, um zusammenhängende Teilmengen der Zahlengerade auszudrücken.

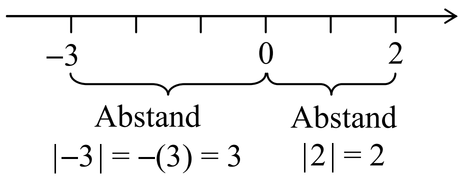
beschränkte Intervalle		unbeschränkte Intervalle
$[a\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$	geschlossen	$[a\,;+\infty[\;=\; \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}$
$]a\,;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	offen	$]a\,;+\infty[\;=\; \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
$[a\,;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$	halboffen (rechtsseitig)	$]-\infty\,;b] \;=\; \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$
$]a\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$	halboffen (linksseitig)	$]-\infty\,;b[\;=\; \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

Betrag einer Zahl

Für den Betrag $|a|$ einer reellen Zahl a gilt:

$$|a| = \begin{cases} a\ , & \text{wenn } a > 0 \\ 0\ , & \text{wenn } a = 0 \\ -a\ , & \text{wenn } a < 0 \end{cases}$$

- Falls eine Zahl positiv ist, so ist der Betrag der Zahl einfach dieser Zahl.
- Falls eine Zahl negativ ist, so ist der Betrag der Zahl das Negative diese Zahl.

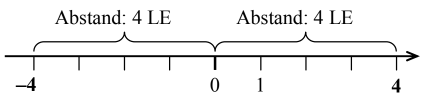


Unter dem Betrag einer reellen Zahl versteht man anschaulich den Abstand dieser Zahl zum Nullpunkt der Zahlengeraden.

Gegenzahl

Zu einer reellen Zahl a heißt $-a$ die **Gegenzahl** von a.

Die Punkte, die auf der Zahlengeraden einer Zahl und ihrer Gegenzahl entsprechen, haben denselben Abstand von Nullpunkt.



Die Summe von Zahl und Gegenzahl ergibt 0: $a + (-a) = 0$.

Kehrzahl

Zu einer reellen Zahl a mit $a \neq 0$ heißt $\frac{1}{a}$ die Kehrzahl von a.

Die Produkt von Zahl und Kehrzahl ergibt 1: $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

Rechenoperationen und Rechengesetze

Grundrechenarten

- Addition $a + b$ Summand + Summand = Summe
- Subtraktion $a - b$ Minuend – Subtrahend = Differenz
- Multiplikation $a \cdot b$ Faktor · Faktor = Produkt
- Division $a : b$ Dividend : Divisor = Quotient

Vorzeichenregeln

$(+a)\cdot(+b) = +a\cdot b$	$(-a)\cdot(+b) = -a\cdot b$	$(+a):(+b) = +a:b$	$(-a):(+b) = -a:b$
$(+a)\cdot(-b) = -a\cdot b$	$(-a)\cdot(-b) = +a\cdot b$	$(+a):(-b) = -a:b$	$(+a):(-b) = -a:b$

Rechengesetze

- Kommutativgesetze

  $a + b = b + a$ (Addition) $a \cdot b = b \cdot a$ (Multiplikation)

- Assoziativgesetze

  $a + (b + c) = (a + b) + c$ (Addition) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (Multiplikation)

- Distributivgesetz

  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Bruchrechnung

Erweitern

Einen Bruch **erweitern** heißt Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multiplizieren.

$$\frac{a}{b} \overset{k}{=} \frac{a \cdot k}{b \cdot k} \quad (k \neq 0)$$

Kürzen

Einen Bruch **kürzen** heißt Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl dividieren.

$$\frac{a}{b} \underset{k}{=} \frac{a : k}{b : k} \quad (k \neq 0)$$

Grundrechenarten

	Addition	Subtraktion
gleiche Nenner:	$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$	$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$
verschiedene Nenner:	$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a\cdot d}{c\cdot d} + \frac{b\cdot c}{d\cdot c} = \frac{a\cdot d+b\cdot c}{c\cdot d}$	$\frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{a\cdot d}{c\cdot d} - \frac{b\cdot c}{d\cdot c} = \frac{a\cdot d-b\cdot c}{c\cdot d}$

Multiplikation	Division
$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d}$	$\frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{d}{b} = \frac{a \cdot d}{c \cdot b}$

Sonderfälle: $a + \frac{b}{c} = \frac{a}{1} + \frac{b}{c} = \frac{a\cdot c+b}{c}$ | $\frac{1}{a} \cdot b = \frac{b}{a}$ | $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$

Potenzen

Potenzschreibweise

Für alle $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}^*$ gilt: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ Faktoren } a}$.

