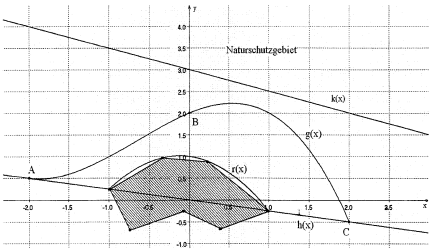
Schriftliche Abiturprüfung 2010

E-Kurs

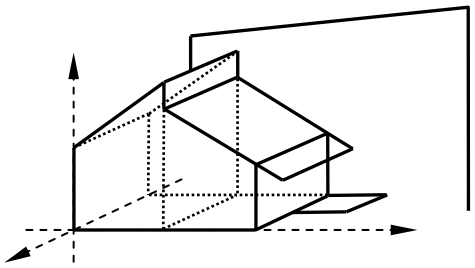
Haupttermin

Themenübersicht

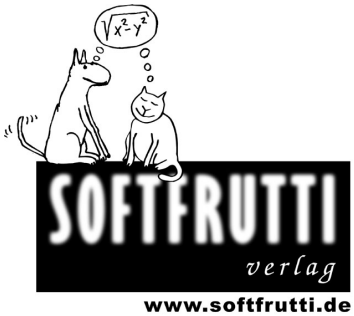
- Aufgabe 1: **Analysis**
  - Untersuchung der Funktionenschar $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto 2ax \cdot e^{-x^2}$
  - Modellierung: Naturschutzgebiet
    - Knickfreier Übergang
    - Schnittwinkel
    - Flächenberechnung



- Aufgabe 2: **Analytische Geometrie**
  - Winkel zwischen Ebenen
  - Betrachtung einer Ebenenschar
  - Abstand Punkt-Gerade
  - Schattenbreite



- Aufgabe 3: **Stochastik**
  - Aufstellen und Auswerten eines Baumdiagramms
  - Kombinatorik
  - Bernoulli-Kette



Aufgabe 1

ANALYSIS

1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto 2ax \cdot e^{-x^2}$ mit $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

1.1 Bestimmen Sie das Symmetrieverhalten der Funktionen der Schar.
Berechnen Sie die Grenzwerte für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$. Erläutern Sie, dass die Grenzwerte unabhängig von a sind.

1.2 Zeigen Sie, dass für die Funktionsterme der 1. und 2. Ableitung gilt:

$$f_a'(x) = 2a \cdot (1-2x^2) \cdot e^{-x^2} \quad \text{und} \quad f_a''(x) = 4ax \cdot (2x^2-3) \cdot e^{-x^2}\ .$$

1.3 Untersuchen Sie die Funktionen der Schar auf Nullstellen und Extremstellen. Die Art der Extremstellen muss nicht bestimmt werden. Berechnen Sie jeweils die Koordinaten der zugehörigen Punkte.

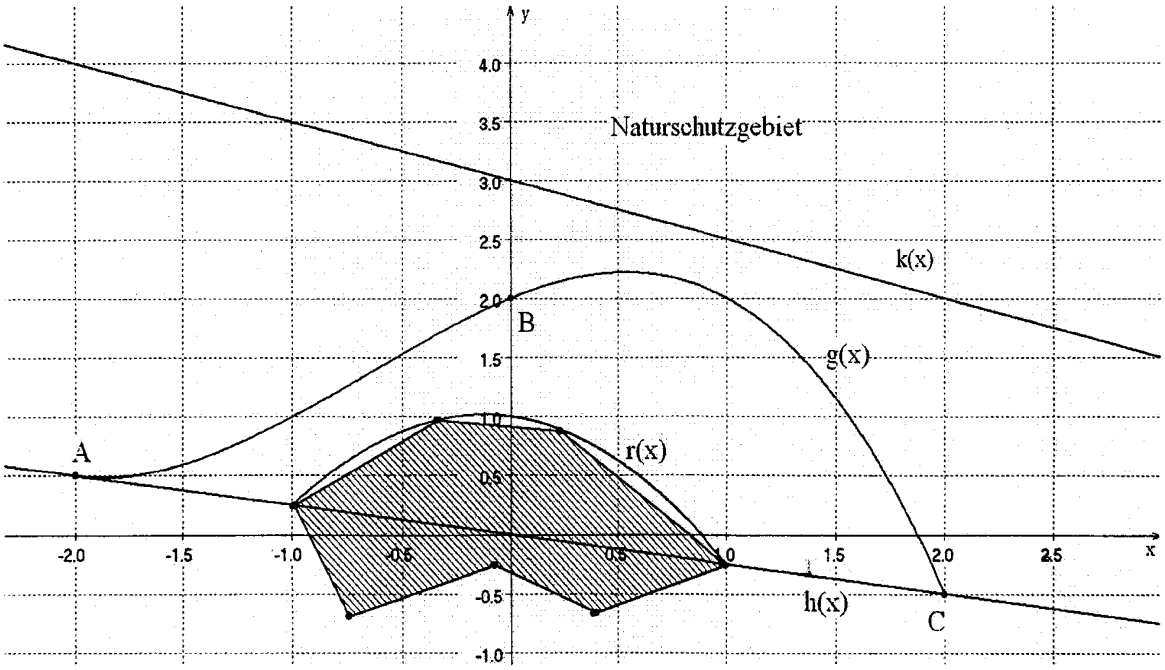
1.4 Bestimmen Sie die Funktion der Schar f_a, deren Graph im Schnittpunkt mit der x-Achse eine Tangente mit dem Steigungswinkel 45° hat.

1.5 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion für $a = 0{,}5$ unter Verwendung der vorherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem.
Markieren Sie näherungsweise alle Wendepunkte und beschriften Sie diese.

1.6 Beschreiben Sie, wie der Graph der Funktion mit $a = -4$ aus dem Graphen der Funktion mit $a = 0{,}5$ entsteht. Skizzieren Sie ohne weitere Rechnung den Graphen der Funktion mit $a = -4$ in das Koordinatensystem aus Aufgabe 1.5.

2. Quer und gerade durch einen kleinen saarländischen Ort verläuft eine viel befahrene Bundesstraße. Nun soll endlich die lang ersehnte Umgehungsstraße gebaut werden. Die Abbildung zeigt einen Kartenausschnitt, auf dem die alte Bundesstraße (Gerade durch A und C) und der geplante Verlauf der neuen Umgehungsstraße angenähert eingezeichnet sind.

(Alle Angaben in Kilometern, Norden in Richtung der *y*-Achse)



2.1 Bestimmen Sie aus dem Kartenausschnitt die lineare Funktion *h*, deren Graph den Verlauf der alten Bundesstraße darstellt.

2.2 Die neue Umgehungsstraße soll im Punkt A „knickfrei“ an die alte Bundesstraße anschließen, durch B verlaufen und im Punkt C die alte Bundesstraße wieder treffen.

Geben Sie die für die Umgehungsstraße geltenden Bedingungen in Form von Gleichungen an.
Zeigen Sie, dass die Funktion *g* mit

$$g(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + 2$$

diese Bedingungen erfüllt.

2.3 Berechnen Sie das Maß des Winkels, unter dem die Umgehungsstraße die alte Bundesstraße in der Anschlussstelle C trifft.

2.4 Berechnen Sie den Punkt der Umgehungsstraße, in dem sich das Krümmungsverhalten der Straße ändert.

2.5 Der nördliche Ortsrand wird als näherungsweise parabelförmig angesehen und durch die Funktion *r* mit

$$r(x) = -x^2 - \frac{1}{4}x + 1$$

beschrieben. Die von der neuen Umgehungsstraße, diesem nördlichen Ortsrand und der alten Bundesstraße eingeschlossene Fläche soll als Gewerbegebiet erschlossen werden. Markieren Sie diese Fläche in der obigen Abbildung und berechnen Sie die Höhe der Einnahmen, mit denen die Gemeinde rechnen kann, wenn das Land des Gewerbegebietes vollständig zu einem Preis von 10 € pro m^2 verkauft wird.

2.6 Das Naturschutzgebiet wird durch den Graphen der Geraden *k* mit

$$k(x) = -\frac{1}{2}x + 3$$

begrenzt. Gesucht ist der Punkt *P* auf der Umgehungsstraße mit minimalem Abstand zum Naturschutzgebiet. Beschreiben Sie in Worten eine Möglichkeit, den Punkt *P* und den minimalen Abstand zu bestimmen. Eine Rechnung soll nicht durchgeführt werden.

L ö s u n g e n

1. Untersuchung einer Funktionenschar mit e-Funktionsterm

Betrachtet wird die Funktionenschar $f_a(x) = 2ax \cdot e^{-x^2}$ für $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

1.1 Untersuchung auf Symmetrie und Grenzwertverhalten **4,0 Punkte**

– *Symmetrie* (2,0 P)

$D = \mathbb{R}$ ist symmetrisch zu O und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$f_a(-x) = 2a(-x) \cdot e^{-(-x)^2} = -(2ax \cdot e^{-x^2}) = -f_a(x) .$$

Es liegt also Punktsymmetrie zum Ursprung vor.

– *Grenzwerte* (2,0 P)

Für $x \to \pm\infty$ dominiert der Faktor e^{-x^2}, er strebt unabhängig von a gegen 0.

Daher gilt: $\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = 0$. (Die x-Achse ist Asymptote.)

(Das Vorzeichen von a bestimmt, ob die Annäherung an die Asymptote von oben oder von unten erfolgt.)

1.2 Ableitungen **4,0 Punkte**

$$f_a'(x) = 2a \cdot e^{-x^2} + 2ax \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = 2a \cdot (1 - 2x^2) \cdot e^{-x^2} \qquad (2{,}0\ \text{P})$$

$$\begin{aligned} f_a''(x) &= 2a \cdot [-4x \cdot e^{-x^2} + (1 - 2x^2) \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x)] \qquad (2{,}0\ \text{P}) \\ &= 2a \cdot [-4x - 2x + 4x^3] \cdot e^{-x^2} \\ &= 2a \cdot [4x^3 - 6x] \cdot e^{-x^2} = 4ax \cdot (2x^2 - 3) \cdot e^{-x^2} \end{aligned}$$

1.3 Untersuchung auf Nullstellen und Extrempunkte **6,0 Punkte**

– *Nullstellenbestimmung* (1,0 P)

$f_a(x) = 0 \Leftrightarrow 2ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (da $a \neq 0$) ($e^{-x^2} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$)

Es liegt die Nullstelle 0 vor.

– *Extremstellenbestimmung* (4,0 P)

Notwendige Bedingung:

$$f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{1}{2}} \text{ oder } x = +\sqrt{\frac{1}{2}}$$

(Es handelt sich um einfache Nullstellen, also mit Vorzeichenwechsel.)

Hinreichende Bedingung:

Da bei den Nullstellen von f_a' ein Vorzeichenwechsel vorliegt, handelt es sich um Extremstellen. Die Art der Extrema war dabei nicht gefragt.

– *Angabe der Extrempunkte* (1,0 P)

$$E_1\left(-\sqrt{\frac{1}{2}} \mid -2\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot a \cdot e^{-\frac{1}{2}}\right) \text{ und } E_2\left(\sqrt{\frac{1}{2}} \mid 2\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot a \cdot e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

1.4 Bestimmung eines Scharparameters **2,0 Punkte**

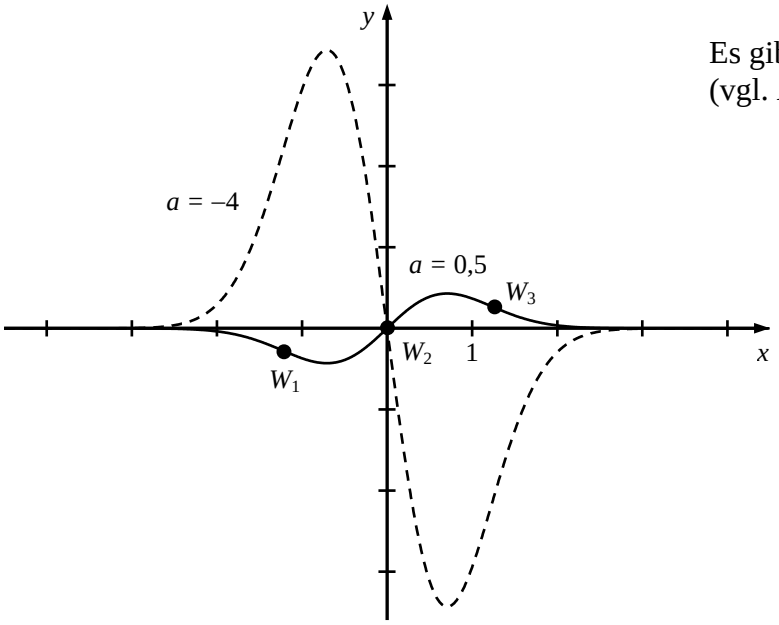
Steigung an der Schnittstelle $x = 0$ mit der x-Achse: $f_a'(0) = 2a \cdot (1 - 0) \cdot e^{-0} = 2a$

Bedingung: $f_a'(0) = \tan(45°) \Leftrightarrow 2a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$.