- a^n heißt **Potenz**.
- a heißt **Grundzahl** oder **Basis**
- n heißt **Hochzahl** oder **Exponent**

Sonderfälle: $a^1 = a$ und $a^0 = 1$.

Potenzgesetze

(P1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	(P2) $a^x : a^y = a^{x-y}$	
(P3) $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$	(P4) $a^x : b^x = (a : b)^x$	(P5) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

Termumformungen

Anwendungen des Distributivgesetzes

- Ausmultiplizieren $\qquad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- Ausklammern (Faktorisieren) $\qquad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$
- Erweitertes Distributivgesetz (Multiplikation von Summen) $\qquad (a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$

ac ad bc bd

Binomische Formeln

1. Formel	2. Formel	3. Formel
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Terme mit Quadratwurzel

Wurzelbegriff

Die **Quadratwurzel** $\sqrt{a}$ aus $a \in \mathbb{R}_0^+$ ist die nicht negative Zahl, deren Quadrat a ergibt. Die Zahl unter der Wurzel nennt man **Radikand.**

Eigenschaften

- $\sqrt{a} \geq 0 \quad (a \in \mathbb{R}_0^+)$
- $(\sqrt{a})^2 = a \quad (a \in \mathbb{R}_0^+)$
- $\sqrt{a^2} = |a| \quad (a \in \mathbb{R})$

Rechenregeln

- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \qquad (a, b \in \mathbb{R}_0^+)$
- $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \cdot \sqrt{\dfrac{a}{b}} \qquad (a, b \in \mathbb{R}_0^+, b \neq 0)$

2. Gleichungen und lineare Ungleichungen

Grundbegriffe

Gleichung

Eine **Gleichung** entsteht, wenn zwei Terme durch ein Gleichheitszeichen miteinander verbunden werden.

Arten von Gleichungen

- Eine Gleichung der Form $a \cdot x + b = 0$ heißt **lineare Gleichung** mit der Lösungsvariablen x.

  $-3 \cdot x + 9 = 0$

- Kommt die Lösungsvariable mindestens einmal im Nenner vor, dann spricht man von einer **Bruchgleichung**.

  $\frac{3x+2}{x-1} = \frac{1}{2}$

  Bei Bruchgleichungen ist die **Definitionsmenge** zu beachten.

- Enthält eine Gleichung zusätzlich zur Lösungsvariablen mindestens eine weitere Variable, so spricht man von einer **Parametergleichung**.

  $a \cdot x - 5 = 3$

  Beim Lösen kann eine Fallunterscheidung notwendig sein.

Ungleichung

Eine **Ungleichung** entsteht, wenn man zwei Terme durch ein Ungleichheitszeichen miteinander verbindet.

$-3x + 5 \geq x$

Äquivalenzumformungen

Begriff der Äquivalenzumformung

Umformungen, bei denen sich die Lösungsmenge nicht ändert, bezeichnet man als **Äquivalenzumformungen**.

Äquivalenzumformungen bei Gleichungen

Zum Lösen einer Gleichung können folgende Äquivalenzumformungen verwendet werden:

- auf beiden Seiten der Gleichung denselben Term addieren bzw. subtrahieren,
- beide Seiten der Gleichung mit demselben von null verschiedenen Term multiplizieren bzw. durch diesen dividieren.

Äquivalenzumformungen bei Ungleichungen

- Für das Lösen von Ungleichungen gelten dieselben Äquivalenzumformungen wie für Gleichungen.
- Beim Lösen einer Ungleichung ist zusätzlich zu beachten dass sich bei Multiplikation mit einer bzw. bei Division durch eine negative Zahl das Ungleichheitszeichen umkehrt.

Quadratische Gleichungen

Begriff der quadratischen Gleichung

Eine Gleichung mit einer Variablen, die in der 2. Potenz auftritt, heißt **quadratische Gleichung**.