Gesuchte Funktion: $f_{0,5}(x) = x \cdot e^{-x^2}$.

1.5 Graph für $a = 0{,}5$ **4,5 Punkte**

Für $a = 0{,}5$ gilt näherungsweise: $E_1(-0{,}71 \mid -0{,}43)$ und $E_2(0{,}71 \mid 0{,}43)$.



Es gibt 3 Wendepunkte (vgl. Abbildung).

1.6 Entstehung des Graphen der Funktion mit $a = -4$ aus dem mit $a = 0{,}5$ **2,5 Punkte**

Der Graph für $a = -4$ entsteht aus dem Graphen von $a = 0{,}5$ durch Spiegelung an der x-Achse und Streckung in Richtung der y-Achse. (Zeichnung siehe bei 1.5)

2. Bau einer Umgehungsstraße

2.1 Lineare Funktion h (alte Bundesstraße) **1,0 Punkte**

Gerade durch A und C: Ursprungsgerade mit der Gleichung $h(x) = -\frac{1}{4}x$.

2.2 Knickfreier Übergang **7,0 Punkte**

Bedingungen: (4,0 P)

1. Verlauf durch Punkt A(–2 | 0,5): $g(-2) = \frac{1}{2}$
2. knickfreier Anschluss in A(–2 | 0,5): $g'(-2) = h'(-2) = -\frac{1}{4}$
3. Verlauf durch Punkt B(0 | 2): $g(0) = 2$
4. Verlauf durch Punkt C(2 | –0,5): $g(2) = -\frac{1}{2}$

Verifizierung: (3,0 P)

Für $g(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + 2$ ergibt sich die Ableitung:

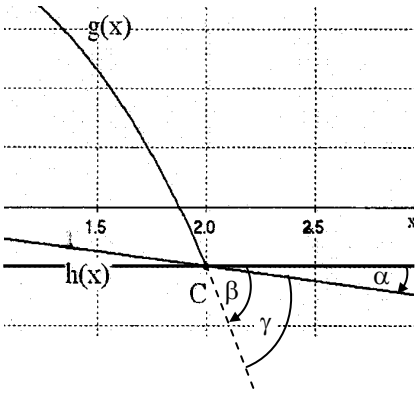
$$g'(x) = -\frac{3}{4}x^2 - x + \frac{3}{4}$$

1. $g(-2) = -\frac{1}{4}\cdot(-2)^3 - \frac{1}{2}\cdot(-2)^2 + \frac{3}{4}\cdot(-2) + 2 = 2 - 2 - \frac{3}{2}\frac{3}{2} + 2 = \frac{1}{2}$
2. $g'(-2) = -\frac{3}{4}\cdot(-2)^2 - (-2) + \frac{3}{4} = -3 + 2 + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4} = h'(-2)$
3. $g(0) = 2$
4. $g(2) = -\frac{1}{4}\cdot 2^3 - \frac{1}{2}\cdot 2^2 + \frac{3}{4}\cdot 2 + 2 = -2 - 2 + \frac{3}{2} + 2 = -\frac{1}{2}$

2.3 Winkel, unter dem die Umgehungsstraße die alte Bundesstraße trifft **3,0 Punkte**

Für die Ableitungen gilt: $h'(x) = -\frac{1}{4}$ und

$$g'(x) = -\frac{3}{4}x^2 - x + \frac{3}{4} .$$



Steigungswinkel in C(2 | –0,5):

$h'(2) = -\frac{1}{4}$, also $\alpha \approx -14{,}04°$

$g'(2) = -\frac{17}{4}$, also $\beta \approx -76{,}76°$

Schnittwinkel: $\gamma = |\beta - \alpha| = 62{,}72°$.

2.4 Punkt der Umgehungsstraße mit Änderung des Krümmungsverhaltens **3,0 Punkte**

Gesucht ist der Wendepunkt von *g*:

Zweite Ableitung: $g''(x) = -\frac{3}{2}x - 1$

Notwendige Bedingung: $g''(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$ (mit Vzw.)

Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel von g'' an der Stelle $-\frac{3}{2}$

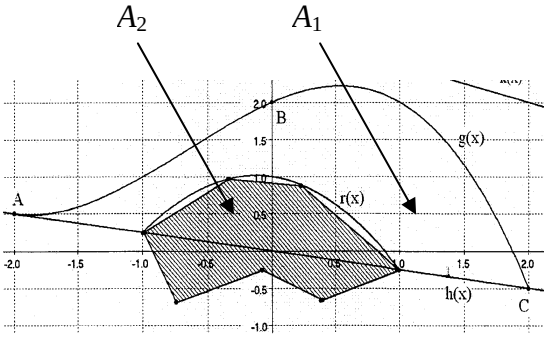
oder $g'''(x) = -\frac{3}{2} \neq 0$

Wegen $g\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{73}{54}$ ergibt sich der Wendepunkt $W\left(-\frac{2}{3} \mid \frac{73}{54}\right)$.

2.5 Fläche des Gewerbegebiets **9,0 Punkte**

Man betrachtet folgende Flächen:

- A_1: Fläche zwischen den Funktionen *g* und *h* über dem Intervall [–2 ; 2]
- A_2: Fläche zwischen den Funktionen *r* und *h* über dem Intervall [–1 ; 1]



Für den gesuchten Flächeninhalt gilt dann:

$\mu(A) = \mu(A_1) - \mu(A_2)$.

Berechnung von $\mu(A_1)$:

Es gilt: $g(x) - h(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + 2$.

Damit folgt: $\mu(A_1) = \int_{-2}^{2} (g(x) - h(x))\,dx = \left[-\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-2}^{2} = \frac{16}{3}$

Berechnung von $\mu(A_2)$:

Es gilt: $r(x) - h(x) = -x^2 + 1$.

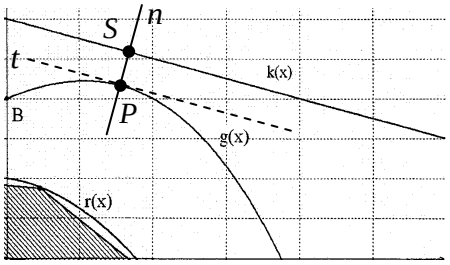
Damit folgt: $\mu(A_2) = \int_{-1}^{1} (r(x) - h(x))\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$

Insgesamt folgt für den gesuchten Flächeninhalt: $\mu(A) = \frac{16}{3} - \frac{4}{3} = 4$.

Da eine Längeneinheit 1km beträgt, sind dies also 4 km^2 = 4 000 000 m^2.

Die Gemeinde kann mit Einnahmen in Höhe von 40 Millionen Euro rechnen.

2.6 Punkt *P* der Umgehungsstraße mit minimalem Abstand zum Naturschutzgebiet **4,0 Punkte**



Folgende Argumentation ist z.B. möglich:

Die kürzeste Strecke liegt auf einer Geraden, die senkrecht auf *k* und senkrecht auf der Tangenten *t* an G_g im Berührpunkt *P* steht.

Im gesuchten Punkt *P* sind also die Tangente *t* und und die Gerade *k* parallel. Dies bedeutet, dass sie in ihren Steigungen übereinstimmen.

Damit ergibt sich die Bedingung: $\underset{\text{Steigung von } g}{g'(x)} = \underset{\text{Steigung von } k}{-\frac{1}{2}}$.

[Man wählt gegebenenfalls den Berührpunkt *P* mit dem geeigneten *x*-Wert (l. Quadrant).]

Man berechnet die Entfernung zwischen dem Berührpunkt *P* und dem Schnittpunkt *S* der Normalen *n* in *P* mit der Geraden *k*.

Hinweis zur Rechnung (nicht verlangt):

$$g'(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{4}x^2 - x + \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{19}}{3}$$

positive Lösung: $x \approx 0{,}786$; gesuchter Punkt: $P(0{,}786 \mid 2{,}159)$

Aufgabe 2
ANALYTISCHE GEOMETRIE

Der geplante Neubau eines Wohnhauses erhält ein versetztes Pultdach (s. Abb.). Seine quadratische Grundfläche liegt in der x_1-x_2-Ebene und die Koordinatenachsen verlaufen gemäß der Abbildung entlang der Hauskanten.

Gegeben sind die Punkte $A(0 \mid 0 \mid 5)$, $B(0 \mid 5 \mid 8{,}5)$ und $D(-10 \mid 0 \mid 5)$.

(1 LE entspricht l m)

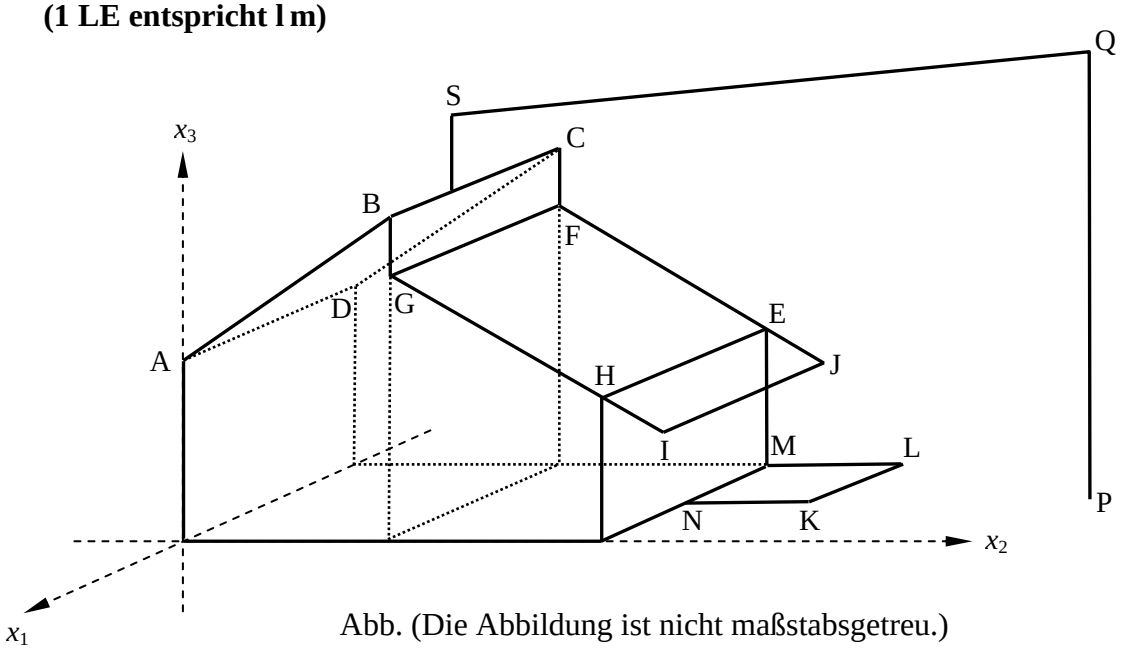


Abb. (Die Abbildung ist nicht maßstabsgetreu.)

1. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der die Dachfläche *ABCD* liegt.
[zur Kontrolle: eine mögliche Koordinatengleichung ist $-7x_2 + 10x_3 - 50 = 0$]

2. Der Bebauungsplan des Wohngebietes gibt vor, dass die Dachneigung (d.h. das Maß des Winkels zwischen der Dachfläche und der horizontalen Ebene durch den Punkt A) zwischen 34° und 37° liegen soll.
Überprüfen Sie, ob diese Vorschrift bei der Dachfläche *ABCD* des Neubaus erfüllt ist.

3. Die zweite Dachfläche, in der die Punkte *E*, *F*, *G* und *H* liegen, gehört zu einer Ebene der Ebenenschar $e_k: 7x_2 + 10x_3 - k = 0$ mit $k \in \mathbb{R}$.

3.1 Beschreiben Sie mit wenigen Worten die gegenseitige Lage aller Ebenen dieser Schar und begründen Sie Ihre Antwort kurz. Welchen Einfluss hat der Parameter *k*?

3.2 Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene der Schar, die den Punkt $E(-10 \mid 10 \mid 4)$ enthält.
[zur Kontrolle: eine mögliche Koordinatengleichung ist $7x_2 + 10x_3 - 110 = 0$]

3.3 Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte *C*, *F* und *G*.
Geben Sie den Abstand zwischen dem Dachfirst $\overline{BC}$ und der Strecke $\overline{FG}$ an.

4. Im Punkt $P(-5 \mid 23 \mid 0)$ steht ein 15 m hoher Strommast. Von seiner Spitze Q führt die Stromleitung zur Spitze $S(-5 \mid 5 \mid 9)$ des Dachständers des Neubaus.
Berechnen Sie den Abstand des Punktes E von der Stromleitung.

5. Die Terrasse $KLMN$ hat eine rechteckige Form mit den Eckpunkten

$K(-5 \mid 14 \mid 0)$, $L(-10 \mid 14 \mid 0)$, $M(-10 \mid 10 \mid 0)$ und N.

Sie wird vom Dachüberstand mit den Ecken $I(0 \mid 12{,}5 \mid 2{,}25)$ und $J(-10 \mid 12{,}5 \mid 2{,}25)$ überschattet (s. Abbildung).

Zur Mittagszeit fallen die Sonnenstrahlen parallel zum Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ auf das Grundstück. Berechnen Sie die Breite des Schattenstreifens auf der Terrasse.

L ö s u n g e n

1. Koordinatengleichung der Ebene *e* durch die Punkte A, B und D — 4,0 Punkte

– Richtungsvektoren: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} = \vec{u}$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \text{ wähle } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

– Normalenvektor: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 10 \end{pmatrix} = \vec{n}$.

– Punktnormalengleichung: $e: \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right] = 0$

– Allgemeine Normalengleichung: $e: \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 50 = 0$

– Koordinatengleichung: $e: -7x_2 + 10x_3 - 50 = 0$

2. Winkel zwischen der Dachebene *e* und der x_1-x_2-Ebene — 2,5 Punkte

Zu berechnen ist der Winkel zwischen zwei Ebenen:

- Ebene *e* mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 10 \end{pmatrix}$ mit $|\vec{n}| = \sqrt{149}$ (Dachebene)
- x_1-x_2-Ebene mit dem Normalenvektor $\vec{n}_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $|\vec{n}_{12}| = 1$ (Horizontale)

Damit folgt: $\cos(\alpha) = \left| \dfrac{\vec{n} \cdot \vec{n}_{12}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}_{12}|} \right| = \dfrac{0+0+10}{\sqrt{49} \cdot \sqrt{1}} \approx 0{,}819$ und $\alpha \approx 35°$.

Die Bauvorschrift ist damit erfüllt.

3. Zweite Dachfläche als Teil der Ebenenschar e_k

3.1 Gegenseitige Lage der Ebenen der Schar **2,0 Punkte**

Alle Ebenen der Schar besitzen den gleichen Normalenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 10 \end{pmatrix}$ (unabhängig von k).

Sie sind daher parallel zueinander.

Alle Ebenen der Schar unterscheiden sich in der Konstante k der allgemeinen Normalengleichung. Für unterschiedliche Werte von k haben die Ebenen unterschiedliche Abstände vom Ursprung.

3.2 Gleichung der Ebene der Schar durch den Punkt E **2,5 Punkte**

Die Punktprobe für $E(-10 \mid 10 \mid 4)$ in der Gleichung $e_k: 7x_2 + 10x_3 - k = 0$ ergibt:

$$7 \cdot 10 + 10 \cdot 4 - k = 0 \Leftrightarrow k = 110$$

Damit lautet die gesuchte Gleichung: $e_{110}: 7x_2 + 10x_3 - 110 = 0$

3.3 Koordinaten der Punkte F, G, C und Abstand zwischen den Dachfirsten **4,0 Punkte**

- Koordinaten von F: $F(-10 \mid 5 \mid 7{,}5)$

  x_1-Koordinate wie D oder E: $x_1 = -10$

  x_2-Koordinate wie B: $x_2 = 5$

  x_3-Koordinate: $x_3 = 7{,}5$

  (Mögliche Begründung für die x_3-Koordinate: F liegt in der Ebene e_{110}. Setzt man $x_2 = 5$ in die Gleichung von e_{110} sein, so folgt: $7 \cdot 5 + 10x_3 - 110 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 7{,}5$)

- Koordinaten von G: $G(0 \mid 5 \mid 7{,}5)$

  x_1-Koordinate wie A oder B: $x_1 = 0$,

  x_2-Koordinate wie F: $x_2 = 5$,

  x_3-Koordinate wie F: $x_3 = 7{,}5$

- Koordinaten von C: $C(-10 \mid 5 \mid 8{,}5)$

  x_1-Koordinate wie F: $x_1 = -10$,

  x_2-Koordinate wie F: $x_2 = 5$,

  x_3-Koordinate wie B: $x_3 = 8{,}5$

Es gilt: $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Der Dachfirst $\overline{CB}$ und die Strecke $\overline{FG}$ verlaufen also parallel zueinander. Ihren Abstand erhält man z. B. durch Vergleich der x_3-Koordinaten der Punkte C und F bzw. der Punkte B und G.

Die Differenz beträgt $8{,}5 - 7{,}5 = 1$ (LE). Der gesuchte Abstand beträgt also 1 m.

4. Abstand des Punktes *E* von der Stromleitung **5,0 Punkte**

Gerade g, die das Stromkabel beschreibt (2,0 P)

Gegeben ist die Spitze $S(-5 \mid 5 \mid 9)$.

Koordinaten des Punktes *Q*: $Q(-5 \mid 23 \mid 15)$ (in der Höhe 15 über $P(-5 \mid 23 \mid 0)$)

Verbindungsvektor von *S* nach *Q*: $\overrightarrow{SQ} = \begin{pmatrix} -5 \\ 23 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gerade durch *S* und *Q*: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Abstandsberechnung (3,0 P)

Gesucht ist der Abstand des Punktes *E* zu der Geraden *g*.

1. Möglichkeit: Lotebenenmethode

- Hilfsebene e_H senkrecht *g* durch $E(-10 \mid 10 \mid 4)$:

$$e_H: \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 34 = 0$$

- Schnitt von e_H mit *g* :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right] - 34 = 0 \Leftrightarrow 24 + 10\lambda - 34 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

- Damit ergibt sich der Lotfußpunkt $R(-5 \mid 8 \mid 10)$.

- Abstand: $d(g\,;E) = d(R\,;E) = |\overrightarrow{RE}| = \left| \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \right|$

$$= \sqrt{(-5)^2 + 2^2 + (-6)^2} = \sqrt{65} \approx 8{,}06$$

Der Punkt *E* ist von der Stromleitung ungefähr 8,06 m entfernt.

2. Möglichkeit: Abstandsformel

$$d(E\,;g) = \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \left| \vec{u} \times \overrightarrow{EA} \right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \left| \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \sqrt{650} = \sqrt{65} \approx 8{,}06$$

$E(-10 \mid 10 \mid 4)$ gegebener Punkt

$A(-5 \mid 5 \mid 9)$ Aufpunkt von *g*

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ Richtungsvektor von *g*

5. **Schattenbreite** **5,0 Punkte**

- *Schattenpunkt I' des Eckpunkts I*

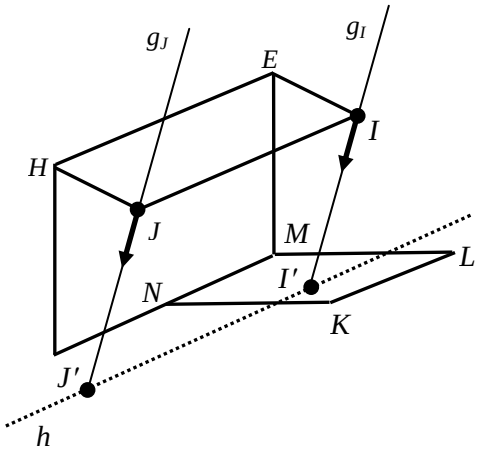
  Gerade des Sonnenstrahls durch den Punkt I:

  $$g_I: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12,5 \\ 2,25 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

  Den Schnittpunkt mit der x_1-x_2-Ebene erhält man, indem man $x_3 = 0$ in g_I einsetzt:

  $$0 = 2,25 + \lambda \cdot (-5) = 0 \Leftrightarrow 2,25 = 5\lambda$$
  $$\Leftrightarrow \lambda = 0,45$$

  Setzt man diesen Wert in die Gleichung von g_I ein, so ergibt sich der Schattenpunkt von I auf dem Boden zu $I'(-0,45 \mid 13,4 \mid 0)$.



- *Schattenpunkt J' des Eckpunkts J*

  Der Eckpunkt I (0 | 12,5 | 2,25) ist gegenüber dem Eckpunkt J (–10 | 12,5 | 2,25) um 10 Einheiten in negativer x_1-Richtung verschoben. Diese Verschiebung übertragt sich auch auf die Schattenpunkte I' und J'.
  Daher gilt: $J'(-10,45 \mid 13,4 \mid 0)$.

- *Schattengrenze*

  Die Schattengrenze auf dem Boden verläuft durch die Punkte I' und J' und wird beschrieben durch die Gerade h durch I' und J':

  $$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -0,45 \\ 13,4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \text{(parallel zur } x_1\text{-Achse)}$$

  Wegen $\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{LK} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ verläuft die Schattengrenze wie in der Abbildung angedeutet parallel zur Hauswand $\overline{MN}$ und zur Terrassenbegrenzung $\overline{LK}$.

- *Schattenbreite*

  Die Schattenbreite ist der Abstand zwischen der Hauswand und der Schattengrenze. Sie entspricht z. B. der Differenz der x_2-Koordinaten der beiden Punkte $M(-10 \mid 10 \mid 0)$ und $I'(-0,45 \mid 13,4 \mid 0)$.
  Für die Schattenbreite ergibt sich: 13,4 m – 10 m = 3,4 m .

Aufgabe 3

WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

1. Für den Einlass in die Diskothek "Stars" sind die beiden Türsteher Harry und Norbert zuständig. Harry kontrolliert den Haupteingang, Norbert den Nebeneingang. Erfahrungsgemäß wollen 60% der Besucher die Diskothek durch den Haupteingang betreten. Harry gewährt 48% der von ihm kontrollierten Jugendlichen Einlass. Norbert gewährt 75% der von ihm kontrollierten Jugendlichen Einlass.
(Einmal abgewiesene Besucher bemühen sich nicht erneut um Einlass!)

1.1 Zeichnen Sie ein entsprechendes Baumdiagramm und beschriften Sie die Äste.

1.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Jugendlicher, der die Diskothek besuchen will, nicht eingelassen wird.

1.3 Jonny ist Chef der Diskothek. Manchmal überprüft er, wie sorgfältig die Türsteher arbeiten. Am heutigen Abend überprüft er die Arbeitsweise von Norbert; dabei weist Jonny 6% der von Norbert eingelassenen Jugendlichen ab.

Berechnen Sie, wie viel Prozent der Jugendlichen am heutigen Abend insgesamt in die Diskothek eingelassen werden.

1.4 Ein Besucher ist am heutigen Abend eingelassen worden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kam er durch den Nebeneingang?

1.5 Wie groß ist die Chance, eingelassen zu werden, wenn Jonny nur jeden Zweiten der von Norbert eingelassenen Jugendlichen überprüft? Zeichnen Sie ein entsprechendes Baumdiagramm.

2. Am späten Abend stehen 15 Jugendliche vor einer Diskothek. Lediglich 10 Jugendlichen wird noch der Eintritt gewährt.

2.1 Berechnen Sie, wie viele verschiedene Gruppen mit 10 Personen aus den 15 wartenden Jugendlichen gebildet werden können.

2.2 Unter den 10 eingelassenen Personen befindet sich ein Zwillingspaar. Die Zwillinge sind nicht zu unterscheiden. Die 10 Personen werden nacheinander eingelassen. Berechnen Sie, wie viele verschiedene Möglichkeiten es gibt, diese 10 Personen nacheinander einzulassen.

2.3 Unter den 15 Personen befinden sich 5 Freunde. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter den 10 eingelassenen Personen wenigstens 4 Freunde befinden.

3. Unabhängig voneinander überlegen 4 Jugendliche, ob sie die Diskothek besuchen wollen oder nicht. Jugendliche entscheiden sich mit einer Wahrscheinlichkeit von 30% für einen Besuch in dieser Diskothek.

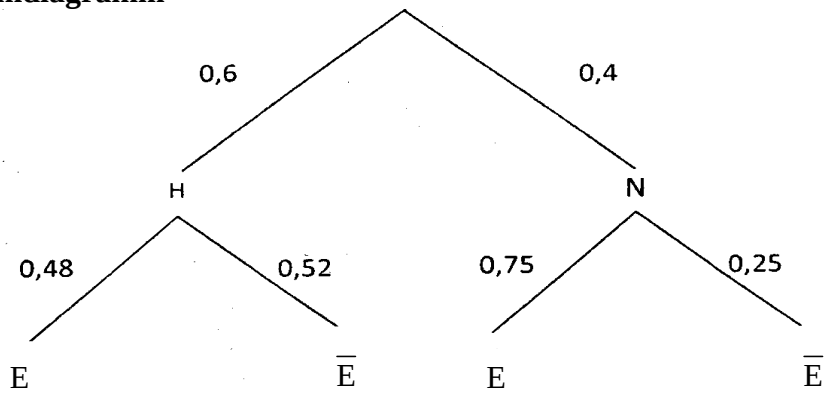
3.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer der 4 Jugendlichen die Diskothek besucht.

3.2 Berechnen Sie, wie viele Jugendliche zur Gruppe der 4 Jugendlichen hinzukommen müssen, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer aus der neuen Gruppe in die Diskothek geht, mindestens 85% beträgt.