Eine quadratische Gleichung kann in

- der **Normalform** $x^2 + px + q = 0 \quad (p, q \in \mathbb{R})$ oder
- der **allgemeinen Form** $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$

vorliegen.

Lösungsformeln für die quadratische Gleichungen

Für quadratische Gleichungen gelten folgende Lösungsformeln:

- ***p-q*-Formel** für die Normalform:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \text{mit} \quad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

- **Mitternachts-Formel** für die allgemeine Form:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \qquad \text{mit} \quad D = b^2 - 4ac$$

Lösbarkeit quadratischer Gleichungen

Eine quadratische Gleichung kann zwei, eine oder auch keine Lösung besitzen.

Die Anzahl der Lösungen ist von der **Diskriminante** D abhängig:

- $D > 0$: zwei reelle Lösungen
- $D = 0$: eine reelle Lösung (Doppellösung)
- $D < 0$: keine reelle Lösung

Weitere Lösungsmöglichkeiten

Anstelle der Lösungsformel kann auch das Verfahren der **quadratischen Ergänzung** verwendet werden.

Eine weitere einfache Lösungsmöglichkeit ergibt sich, wenn es gelingt, den quadratischen Term zu **faktorisieren**. Die Lösungen erhält man dann unter Verwendung des **Nullproduktsatzes**.

Eine Faktorisierung kann auf folgende Arten erfolgen:

- Ausklammern eines x-Terms,
- Anwendung einer binomischen Formel,
- Satz des Vieta (Umkehrung der Multiplikationsregel für Summenterme)

3. Lineare und quadratische Funktionen

Grundbegriffe

Funktionsbegriff

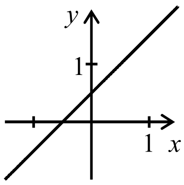
Eine **Funktion** f ist eine Zuordnung, die jedem Element x einer Definitionsmenge D **genau ein Element** y einer Zielmenge Z zuordnet.

Kurzschreibweise: $f: D \to Z\,,\; x \mapsto y$
Funktionsterm: $f(x)$
Funktionsgleichung: $y = f(x)$

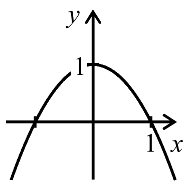
Eine Funktion kann durch eine Funktionsgleichung, eine Tabelle oder einen Funktionsgraphen angegeben werden.

Wertemenge

Die **Wertemenge** einer Funktion f ist die Menge aller möglichen Funktionswerte $f(x)$ (y-Werte), welche die Funktion f annehmen kann.



$W = \mathbb{R}$



$W =]-\infty\,;\,1]$

Lineare Funktionen

Begriff der linearen Funktion

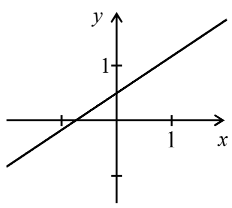
Eine Funktion der Form $f: x \mapsto m\,x + t$ mit $m \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $t \in \mathbb{R}$ heißt **lineare Funktion**.

- m gibt die **Steigung** an.
- m bezeichnet den ***y*-Achsenabschnitt**.

Graph einer linearen Funktion

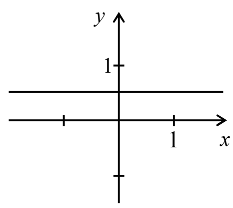
Der Graph einer linearen Funktion ist eine **Gerade**.

$m > 0$



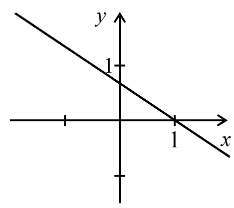
steigende Gerade

$m = 0$



Parallele zur x-Achse

$m < 0$

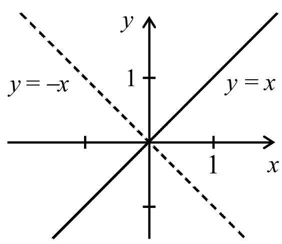


fallende Gerade

Eine Sonderrolle spielen die **Ursprungsgeraden**.
Ihnen ist der y-Achsenabschnitt $t = 0$ gemeinsam.
Die Funktionsgleichungen lauten: $y = m \cdot x$.