L ö s u n g e n

1. Einlass in die Diskothek "Stars"

1.1 Baumdiagramm **2,0 Punkte**



E : Einlass
$\overline{E}$: kein Einlass
H : Haupteingang (Harry)
N : Nebeneingang (Norbert)

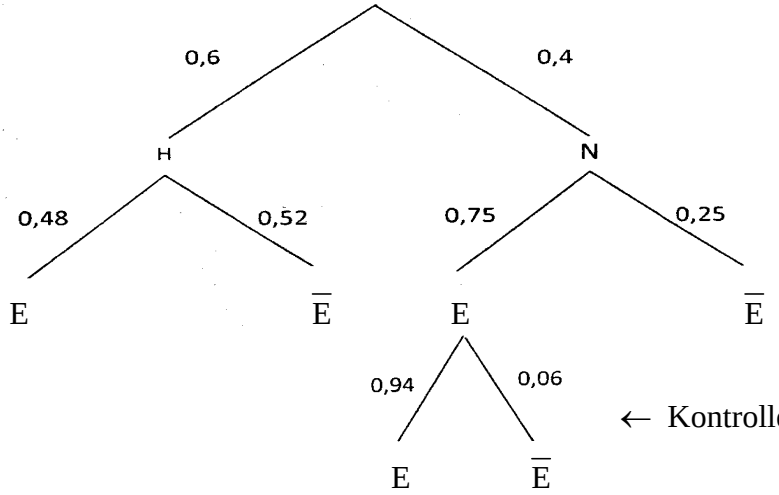
1.2 Jugendlicher wird nicht eingelassen. **2,0 Punkte**

P(„kein Einlass“) = 0,6 · 0,52 + 0,4 · 0,25 = 0,412 ; also 41,2%

1.3 Prozentsatz der Jugendlichen, die eingelassen werden. **2,0 Punkte**

Der obige Baum wird bei den von Norbert eingelassenen Jugendlichen um eine Stufe erweitert.

Johnny weist 6% der von Norbert eingelassenen Jugendlichen ab. Anders formuliert bedeutet dies, dass 94% der von Norbert eingelassenen Jugendlichen auch einlässt.



← Kontrolle durch Johnny

Es bedeute A: „Einlass am heutigen Abend. Dann gilt:

$P(A) = 0{,}6 \cdot 0{,}48 + (0{,}4 \cdot 0{,}75) \cdot 0{,}94 = 0{,}57$; also 57%

↑ Harry ↑ Norbert ↑ Kontrolle von Johnny

1.4 Eintritt durch Nebeneingang **2,0 Punkte**

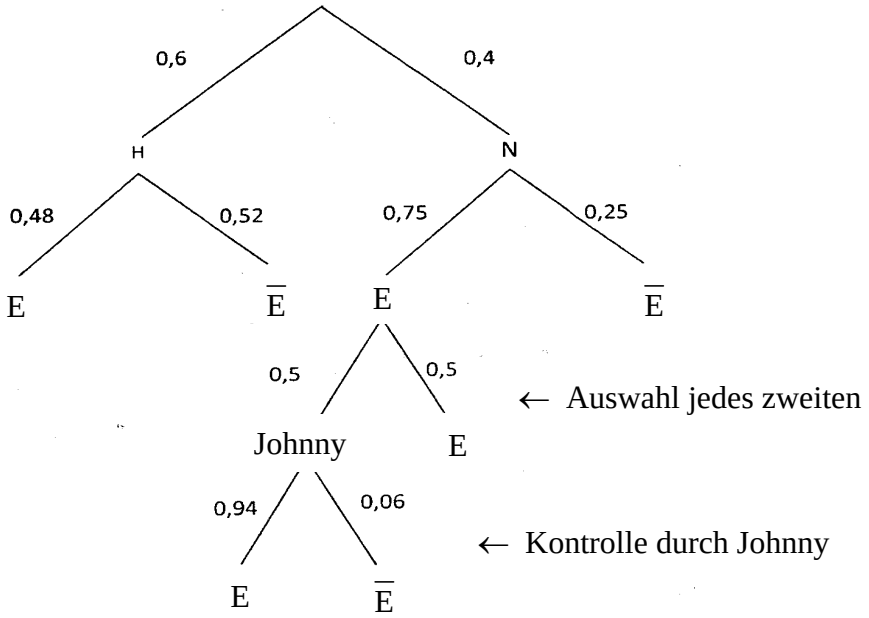
Gesucht ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit:

Bedingung: Besucher ist heute Abend (also mit Kontrolle Johnny) eingelassen worden.

$$P_A(N) = \frac{P(N \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}94}{0{,}57} \approx 0{,}4947 = 49{,}47\%$$

1.5 Jonny prüft nur jeden zweiten der von Norbert eingelassenen Jugendlichen. **3,0 Punkte**

Vor der Kontrolle durch Johnny ist ein weiterer Teilbaum einzufügen, der die Kontrolle nur jedes zweiten Besuchers berücksichtigt.



Es bedeute B: „Einlass am heutigen Abend mit Auswahl jeden zweiten Jugendlichen“

$$P(\text{„B“}) = \underset{\text{Harry}}{0{,}6} \cdot 0{,}48 + \underset{\substack{\text{Norbert ohne}\\ \text{Kontrolle Johnny}}}{0{,}4 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}5} + \underset{\substack{\text{Norbert mit}\\ \text{Kontrolle von Johnny}}}{0{,}4 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}94} \approx 0{,}579 = 57{,}9\%$$

2. 15 Jugendliche vor der Diskothek

2.1 Anzahl der möglichen Zehnergruppen **2,0 Punkte**

Auswahl einer ungeordneten Stichprobe (10 Personen aus 15):

$$|\,\Omega\,| = \binom{15}{10} = 3003$$

2.2 Gruppe mit Zwillingspaar **2,5 Punkte**

Möglichkeit der Reihenfolge für 10 unterscheidbare Personen mit Korrektur wegen zwei ununterscheidbarer Zwillinge:

$$\frac{10!}{2!} = 1\,814\,400 \quad \text{oder} \quad \binom{10}{8} \cdot 8! \cdot \binom{2}{2} = 1\,814\,400\,.$$

2.3 Gruppe mit 5 Freunden **3,5 Punkte**

Ereignis A: Mindestens 5 Freunde

$$\text{Anzahl: } |\,A\,| = \underbrace{\binom{10}{6} \cdot \binom{5}{4}}_{\text{4 Freunde}} + \underbrace{\binom{10}{5} \cdot \binom{5}{5}}_{\text{5 Freunde}} = 1050 + 252 = 1302$$

$$\text{Wahrscheinlichkeit: } P(A) = \frac{|\,A\,|}{|\,\Omega\,|} = \frac{1302}{3003} \approx 0{,}4336 = 43{,}36\%$$

3. Überlegung von 4 Jugendlichen über Diskobesuch

3.1 Diskobesuch von mindestens 4 Jugendlichen **2,0 Punkte**

Interpretation als Bernoullikette der Länge n = 4

Treffer T: Besuch der Diskothek mit $p = 0{,}3$

$$P(\mathrm{T} \geq 1) = 1 - P(\mathrm{T} = 0) = 1 - \binom{4}{0} \cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^4 \approx 1 - 0{,}2401 = 0{,}7599 = 75{,}99\%$$

3.2 Berechnung der Kettenlänge **5,0 Punkte**

$$\begin{aligned}
P(\mathrm{T} \geq 1) > 0{,}85 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - P(\mathrm{T} = 0) > 0{,}85 \\
&\Leftrightarrow \quad -P(\mathrm{T} = 0) > -0{,}15 \quad | \cdot (-1) \\
&\Leftrightarrow \quad P(\mathrm{T} = 0) < 0{,}15 \\
&\Leftrightarrow \quad \binom{n}{0} \cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^n < 0{,}15 \\
&\Leftrightarrow \quad 0{,}7^n < 0{,}15 \quad | \ln \\
&\Leftrightarrow \quad n \cdot \ln(0{,}7) < \ln(0{,}15) \quad | : \ln(0{,}7) < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad n > \frac{\ln(0{,}15)}{\ln(0{,}7)} \approx 5{,}3189
\end{aligned}$$

Die Gruppe muss mindestens aus 6 Personen bestehen. Es müssen daher mindestens 2 Personen hinzukommen.

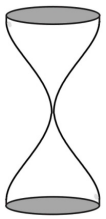
Schriftliche Abiturprüfung 2010

E-Kurs

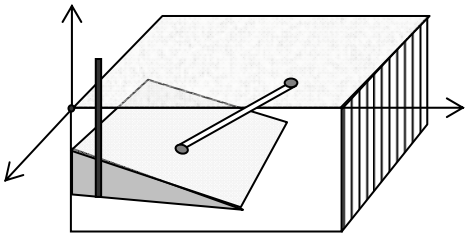
Nachtermin

Themenübersicht

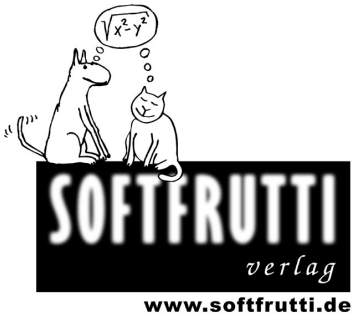
- Aufgabe 1: **Analysis**
  - Untersuchung der Funktionenschar $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; ; \; x \mapsto 2ax \cdot e^{2-ax^2}$
  - Modellierung: Sanduhr
    - Ganzrationale Funktionsgleichung ermitteln
    - Rotationsvolumen berechnen
    - Darstellung der Randfunktion mithilfe einer Sinuskurve



- Aufgabe 2: **Analytische Geometrie**
  - Winkel zwischen Ebenen
  - Schnitt zweier Ebenen
  - Schnitt Gerade-Ebene
  - Winkel zwischen Gerade und Ebene



- Aufgabe 3: **Stochastik**
  - Kombinatorischen Berechnung von Wahrscheinlichkeiten
  - Estellen und Auswerten eines Baumdiagramms
  - Kombinatorik
  - Bernoulli-Kette



Aufgabe 1

ANALYSIS

1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto 2ax \cdot e^{2-ax^2}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$.

1.1 Bestimmen Sie das Symmetrieverhalten der Funktionen der Schar.
Berechnen Sie die Grenzwerte für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$.

1.2 Zeigen Sie, dass für die Funktionsterme der 1. und 2. Ableitung gilt:

$$f_a'(x) = 2a \cdot (1 - 2ax^2) \cdot e^{2-ax^2} \quad \text{und}$$

$$f_a''(x) = 4a^2x \cdot (2ax^2 - 3) \cdot e^{2-ax^2} \ .$$

1.3 Zeigen Sie, dass alle Extrempunkte der Schar auf einer Hyperbel liegen und geben Sie deren Funktionsgleichung an.

1.4 Bestimmen Sie den Parameter a so, dass der Graph von f_a im Ursprung die Steigung $\frac{1}{2}e^2$ hat.

1.5 Berechnen Sie die Extrem- und Wendepunkte des Graphen der Scharfunktion $f_{\frac{1}{4}}$.

Zeichnen Sie unter Verwendung dieser Punkte sowie der Ergebnisse der vorangehenden Teilaufgaben den Graphen von $f_{\frac{1}{4}}$.

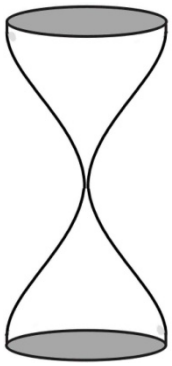
1.6 Zeigen Sie, dass zwei verschiedene Funktionen der Schar jeweils genau drei Schnittstellen besitzen und geben Sie diese an.

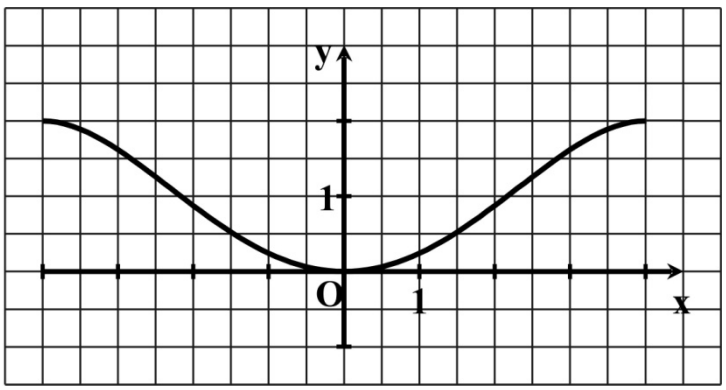
1.7 Zeigen Sie, dass der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen jeder Scharfunktion f_a und der x-Achse über dem Intervall $[0\ ;\ \infty[$ endlich ist und nicht von a abhängt.

2. Die links abgebildete Sanduhr ist 8 cm hoch, der Radius von Boden und Deckel beträgt 2 cm. Die Sanduhr ist ein Körper, der durch Rotation des Graphen einer Funktion g um die x-Achse über dem Intervall $[-4\ ;\ 4]$ entsteht. In der rechten Abbildung ist die zugrunde liegende Profilkurve (Graph von g) abgebildet.