Besondere Ursprungsgeraden sind die

- **1. Winkelhalbierende**: $y = x$
- **2. Winkelhalbierende**: $y = -x$



Quadratische Funktionen

Begriff der quadratischen Funktion

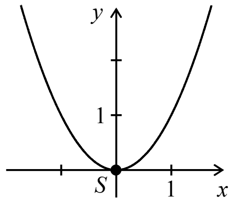
Eine Funktion der Form $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ heißt **quadratische Funktion in Normalform**.

Graphen quadratischer Funktionen

Der Graph der quadratischen Funktion

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$$

heißt **Standard-Normalparabel**.



Scheitel
$S(0\,|\,0)$

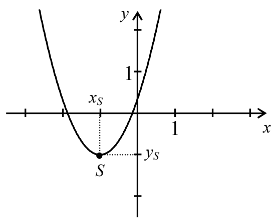
Der Graph der quadratischen Funktion

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$$

entsteht aus der **Standard-Normalparabel** durch folgende Operationen:

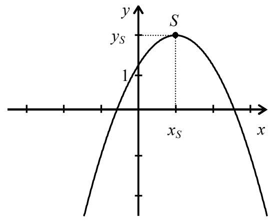
- Streckung / Stauchung in y-Richtung durch den Formfaktor a,
- Verschiebung in x-Richtung um x_S,
- Verschiebung in y-Richtung um y_S.

$a > 0$



nach oben geöffnet

$a <$



nach unten geöffnet

Parabelgleichungen

- Normalform: $y = ax^2 + bx + c$
- Scheitelform: $y = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$
- Nullstellenform: $y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_1)$

4. Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichung mit 2 Variablen

Die Gleichung $a \cdot x + b \cdot y = c$ heißt **lineare Gleichung mit zwei Variablen**.

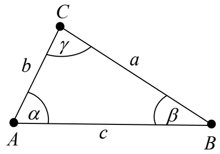
Lineare Gleichungssysteme

Ein System aus mehreren lin. Gleichungen heißt **lineares Gleichungssystem**.

	2 Gleichungen, 2 Variable	3 Gleichungen, 3 Variable
Allgemeine Form	I $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ II $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_1$	I $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$ II $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$ III $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$
Lösungsverfahren	• Gleichsetzverfahren • Einsetzverfahren • Additionsverfahren	• Gaußscher Algorithmus

5. Dreieckslehre

Innenwinkelsatz und Dreiecksarten

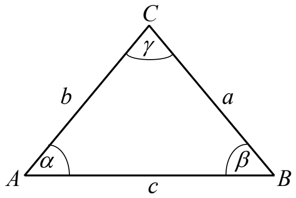


In jedem Dreieck ist die Summe der Maße der Innenwinkel 180°.
In Zeichen: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$
Man nimmt folgende Einteilung vor:

spitzwinkliges Dreieck	*rechtwinkliges Dreieck*	*stumpfwinkliges Dreieck*
Alle drei Winkel sind kleiner als 90°.	Es gibt einen Winkel mit dem Maß 90°.	Einer der drei Winkel hat ein Maß größer als 90°.

Besondere Dreiecke

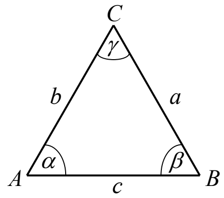
- *Gleichschenkliges Dreieck*:
  Zwei Seiten sind gleich lang.



$a = b$

$\alpha = \beta$

- *Gleichseitiges Dreieck*:
  Alle Seiten sind gleich lang.