(Eine Längeneinheit entspricht 1 cm)

Da die Sanduhr an der Engstelle sehr schmal ist, darf vereinfachend angenommen werden, dass der Graph von g durch den Ursprung verläuft.





2.1 Stellen Sie eine Funktionsgleichung für diese Profilkurve auf. Nehmen Sie dazu an, dass $g(x)$ eine Polynomfunktion vierten Grades ist, die im Ursprung und an den Rändern des dargestellten Schaubildes horizontale Tangenten hat. Achten Sie auf Symmetrie.

(Zur Kontrolle: $g(x) = -\frac{1}{128}x^4 + \frac{1}{4}x^2$)

2.2 Berechnen Sie das Volumen der Sanduhr, die Dicke des Glases kann vernachlässigt werden.

2.3 Der dargestellte Verlauf des Graphen von g ähnelt dem einer verschobenen Kosinus- bzw. Sinus-Kurve. Geben Sie eine Funktionsgleichung $h(x)$ für die allgemeine Kosinus-Funktion (oder wahlweise Sinus-Funktion) an, welche in den drei Extrempunkten mit dem Graphen der dargestellten Funktion g übereinstimmt.

L ö s u n g e n

1. Untersuchung einer Funktionenschar mit e-Funktionsterm

Betrachtet wird die Funktionenschar $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto 2ax \cdot e^{2-ax^2}$ für $a \in \mathbb{R}^+$.

1.1 Untersuchung auf Symmetrie und Grenzwertverhalten **3,0 Punkte**

- *Symmetrie* (1,5 P)
  $D = \mathbb{R}$ ist symmetrisch zu O und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ und $a > 0$:
  $$f_a(-x) = 2a \cdot (-x) \cdot e^{2-a(-x)^2} = -2ax \cdot e^{2-ax^2} = -f_a(x)\ .$$
  Es liegt also Punktsymmetrie zum Ursprung vor.

- *Grenzwerte* (1,5 P)
  Für $x \to \pm\infty$ dominiert der Faktor e^{2-ax^2}, er strebt unabhängig von $a > 0$ gegen 0.
  Daher gilt: $\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\underbrace{2ax}_{\to-\infty} \cdot \underbrace{e^{2-ax^2}}_{\to 0^+}) = 0^-$ (Die x-Achse ist Asymptote.)
  $$\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = \lim_{x\to+\infty} (\underbrace{2ax}_{\to+\infty} \cdot \underbrace{e^{2-ax^2}}_{\to 0^+}) = 0^+\ .$$

1.2 Ableitungen **4,0 Punkte**

$$f_a'(x) = 2ax \cdot e^{2-ax^2} \cdot (-2ax) + 2a \cdot e^{2-ax^2} = 2a \cdot (-2ax^2 + 1) \cdot e^{2-ax^2}$$

$$f_a''(x) = 2a(-4ax \cdot e^{2-ax^2} + (-2a^2x^2 + 1) \cdot e^{2-ax^2} \cdot (-2ax))$$
$$= 4a^2x \cdot (-2 - (-2a^2x^2 + 1)) \cdot e^{2-ax^2} = 4a^2x \cdot (2ax^2 - 3) \cdot e^{2-ax^2}$$

1.3 Ortskurve der Extremstellen **6,5 Punkte**

- Extremstellenbestimmung (3,5 P)
  – Notwendige Bedingung:
  $$f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow 2a \cdot (-2ax^2 + 1) \cdot e^{2-ax^2} = 0 \Leftrightarrow -2ax^2 + 1 = 0$$
  $$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2a} \Leftrightarrow x = \sqrt{\tfrac{1}{2a}} \vee x = -\sqrt{\tfrac{1}{2a}} \qquad (a > 0)$$
  – Hinreichende Bedingung:
  $$f_a''(\sqrt{\tfrac{1}{2a}}) = 4a^2 \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2a}} \cdot (2a \cdot \tfrac{1}{2a} - 3) \cdot e^{2 - a \cdot \frac{1}{2a}} = -4a^2 \sqrt{\tfrac{1}{2a}} \cdot e^{1,5} < 0 \quad (\text{da } a > 0)$$
  Es liegt ein Hochpunkt vor. Wegen der Punktsymmetrie liegt bei $-\sqrt{\frac{1}{2a}}$ ein Tiefpunkt.
  Angabe der Extrempunkte: $H(\sqrt{\tfrac{1}{2a}} \mid \sqrt{2a} \cdot e^{1,5})$ und $T(-\sqrt{\tfrac{1}{2a}} \mid -\sqrt{2a} \cdot e^{1,5})$

- *Bestimmung der Ortskurve* (3,0 P)
  Hochpunkt: $x = \sqrt{\frac{1}{2a}} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \sqrt{2a}$ Tiefpunkt: $x = -\sqrt{\frac{1}{2a}} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = -\sqrt{2a}$
  $$y = \sqrt{2a} \cdot e^{1,5} = \frac{1}{x} \cdot e^{1,5} = e^{1,5} \cdot \frac{1}{x} \qquad y = -\sqrt{2a} \cdot e^{1,5} = \frac{1}{x} \cdot e^{1,5} = e^{1,5} \cdot \frac{1}{x}$$
  Es ergibt sich jeweils die Ortkurve mit der Gleichung $y = e^{1,5} \cdot \frac{1}{x}$ (Hyperbel).

  Alternative: Es gilt: $x^2 = \frac{1}{2a} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2x^2}$
  Einsetzen in die Gleichung von f_a: $y = 2 \cdot \frac{1}{2x^2} \cdot x \cdot e^{2 - \frac{1}{2x^2} \cdot x^2} = \frac{1}{x} \cdot e^{1,5}$

1.4 Bestimmung eines Parameterwerts **2,0 Punkte**

Bedingung: $f_a'(0) = \frac{1}{2}e^2 \Leftrightarrow 2ae^2 = \frac{1}{2}e^2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$

1.5 Extrem- und Wendepunkte zur Scharfunktion $f_{0,25}$ und Graph **9,0 Punkte**

- *Extrempunkte* (1,0 P)

  Aus Teilaufgabe 1.3 mit $a = \frac{1}{4}$:

  $$H(\sqrt{2} \mid \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot e^{1,5}) \text{ und } T(-\sqrt{2} \mid -\sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot e^{1,5})$$

- *Zweite Ableitung* (1,5 P)

  Nach 1.2 ergibt sich für $a = \frac{1}{4}$: $f''(x) = \frac{1}{4}x \cdot (\frac{1}{2}x^2 - 3) \cdot e^{2-\frac{1}{4}x^2}$

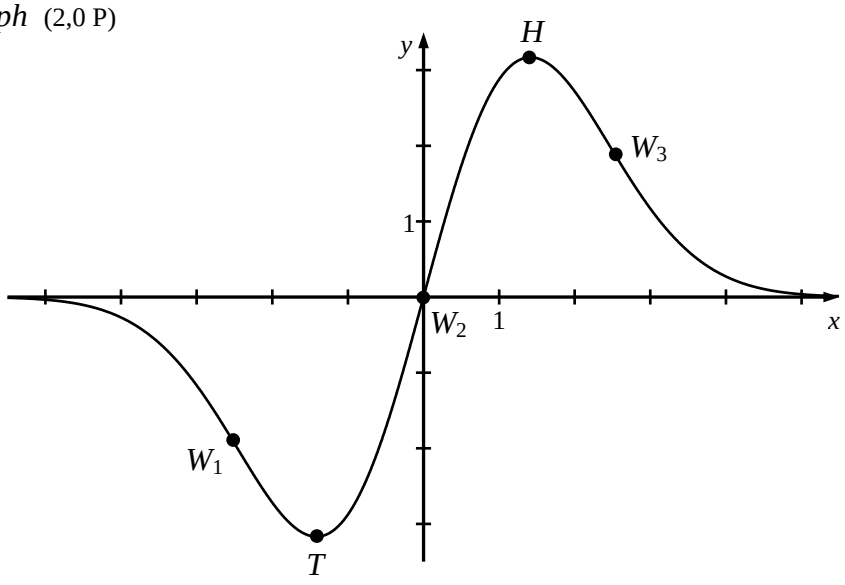
- *Wendepunkte* (4,5 P)
  - Notwendige Bedingung:

    $$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \tfrac{1}{4}x \cdot (\tfrac{1}{2}x^2 - 3) \cdot e^{2-\frac{1}{4}x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\sqrt{6} \vee x = +\sqrt{6}$$

  - Hinreichende Bedingung:
    Es handelt sich um einfache Nullstellen der zweiten Ableitung, also um Nullstellen mit Vorzeichenwechsel. Daher liegen Wendepunkte vor.

  - Angabe der Wendepunkte: $W_1(-\sqrt{6} \mid -\sqrt{\tfrac{3}{2}}e)$, $W_2(0 \mid 0)$ und $W_3(\sqrt{6} \mid \sqrt{\tfrac{3}{2}}e)$

- *Graph* (2,0 P)



1.6 Genau drei Schnittstellen für zwei verschiedene Funktionen der Schar **4,5 Punkte**

Für $0 < a < b$ macht man den Ansatz:

$$\begin{aligned}
f_a(x) = f_b(x) &\Leftrightarrow 2ax \cdot e^{2-ax^2} = 2bx \cdot e^{2-bx^2} \\
&\Leftrightarrow 2x \cdot (ae^{2-ax^2} - be^{2-bx^2}) = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ a \cdot e^{2-ax^2} = b \cdot e^{2-bx^2} \\
&\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ e^{(2-ax^2)-(2-bx^2)} = \frac{b}{a} \\
&\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ e^{x^2(b-a)} = \frac{b}{a} \\
&\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x^2 \cdot (b-a) = \ln(\tfrac{b}{a}) \\
&\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = -\sqrt{\tfrac{\ln(\frac{b}{a})}{b-a}} \ \vee \ x = -\sqrt{\tfrac{\ln(\frac{b}{a})}{b-a}} \qquad (\ \ln(\tfrac{b}{a}) > 0 \text{ für } b > a\ )
\end{aligned}$$

Es gibt somit drei verschiedene Schnittstellen.

1.7 Fläche, die ins Unendliche reicht **4,0 Punkte**

$$\begin{aligned}
\mu(A_a) = \int_0^\infty f_a(x)\,dx &= \int_0^\infty 2ax \cdot e^{2-ax^2}\,dx \\
&= \lim_{z\to\infty} \int_0^z 2ax \cdot e^{2-ax^2}\,dx \\
&= -\lim_{z\to\infty} \int_0^z (-2ax) \cdot e^{2-ax^2}\,dx \qquad \text{(innere Ableitung: } -2ax\text{)} \\
&= -\lim_{z\to\infty} \left[e^{2-ax^2} \right]_0^z = -\lim_{z\to\infty} \left(\underbrace{e^{2-az^2}}_{\to 0} - e^2 \right) = e^2
\end{aligned}$$

Das Ergebnis ist unabhängig von a.

2. Sanduhr

2.1 Funktionsgleichung für die Profilkurve **8,5 Punkte**

- *Ansatz*: $g(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ (4,0 P)
  - Wegen Achsensymmetrie treten im Funktionsterm nur gerade Exponenten auf. Daher gilt $b = d = 0$ und es folgt: $g(x) = ax^4 + cx^2 + e$
  - Wegen $P(0 \mid 0) \in G_g$ ergibt sich weiterhin $e = 0$.

  Zu betrachten bleibt $g(x) = ax^4 + cx^2$ mit $g'(x) = 4ax^3 + 2cx$.