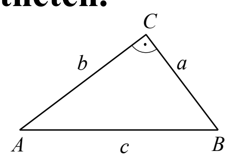
$a = b = c$

$\alpha = \beta = \gamma = 60°$

Der Satz des Pythagoras

Bezeichnungen im rechtwinkligen Dreieck:

- Die Seite, die dem rechten Winkel gegenüber liegt, heißt **Hypotenuse**.
- Die beiden Seiten, die den rechten Winkel bilden, heißen **Katheten.**

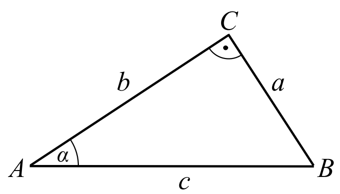


Für jedes rechtwinklige Dreieck mit den Kathetenlängen a und b und der Hypotenusenlänge c gilt der **Satz des Pythagoras**:

$$a^2 + b^2 = c^2 .$$

Sinus, Kosinus und Tangens in rechtwinkligen Dreiecken

- Winkelfunktionen:



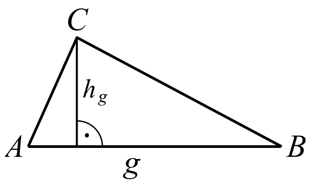
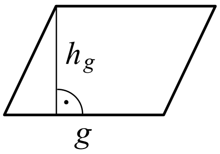
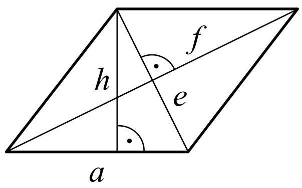
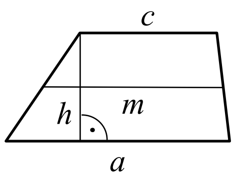
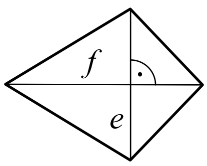
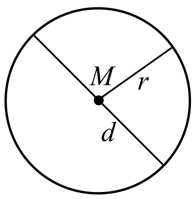
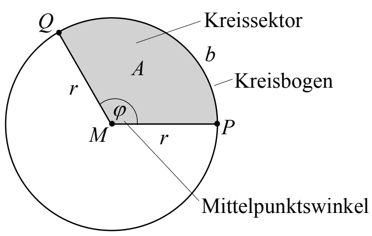
$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \quad ; \quad \cos(\alpha) = \frac{b}{c} \quad ; \quad \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{a}{b}$$

- Besondere Winkel

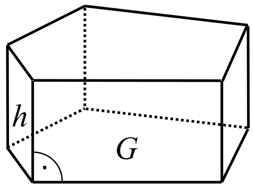
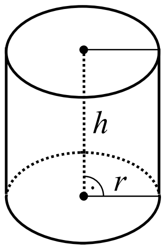
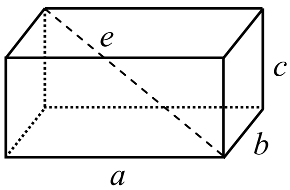
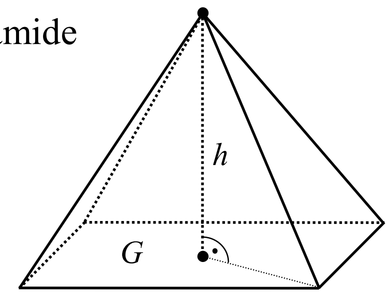
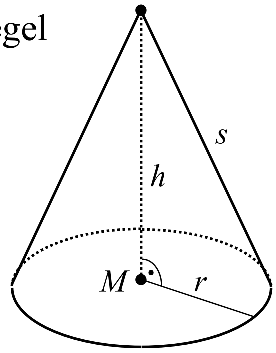
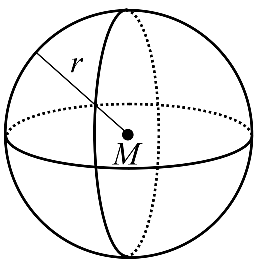
	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

6. Berechnung von Längen, Flächeninhalten und Volumina

Ebene Figuren

Figur	Eigenschaft	Flächeninhalt
Dreieck 		$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g$
Parallelogramm 	Gegenüberliegende Seiten sind jeweils parallel.	$A = g \cdot h_g$
Raute 	Alle vier Seiten sind gleich lang.	$A = a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$
Trapez 	Mindestens zwei gegenüberliegende Seiten sind parallel.	$A = \frac{a+c}{2} \cdot h = m \cdot h$
Drachen 	Es gibt zwei Paare gleich langer Seiten.	$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$
Kreis 	Alle Punkte der Kreislinie besitzen vom Mittelpunkt denselben Abstand.	$A = \pi r^2$ $U = 2\pi r$ (Umfang)
Kreisbogen und Kreissektor 	b: Länge des Kreisbogen A_S: Flächeninhalt des Kreissektors	$b = \frac{2\pi \cdot r}{360} \cdot \varphi$ $A_S = \frac{\pi \cdot r^2}{360} \cdot \varphi$

Räumliche Figuren

Figur		Volumen / Oberfläche
Prisma		$V = G \cdot h$
Gerader Kreiszylinder		$V = G \cdot h = \pi r^2 \cdot h$ $M = 2\pi r \cdot h$ (Mantelfläche) $O = 2\pi r \cdot (h + r)$
Quader		$V = a \cdot b \cdot c$ $e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ (Raumdiagonale)
Gerade Pyramide		$V = \frac{1}{3} G \cdot h$
Gerader Kreiskegel		$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$ $M = \pi r s$ (Mantelfläche)
Kugel		$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $O = 4\pi r^2$

7. Daten und Zufall, Wahrscheinlichkeit

Zufallsexperiment und Ergebnis

Begriff des Zufallsexperiments

Ein **Zufallsexperiment** ist ein Vorgang, bei dem mindestens zwei Ergebnisse möglich sind und bei dem man vor Ablauf des Vorgangs das Ergebnis nicht vorhersehen kann.

Ergebnisraum

Alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments fasst man zu dem **Ergebnisraum** Ω zusammen.

Ereignisse

Begriff des Ereignisses

Für ein Zufallsexperiment mit dem Ergebnisraum Ω bezeichnet man jede Teilmenge A von Ω als ein **Ereignis.**

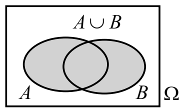
Man sagt: Das Ereignis A tritt ein, wenn das Ergebnis ein Element von A ist.

Besondere Ereignisse

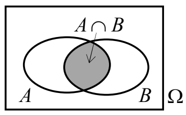
- Eine einelementige Teilmenge von Ω heißt **Elementarereignis**.
- Der Ergebnisraum Ω selbst heißt **sicheres Ereignis**.
- Das Ereignis { } (leere Menge) heißt **unmögliches Ereignis**.
- Das **Gegenereignis** $\overline{A}$ zu einem Ereignis A ist die Menge aller Ergebnisse, die nicht zu A gehören.

Verknüpfungen von Ereignissen

- Das **ODER-Ereignis** $A \cup B$ tritt ein, wenn mindestens eins der Ereignisse A oder B eintritt.



- Das **UND-Ereignis** $A \cap B$ tritt ein, wenn das Ereignis A und zugleich auch das Ereignisse B eintreten.



Wahrscheinlichkeitsmaß

Begriff des Wahrscheinlichkeitsmaßes

Das **Wahrscheinlichkeitsmaß** ist eine Funktion, die für jedes Ereignis eines Zufallsexperiments die zugehörige Wahrscheinlichkeit festlegt.

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Eine **Wahrscheinlichkeitsverteilung** ordnet jedem Elementarereignis eine Wahrscheinlichkeit zu. Bei Zufallsexperimenten mit endlich vielen Ergebnissen gibt man Wahrscheinlichkeitsverteilungen oft in Tabellenform an.

Laplace-Wahrscheinlichkeit (Gleichverteilung)

Laplace-Experiment

Ein Zufallsexperiment heißt **Laplace-Experiment** (**LE**), wenn alle Elementarereignisse gleichwahrscheinlich sind.

Beispiele: ideale Münzen, Würfel, Glücksräder

Laplace-Formel

Ist $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ der Ergebnisraum eines Laplace-Experiments und A ein Ereignis, dann gilt für die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ von A:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

Baumdiagramme und Pfadregeln

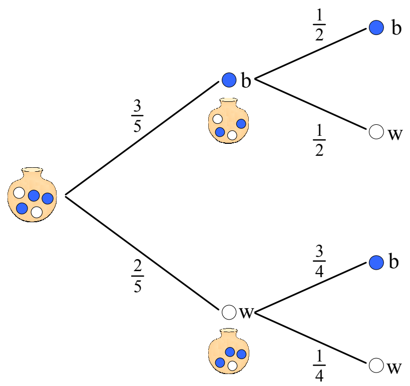
Mehrstufige Zufallsexperimente

Viele Zufallsexperimente sind aus einfachen Teilexperimenten zusammengesetzt. Solche Zufallsexperimente heißen **mehrstufig.**

Baumdiagramm

In einem Baumdiagramm lassen sich die Ergebnisse mehrstufiger Zufallsexperimente übersichtlich darstellen.