- *Bedingungen am Rand* (4,0 P)
  - $g(4) = 2 \ \Leftrightarrow \ 256a + 16c = 2$ (I)
  - $g'(4) = 0 \ \Leftrightarrow \ 256a + 8c = 0$ (II)

  Lösung des Gleichungssystems: (I) – (II): $8c = 2 \ \Leftrightarrow \ c = \frac{1}{4}$

  in (II): $256a + 8 \cdot \frac{1}{4} \ \Leftrightarrow \ a = -\frac{1}{128}$

- *Ergebnis*: $g(x) = -\frac{1}{128}x^4 + \frac{1}{4}x^2$ (0,5 P)

2.2 Volumenberechnung **5,0 Punkte**

$$V = 2\pi \cdot \int_0^4 g(x)^2\,dx = 2\pi \cdot \int_0^4 (-\tfrac{1}{128}x^4 + \tfrac{1}{4}x^2)^2\,dx = 2\pi \cdot \int_0^4 (\tfrac{1}{16384}x^8 - \tfrac{1}{256}x^6 + \tfrac{1}{16}x^4)\,dx$$

$$= 2\pi \cdot \left[\tfrac{1}{147456}x^9 - \tfrac{1}{1792}x^7 + \tfrac{1}{80}x^5\right]_0^4 \approx 2\pi \cdot 5,4349 \approx 34,1485$$

2.3 Geforderte Funktion **3,5 Punkte**

Mögliche Funktionsgleichung: $h(x) = -\cos(\tfrac{\pi}{4}x) + 1$

(Periode: $p = 8$; Faktor: $b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

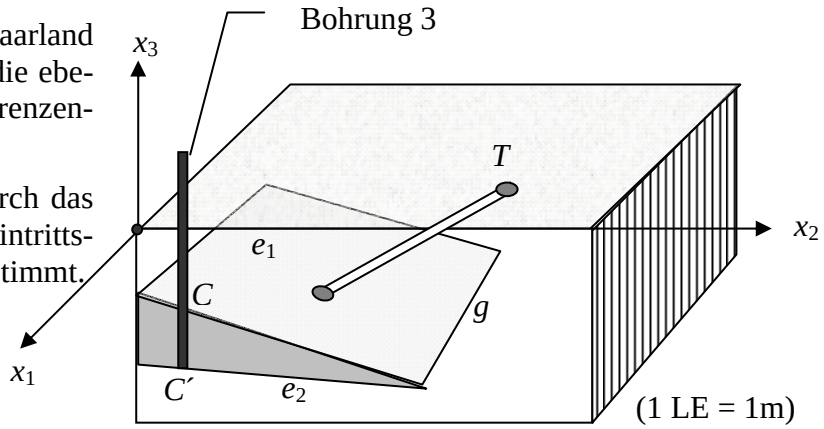
Kosinusfunktion gespiegelt und um 1 nach oben verschoben)

Alternative: $h(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$.

Aufgabe 2
ANALYTISCHE GEOMETRIE

Ein keilförmiges Kohleflöz im Saarland wird nach oben und unten durch die ebenen Flächen e_1 und e_2 zu den angrenzenden Gesteinsschichten begrenzt.

Bei drei vertikalen Bohrungen durch das Kohleflöz wurden jeweils die Eintrittspunkte und die Austrittspunkte bestimmt.



(Zeichnung nicht maßstabsgetreu)

	Eintrittspunkt	**Austrittspunkt**
Bohrung 1	$A(-20 \mid 30 \mid -200)$	$A'(-20 \mid 30 \mid -236)$
Bohrung 2	$B(120 \mid 180 \mid -80)$	$B'(120 \mid 180 \mid -120)$
Bohrung 3	$C(80 \mid 120 \mid -120)$	$C'(80 \mid 120 \mid -160)$

1. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der oberen Begrenzungsebene e_1, in der die Punkte *A*, *B* und *C* liegen.

[Zur Kontrolle: eine mögliche Koordinatengleichung für e_1 ist $3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 1200$.]

2. Berechnen Sie das Maß des Winkels zwischen oberer und unterer Begrenzungsebene. [Zur Kontrolle: eine mögliche Koordinatengleichung der unteren Begrenzungsebene e_2 ist $2x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1200$.]

3. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden *g*, in der das Kohleflöz endet.

4. Ein Tunnel, der vom Punkt $T(-200 \mid 200 \mid 0)$ in Richtung des Vektors $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ vorangetrieben wird, trifft in der Ebene e_1 das Kohleflöz im Punkt T_1 .

4.1 Berechnen Sie den Punkt T_1. [Zur Kontrolle: $T_1(150 \mid -150 \mid -175)$].

4.2 Berechnen Sie die Länge des Tunnels.

4.3 Berechnen Sie das Maß des Winkels, unter dem der Tunnel auf die obere Begrenzungsebene e_1 des Kohleflözes trifft.

L ö s u n g e n

1. Koordinatengleichung der Ebene e_1 durch die Punkte A, B und C **6,0 Punkte**

– Verbindungsvektoren: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 140 \\ 150 \\ 120 \end{pmatrix}$; wähle $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 14 \\ 15 \\ 12 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 100 \\ 90 \\ 80 \end{pmatrix}$; wähle $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$

– Normalenvektor: $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ -24 \end{pmatrix}$; wähle $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

– Punktnormalengleichung: $e_1 : \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -20 \\ 30 \\ -200 \end{pmatrix} \right] = 0$

– Allgemeine Normalengleichung: $e_1 : \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 1200 = 0$

– Koordinatengleichung: $e_1 : 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 - 1200 = 0$

2. Winkel zwischen den Ebenen e_1 und e_2 **6,5 Punkte**

Gesucht ist der Schnittwinkel α zwischen den Ebenen e_1 und e_2 .

- Ebene e_1: Normalenvektor: $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ mit $|\vec{n}_1| = \sqrt{9+4+36} = 7$

- Ebene e_2: Mögliche Richtungsvektoren: $\overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix} 140 \\ 150 \\ 116 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{A'C'} = \begin{pmatrix} 100 \\ 90 \\ 76 \end{pmatrix}$

Vektorprodukt: $\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'} = \begin{pmatrix} 960 \\ 960 \\ -2400 \end{pmatrix}$

Wähle als Normalenvektor: $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ mit $|\vec{n}_2| = \sqrt{3+4+25} = \sqrt{33}$.

Damit folgt: $\cos(\alpha) = \left| \dfrac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right| = \dfrac{6+4+30}{7 \cdot \sqrt{33}} \approx 0{,}9947$ und damit $\alpha \approx 5{,}89°$.

3. Gleichung der Geraden, in der das Kohleflöz endet **4,5 Punkte**

Gleichung der Ebene $e_2: 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1200$ (als Kontrolle angegeben)

Die gesuchte Gerade g ist die Schnittmenge der Ebenen e_1 und e_2. Für diese Ebenen sind Koordinatengleichungen gegeben.

$e_1: 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 1200$

$e_2: 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1200$

Eine Variable ist frei wählbar. Wähle z. B. $x_3 = \lambda$. Dann ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 6\lambda = 1200 & \text{(I)} \\ 2x_1 + 2x_2 - 5\lambda = 1200 & \text{(II)} \end{cases}$$

Lösung des Systems: (I) – (II): $x_1 - \lambda = 0 \Leftrightarrow x_1 = \lambda$.

in (II): $2x_1 + 2\lambda - 5\lambda = 1200 \Leftrightarrow x_2 = 600 + 1{,}5\lambda$

Ergebnis: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 600+1{,}5\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 600 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \\ 1{,}5\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 600 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. Tunnelbau

Gegeben sind der Punkt $T(-200 \mid 200 \mid 0)$ und die Richtung $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $|\vec{u}| = 3$

4.1 Schnittpunkt der Ebene e_1 mit dem Tunnel **3,5 Punkte**

Gleichung der Gerade entlang des Tunnels: $g_T: \vec{x} = \begin{pmatrix} -200 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (Meter)

Der Punkt T_1 ergibt sich als Schnitt von g_T mit e_1:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -200 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = 1200 \Leftrightarrow \lambda = 175$$

Einsetzen dieses Wertes in die Gleichung von g_T ergibt den Punkt $T_1(150 \mid -150 \mid -175)$.

4.2 Länge des Tunnels **1,5 Punkte**

$$l_T = d(T;T_1) = \left| \begin{pmatrix} 150 \\ -150 \\ -175 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -200 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 350 \\ -350 \\ -175 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{350^2 + 350^2 + 175^2} = 525 \quad \text{(Meter)}$$

4.3 Winkel von Tunnel und Begrenzungsfläche **3,0 Punkte**

Gesucht ist der Winkel zwischen der Geraden g_T mit der Ebene e_1:

$$\sin(\alpha) = \left| \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{u}}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{u}|} \right| = \frac{3 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + (-6) \cdot (-1)}{7 \cdot 3} = \frac{6 - 4 + 6}{7 \cdot 3} = \frac{8}{21}$$

Es folgt $\alpha = 22{,}39°$.

Aufgabe 3

WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

1. Ein Fernsehsender plant die Produktion einer neuen Quiz-Show. Um die Akzeptanz einer neuen Quiz-Show beim Publikum besser einschätzen zu können, gibt der Sender eine Studie in Auftrag, die untersucht wie gerne Quiz-Shows gesehen werden.
Die befragten Personen kreuzten eine von vier möglichen Antworten an.

Auf die Frage „Wie gerne sehen Sie Quiz-Shows?“ kreuzten 13% die erste Antwort ***„Gar nicht“***, 24% die zweite Antwort ***„Nicht so gern“*** und 39% die dritte Antwort ***„Gern“*** an. Die vierte Antwort ***„Sehr gern“*** wurde von 2304 Personen angekreuzt.

1.1 Berechnen Sie, wie viele Personen insgesamt befragt wurden.

1.2 Berechnen Sie, welchen Anteil die Gruppe, die die zweite Antwort ankreuzte, an der Gesamtzahl der Personen einnimmt, die sich überhaupt Quiz-Shows ansehen.

1.3 Berechnen Sie, wie viele Personen mindestens befragt werden müssen, damit sich mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% wenigstens eine Person darunter befindet, die die Antwort „Nicht so gern“ gibt.

1.4 Die Gruppe, die die Antwort „Nicht so gern“ ankreuzte, wird bezüglich Geschlecht und Bildungsgrad untersucht:

- 59% der Gruppenmitglieder sind Männer.
- 5% der Männer in dieser Gruppe sind Akademiker.
- 91% der Frauen aus dieser Gruppe sind keine Akademikerinnen.

1.4.1 Zeichnen Sie hierzu ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm.

1.4.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig herausgegriffene Person aus der Gruppe, die die zweite Antwort angekreuzt hat, eine akademische Ausbildung besitzt.

1.4.3 Berechnen Sie unter der Annahme, dass die befragte Person eine akademische Ausbildung besitzt, die Wahrscheinlichkeit, dass es sich dabei um eine Frau handelt.

2. Der Sender entschließt sich die Show zu produzieren. In der Show werden Multiple-Choice-Fragen zu den Themenbereichen „Technik“, „Natur“, „Geschichte“ und „Medien“ gestellt.

Zu jeder Multiple-Choice-Frage gibt es drei Antwortmöglichkeiten. Nur eine der drei Antwortmöglichkeiten ist jeweils richtig.

2.1 Berechnen Sie, wie viele Fragen mindestens zu einem bestimmten Themenbereich gestellt werden müssen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass alle Fragen aus diesem Bereich nur durch Raten richtig beantwortet werden, kleiner als 2% ist.

2.2 Die Redakteure haben zu den einzelnen Themenbereichen eine unterschiedliche Anzahl an Fragen vorbereitet:

Themenbereich	„Technik“	„Natur“	„Geschichte“	„Medien“
Anzahl der vorbereiteten Fragen	8	4	7	7

In der Quiz-Show werden zu jedem Themenbereich genau vier Fragen gestellt. Berechnen Sie, wie viele Möglichkeiten es gibt, die Fragen nach Themen geordnet zu stellen.

2.3 Die Redakteure diskutieren zwei Gewinnsysteme:

2.3.1 Von den 16 Fragen muss der Kandidat wenigstens die ersten 14 nacheinander richtig beantworten um einen Preis zu erhalten.

Berechnen Sie, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass der Kandidat durch Raten einen Preis erhält.

2.3.2 Der Kandidat erhält einen Preis, wenn er wenigstens 14 Fragen insgesamt richtig beantwortet.

Berechnen Sie, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass der Kandidat durch Raten einen Preis erhält.

3. Beim Casting werden aus einer Gruppe von 50 Personen die Kandidaten für die Quiz-Show ausgewählt. Da erfahrungsgemäß 5% der eingeladenen Personen nicht erscheinen, werden 52 Personen eingeladen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 50 Kandidaten erscheinen.

L ö s u n g e n

1. Produktion einer neuen Quizshow

1.1 Planung der Show **1,0 Punkte**

Prozentsatz „Sehr gern“: $100\% - 13\% - 24\% - 39\% = 24\%$; Anzahl: 2304

Damit folgt für die Gesamtzahl der befragten Personen: $N_{gesamt} = \frac{2304}{0,24} = 9600$

1.2 Anteil der Gruppe II an der Gesamtzahl der Personen **1,0 Punkte**

Anteil der Personen in der zweiten Gruppe: $|\,II\,| = 9600 \cdot 0,24 = 2304$

Anzahl der Personen, die Shows ansehen: $|\,Q\,| = 9600 \cdot (0,24 + 0,39 + 0,24) = 8352$

Damit ergibt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$P(II) = \frac{|II|}{|Q|} = \frac{2304}{8352} \approx 0,27586 = 27,58\% \ .$$

1.3 Berechnung der Kettenlänge **4 Punkte**

Interpretation als Bernoulli-Kette: Treffer T: „Nicht so gern“
mit $p = 0,39$ und unbekannter Kettenlänge n

$$P(T \geq 1) > 0,99 \Leftrightarrow 1 - P(T = 0) > 0,99$$

$$\Leftrightarrow 1 - \binom{n}{0} \cdot 0,24^0 \cdot 0,76^n > 0,99$$

$$\Leftrightarrow 1 - 0,76^n > 0,99$$

$$\Leftrightarrow 0,76^n < 0,01$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,76)} \approx 16,78044$$

Es müssen mindestens 17 Personen befragt werden.

1.4 Untersuchung bezüglich Geschlecht und Bildungsgrad

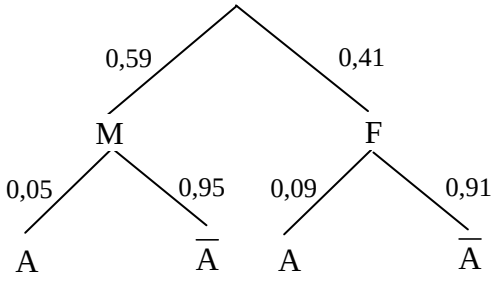
1.4.1 Baumdiagramm **1,5 Punkte**

Betrachtet werden die Personen Aus der Gruppe II.

M: Mann

F: Frau

A: akademische Ausbildung



1.4.2 Person aus der Gruppe, die die zweite Antwort angekreuzt hat, besitzt eine akademische Ausbildung. **1,5 Punkte**

Mit den Werten aus dem Baumdiagramm ergibt sich:

$$P(A) = P(M \cap A) + P(F \cap A) \ = 0,59 \cdot 0,05 + 0,41 \cdot 0,09 = 0,0664 = 6,64\%$$

1.4.3 Wahrscheinlichkeit, dass es sich um eine Frau handelt, unter Annahme mit einer akademische Ausbildung **2,0 Punkte**

Gesucht ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit (Bedingung: akademische Ausbildung):

$$P_A(F) = P(F \mid A) = \frac{P(F \cap A)}{P(A)} = \frac{0,41 \cdot 0,09}{0,59 \cdot 0,05 + 0,41 \cdot 0,09} \approx 0,55572 = 55,572\%$$

2. Produktion der Show

2.1 Wahrscheinlichkeit, alle Fragen durch Raten richtig zu beantworten **3,0 Punkte**

Die Ratewahrscheinlichkeit bei einer einzelnen Frage beträgt $\frac{1}{3}$.

Die Wahrscheinlichkeit *n* Fragen hintereinander richtig zu beantworten, ist $\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Bedingung: $\left(\frac{1}{3}\right)^n < 0,02 \Leftrightarrow n \cdot \ln\left(\frac{1}{3}\right) < 0,02 \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,02)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} \approx 3,56088$

Es müssen zu jedem Themenbereich mindestens 4 Fragen gestellt werden.

2.2 Möglichkeiten, die Fragen nach Themen geordnet zu stellen **2,5 Punkte**

Die Reihenfolge der Fragen in den einzelnen Themenbereichen ist zu berücksichtigen. Damit ergeben sich für die einzelnen Bereiche folgenden Anzahlen von Möglichkeiten:

- Technik: $(8)_4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$
- Natur: $(4)_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
- Geschichte: $(7)_4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$
- Medien: $(7)_4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$

Zu berücksichtigen bleibt dabei noch, dass es 4! = 24 Möglichkeiten gibt, die Reihenfolge der einzelnen Themenbereich untereinander zu vertauschen. Insgesamt ergibt sich damit:

Anzahl: $((8)_4 \cdot (4)_4 \cdot (7)_4 \cdot (7)_4) \cdot 4! = (1680 \cdot 24 \cdot 840 \cdot 840) \cdot 24 = 682\,795\,008\,000$

2.3 Zwei Gewinnsysteme

2.3.1 Preis, wenn wenigstens die ersten 14 Fragen nacheinander richtig beantwortet werden. **2,5 Punkte**

Ereignis *A*: „Wenigstens die ersten 14 Fragen werden nacheinander richtig beantwortet."

Für die Wahrscheinlichkeit von *A* gilt:

$$P(A) = \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^{14} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2}}_{\text{1 bis 14 richtig}} + \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^{5} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{15}}_{\text{1 bis 15 richtig}} + \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^{16} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{0}}_{\text{1 bis 16 richtig}} = \frac{7}{43\,046\,721} \approx 1,62 \cdot 10^{-7}$$

2.3.2 Preis, wenn wenigstens 14 Fragen richtig beantwortet werden. **2,5 Punkte**

Ereignis *B*: „Wenigstens 14 Fragen werden insgesamt richtig beantwortet."

Diese Fragestellung kann als Bernoullikette (Treffer: richtige Antwort) mit der Kettenlänge 14 und der Trefferwahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ interpretiert werden.

$$P(A) = P(T = 14) + P(T = 15) + P(T = 16)$$
$$= \binom{16}{14} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{14} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2} + \binom{16}{15} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{15} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{1} + \binom{16}{16} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{16} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{0} = \frac{19}{1594323} \approx 1,19 \cdot 10^{-5}$$

3. Casting der Kandidaten **3,5 Punkte**

Interpretation als Bernoullikette der Länge 52

Treffer *T*: „Die eingeladene Person erscheint." mit $p = 0,95$.

$$P(T > 50) = P(T = 51) + P(T = 52)$$
$$= \binom{52}{51} \cdot 0,95^{51} \cdot 0,05^{1} + \binom{52}{52} \cdot 0,95^{52} \cdot 0,05^{0} \approx 0,19005 + 0,06944$$
$$= 0,25949 = 25,949\%$$

Schriftliche Abiturprüfung 2011

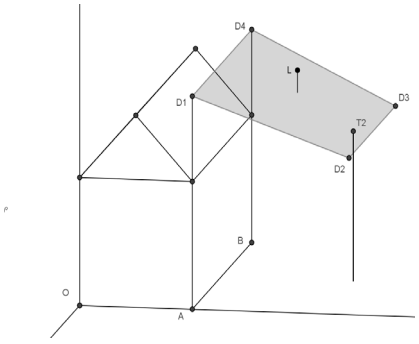
E-Kurs

Haupttermin

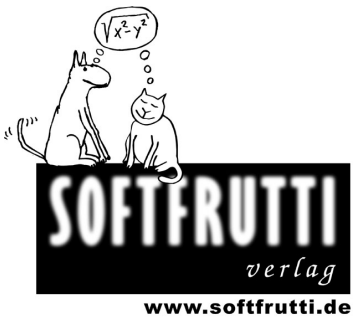
Themenübersicht

- Aufgabe 1: **Analysis**
  - Untersuchung der ganzrationalen Funktion $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2$
  - Modellierung: Querschnitt eines Flusstales
  - Untersuchung der Funktionenschar $f_a(x) = -\frac{x^2 - 9}{x^2 + a}$ $(a \in \mathbb{R})$
  - Zuordnung von Graphen zu unterschiedlichen Parameterwerten

- Aufgabe 2: **Analytische Geometrie**
  - Flächeninhalt eines Trapezes
  - Winkel zwischen zwei Ebenen
  - Abstand Punkt-Ebene
  - Auftreffen auf eine Rechteckfläche



- Aufgabe 3: **Stochastik**
  - Kombinatorik
  - Aufstellen und Auswerten einer Vierfeldertafel
  - Baumdiagramm mit gesuchter Wahrscheinlichkeit
  - Bernoulli-Kette



Aufgabe 1

ANALYSIS

1. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2$.

1.1 Bestimmen Sie die Nullstellen sowie die Extrempunkte und den Wendepunkt der Funktion *f*.

1.2 Der Graph von *f* beschreibt im Intervall [–2 ; 4] modellhaft den Querschnitt eines Flusstales. Das angrenzende Gelände wird auf beiden Seiten durch die Gleichung *y* = 4 beschrieben. Zeichnen Sie den Querschnitt des Tales sowie des angrenzenden Geländes in ein Koordinatensystem.

1.3 Bei Hochwasser steigt das Wasser bis zum Punkt $A(-2 \mid f(-2))$. Berechnen Sie den Inhalt der Querschnittsfläche des dann mit Wasser gefüllten Tales.

1.4 Berechnen Sie das Maß des Winkels, mit dem der Hang des Tales im Punkt *A* in das angrenzende Gelände übergeht.

1.5 Im Sommer ist das Tal völlig ausgetrocknet. Nun soll auf dem angrenzenden Gelände im Punkt mit der *x*-Koordinate 4 ein Mast errichtet werden. Vom tiefsten Punkt des Tales soll ein Seil zur Spitze dieses Mastes gespannt werden. Welche Höhe muss der Mast gerade überschreiten, damit das straff gespannte Seil den Hang nicht mehr berührt?

2. Gegeben ist die Funktionenschar $f_a : D \to \mathbb{R}$ mit $f_a(x) = -\frac{x^2 - 9}{x^2 + a}$ $(a \in \mathbb{R})$.

Zunächst sei *a* eine positive Zahl ($\boldsymbol{a > 0}$).

2.1 Begründen Sie:

- Die Nullstellen von f_a sind unabhängig von der Wahl des Parameters *a*.
- Alle Funktionen der Schar besitzen die gleiche Asymptote.
- Alle Funktionen der Schar sind symmetrisch zur *y*-Achse.

2.2 Untersuchen Sie, für welchen Wert von *a* der Graph der Funktion f_a einen Punkt mit waagerechter Tangente und der *y*-Koordinate 3 besitzt.

2.3 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f_3 unter Verwendung der erarbeiteten Eigenschaften.

2.4 Der Definitionsbereich der Funktion f_3 wird eingeschränkt auf das Intervall [0 ; 3].

Begründen Sie anhand des Graphen, dass f_3 mit dieser Einschränkung eine Umkehrfunktion besitzt.

Bestimmen Sie den zugehörigen Funktionsterm und zeichnen Sie den Graphen der Umkehrfunktion in das Koordinatensystem von 2.3.

2.5 Der Graph der Funktion $g: [0;3] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{\frac{9-3x}{x+1}}$ rotiert um die *x*-Achse.

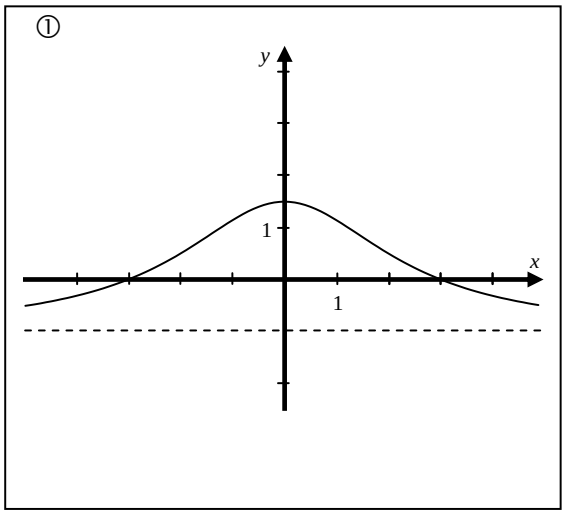
Bestimmen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

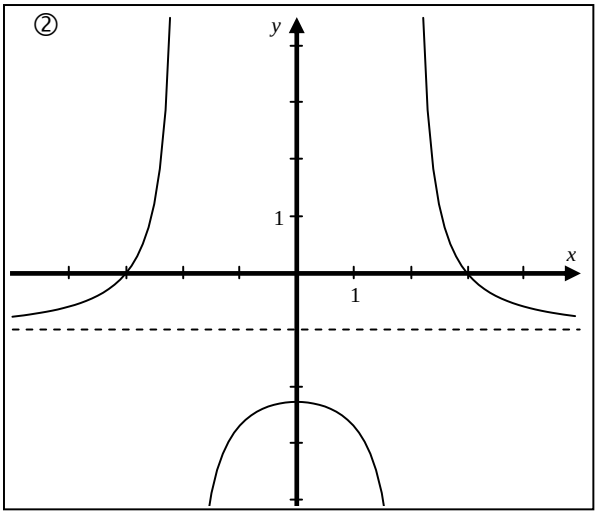
Im Folgenden betrachten wir wieder die Funktion f_a. Nun sei aber *a* eine **beliebige** Zahl aus $\mathbb{R}$.

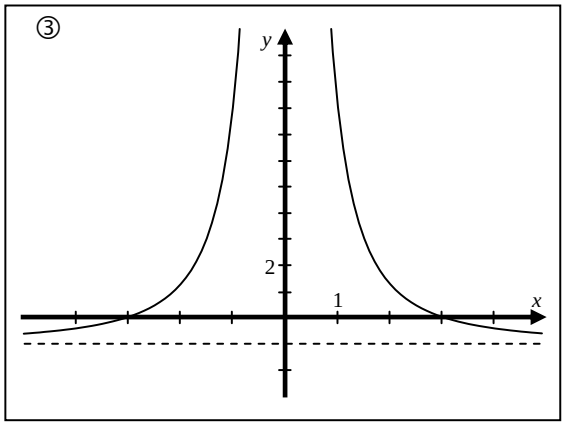
2.6 Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von f_a in Abhängigkeit von *a*.