Beispiel: Zweimaliges Ziehen aus einer Urne ohne Zurücklegen



Ergebnis	Wahrscheinlichkeit
(b | b)	$P(\{(b \mid b)\}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$
(b | w)	$P(\{(b \mid b)\}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$
(w | b)	$P(\{(b \mid b)\}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$
(w | w)	$P(\{(b \mid b)\}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

Pfadregeln

- *1. Pfadregel*: **Multiplikationsregel für Pfade**
  Jeder Pfad im Ergebnisbaum stellt ein Elementarereignis dar.
  Die zugehörige Wahrscheinlichkeit ist das Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang des jeweiligen Pfades.
- *2. Pfadregel*: **Additionsregel für Pfade**
  Besteht im Ergebnisbaum ein Ereignis aus mehreren Pfaden, so ist seine Wahrscheinlichkeit gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Pfade, die in dem Baumdiagramm zu diesem Ereignis gehören.

8. Exponentialfunktion und Logarithmus

Allgemeine Exponentialfunktion

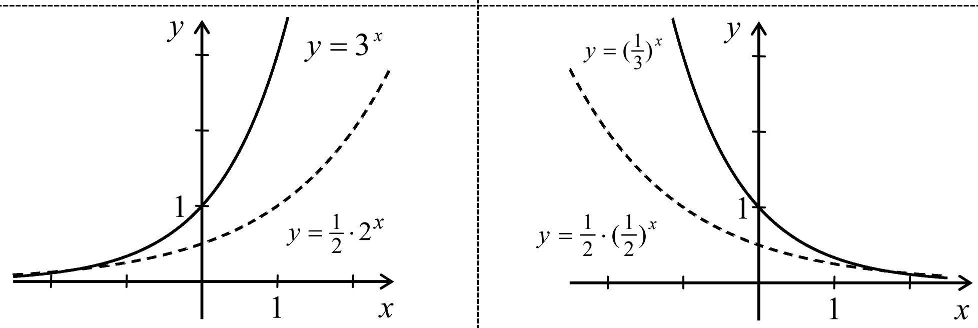
Begriff der allgemeinen Exponentialfunktion
Eine Funktion der Form

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto a \cdot b^x \quad (\text{mit } b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \text{ und } a \in \mathbb{R}^*)$$

heißt **allgemeine Exponentialfunktion**.

Graphen allgemeiner Exponentialfunktionen
Bezüglich der Graphen unterscheidet man folgende Fälle:

$b > 1$	$0 < b < 1$



exponentielle Wachstumsprozesse	exponentielle Zerfallsprozesse

Logarithmus und Logarithmusgesetze

Begriff des Logarithmus zur Basis *b*
Die Zahl z, mit der man die Basis b potenzieren muss, um x zu erhalten, heißt **Logarithmus von *x* zur Basis *b***.

Es gilt: $b^z = x \Leftrightarrow z = \log_b(x) \quad (\text{mit } b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \text{ und } x \in \mathbb{R}^+)$

Besondere Logarithmen: $\log_b(b) = 1$, $\log_b(1) = 0$

Logarithmengesetze
Für $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ sowie $u, v \in \mathbb{R}^+$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt:

(L1) Logarithmus eines **Produkts** = **Summe** der Logarithmen der Faktoren

$$\log_b(u \cdot v) = \log_b(u) + \log_b(v)$$

(L2) Logarithmus eines **Quotienten** = **Differenz** der Logarithmen von Zähler und Nenner

$$\log_b(u : v) = \log_b(u) - \log_b(v)$$

(L3) Logarithmus einer **Potenz** = **Multiplikation** des Exponenten mit dem Logarithmus der Basis

$$\log_b(u^r) = r \cdot \log_b(u)$$

Stichwortverzeichnis

Die zweite angegebene Seitenzahl bezieht sich auf die Fundstelle im Lehrbuch.