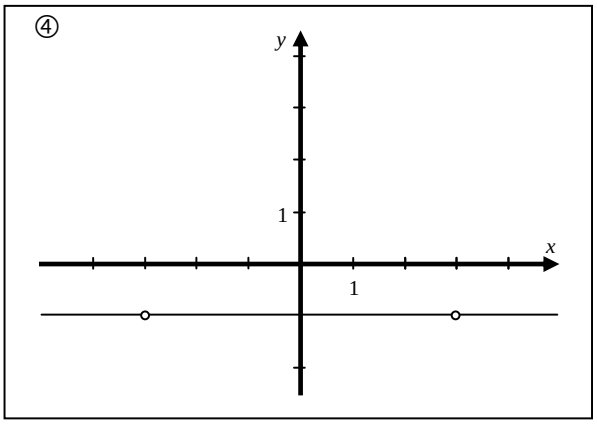
2.7 Gegeben sind Graphen verschiedener Funktionen f_a.

Bestimmen Sie in den vier Fällen einen passenden Parameter *a* und begründen Sie, ob und gegebenenfalls für welche weiteren Werte von *a* Graphen mit ähnlichem Verlauf entstehen.









L ö s u n g e n

1. Untersuchung einer ganzrationalen Funktion

Betrachtet wird die Funktion mit der Gleichung $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2$.

1.1 Untersuchung auf Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte — 9,0 Punkte

- *Nullstellen* (1,0 P)

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{8}x^2 \cdot (x-6) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x = 6$$

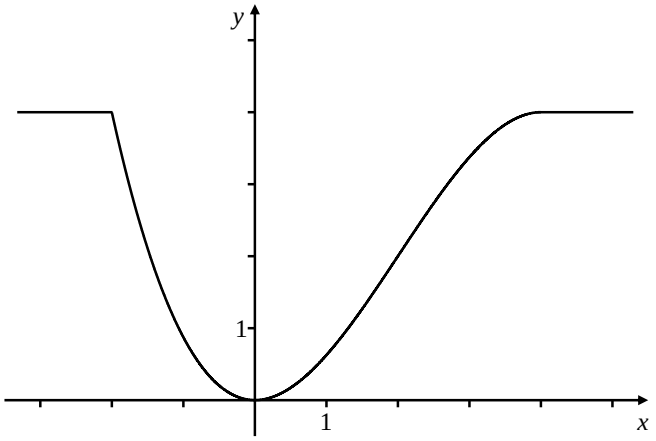
- *Ableitungen* (2,0 P)

$$f'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x$$

$$f''(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$$

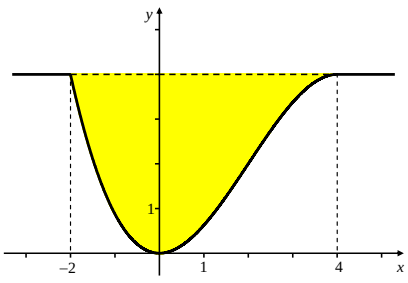
- *Extrempunkte* (3,5 P)
  - notw. Bed.: $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{3}{8}x \cdot (x-4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x = 4$
  - hinr. Bed.: $f''(0) = \frac{3}{2} > 0 \quad \Rightarrow$ Tiefpunkt $T\,(0|0)$
    $f''(4) = -\frac{3}{2} < 0 \quad \Rightarrow$ Hochpunkt $H\,(4|4)$
- *Wendepunkte* (2,5 P)
  - notw. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$ (mit Vzw.)
  - hinr. Bed.: An der Stelle 2 liegt ein Vorzeichenwechsel von f'' vor.
    Es liegt der Wendepunkt $W\,(2|2)$ vor.

1.2 Querschnitt des Tales — 2,5 Punkte



1.3 Inhalt der Querschnittsfläche — 3,5 Punkte

Zu berechnen ist die Fläche zwischen der Parallelen zur x-Achse mit der Gleichung $y = 4$ und der Funktion f.

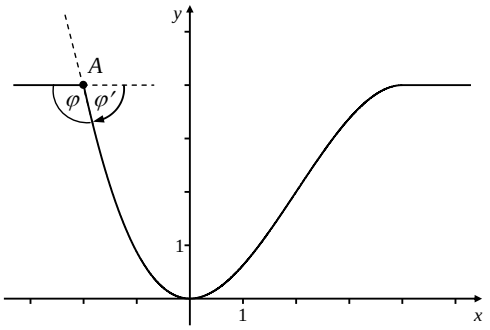


$$\mu(A) = \int_{-2}^{4} \left(4 - f(x)\right) dx = \int_{-2}^{4} \left(4 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2\right) dx$$

$$= \left[4x + \frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{4}x^3\right]_{-2}^{4}$$

$$= 13{,}5$$

1.4 Winkel, mit dem der Hang in das Gelände übergeht **2,5 Punkte**



Für den (orientierten) Steigungswinkel φ' gilt:

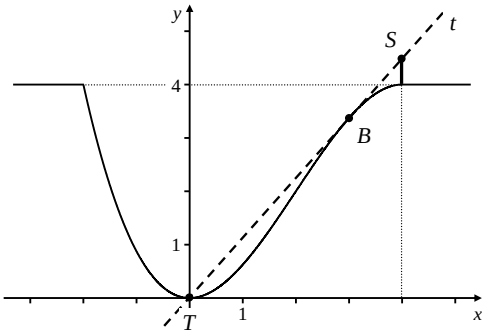
$$\tan(\varphi') = f'(-2) = -4{,}5\,.$$

Hieraus ergibt sich: $\varphi' \approx -77{,}5°$.

Für den gemäß dem Kontext gesuchten Winkel φ folgt:

$$\varphi = 180° - |\varphi'| = 102{,}5°\,.$$

1.5 Höhe des Mastes **5,0 Punkte**



Allgemeine Tangentengleichung für einen Berührpunkt $B(x_0 \mid f(x_0))$:

$$y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$

Die Tangente (das Seil) wird von dem Punkt $T(0 \mid 0)$ an G_f gelegt (gespannt):

$$\begin{aligned}
0 &= f'(x_0)\cdot(0 - x_0) + f(x_0)\\
0 &= \left(-\tfrac{3}{8}x_0^2 + \tfrac{3}{2}x_0\right)\cdot(-x_0) + \left(-\tfrac{1}{8}x_0^3 + \tfrac{3}{4}x_0^2\right)\\
0 &= \tfrac{3}{8}x_0^3 - \tfrac{3}{2}x_0^2 - \tfrac{1}{8}x_0^3 + \tfrac{3}{4}x_0^2\\
0 &= \tfrac{1}{4}x_0^3 - \tfrac{3}{4}x_0^2\\
0 &= x_0^3 - 3x_0^2\\
0 &= x_0^2(x_0 - 3)\\
x_0 = 0 &\quad \vee \quad x_0 = 3
\end{aligned}$$

Es gibt zwei Tangenten an G_f.

- Die erste Lösung $x_0 = 0$ liefert die waagerechte Tangente im Tiefpunkt T. Es handelt sich dabei um die (x-Achse.
- Die im Kontext gesuchte Tangente t gehört zur zweiten Lösung $x_0 = 3$.

Die Tangentengleichung für die Stelle $x_0 = 3$ lautet t: $y = f'(3)\cdot x = \frac{9}{8}x$

Die gesuchte Höhe ergibt sich für $x = 4$: $y = \frac{9}{8}\cdot 4 = 4{,}5$.

Die Spitze des Mastes muss mindestens bei $S(4 \mid 4{,}5)$ liegen, also muss der Mast mindestens 0,5 LE hoch sein.

2. Untersuchung einer gebrochenrationalen Funktionenschar

Betrachtet wird die Funktionenschar $f_a(x) = -\dfrac{x^2-9}{x^2+a}$ $(a \in \mathbb{R})$.

Zunächst ist a als eine positive Zahl ($a > 0$) vorausgesetzt. Dann gilt $D_{max} = \mathbb{R}$, da das Nennerpolynom in diesem Fall keine Nullstellen besitzt.

2.1 Untersuchung auf Nullstellen, Asymptote und Symmetrie **3,0 Punkte**

- *Nullstellen* (1,0 P)

$$f_a(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 9 = 0 \quad \overset{D=\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} \quad x = 3 \ \vee \ x = -3 \text{ (unabhängig von } a\text{)}$$

- *Asymptote* (1,0 P)

  Es gilt $f_A(x) = -1$ für alle Funktionen der Schar.

  (Zählergrad = Nennergrad, Quotient der Koeffizienten von x^2)

  Alternative: Eine Polynomdivision liefert: $f_a(x) = -(1 + \frac{-9-a}{x^2+a}) = -1 + \frac{9+a}{x^2+a}$.

- *Symmetrie* (1,0 P)

  Die Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$ ist symmetrisch zu Ursprung 0.

  Für ein beliebiges $x \in D$ gilt: $f_a(-x) = -\dfrac{(-x)^2-9}{(-x)^2+a} = -\dfrac{x^2-9}{x^2+a} = f_a(x)$.

  Also sind alle Funktionen der Schar symmetrisch zur y-Achse.

  Alternative: Da Zähler- und Nennerpolynom symmetrisch zur y-Achse sind, sind auch die Funktionen der Schar f_a symmetrisch zur y-Achse.

2.2 Bestimmung eines Parameterwertes **4,0 Punkte**

– *Ableitung* (2,0 P)

$$f_a'(x) = -\frac{(x^2+a)\cdot 2x - (x^2-9)\cdot 2x}{(x^2+a)^2} = -\frac{2x^3 + 2ax - 2x^3 + 18x}{(x^2+a)^2} = -\frac{2x\,(a+9)}{(x^2+a)^2}$$

– *Bedingungen* (2,0 P)

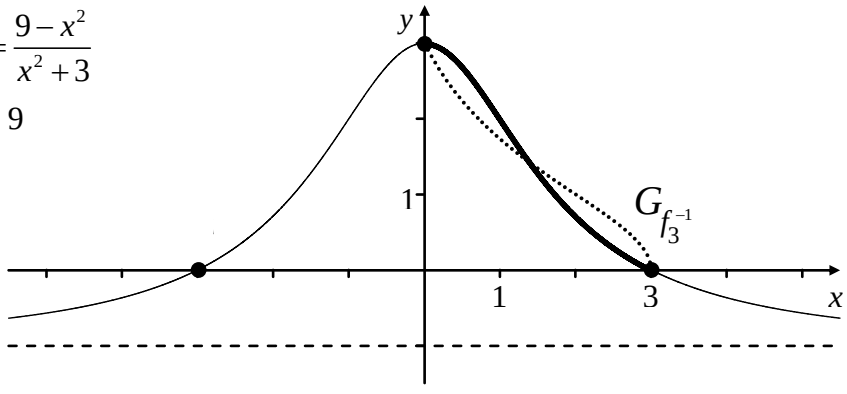
waagerechte Tangente: $f_a'(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ 2x\cdot(a+9) = 0 \ \overset{a>0}{\Leftrightarrow} \ x = 0$

y-Koordinate 3: $f_a(0) = 3 \ \Leftrightarrow \ -\frac{-9}{a} = 3 \ \Leftrightarrow \ a = 3$

2.3 Graph der Funktion f_3 **3,0 Punkte**

Es gilt: $f_3(x) = \dfrac{9-x^2}{x^2+3}$

$f_3(0) = 9$



2.4 Umkehrbarkeit und Umkehrfunktion

- *Umkehrbarkeit*
  f_3 ist im Intervall [0 ; 3] streng monoton fallend, also existiert die Umkehrfunktion.
- *Funktionsterm der Umkehrfunktion*
  Auflösen der Gleichung von f_3 nach x (wobei $x \in [0\,;3]$ und $x \in [0\,;3]$).

$$\begin{aligned} y = \frac{9-x^2}{x^2+3} &\Leftrightarrow y \cdot (x^2+3) = 9 - x^2 \\ &\Leftrightarrow y \cdot x^2 + 3y = 9 - x^2 \\ &\Leftrightarrow y \cdot x^2 + x^2 = 9 - 3y \\ &\Leftrightarrow x^2 \cdot (y+1) = 9 - 3y \qquad \mid : (y+1) \neq 0, \text{ da } y \in [0;3] \\ &\Leftrightarrow x^2 = \frac{9-3y}{y+1} \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{9-3y}{y+1}} \ \vee \ \underbrace{x = -\sqrt{\frac{9-3y}{y+1}}}_{\text{entfällt, da } x \in [0;3]} \end{aligned}$$

Vertauschen von x und y liefert die Funktionsgleichung für f_3^{-1}: $y = \sqrt{\frac{9-3x}{x+1}}$.

Alternative: Die Berechnung eines Terms der Umkehrfunktion kann auch erfolgen, indem man in der Funktionsgleichung zunächst die Rollen von y und x vertauscht und dann wieder nach y auflöst.

Funktionsgleichung: $y = \frac{9-x^2}{x^2+3}$

Vertauschen und wieder nach y auflösen:

$$\begin{aligned} x = \frac{9-y^2}{y^2+3} &\Leftrightarrow x \cdot (y^2+3) = 9 - y^2 \\ &\Leftrightarrow x \cdot y^2 + y^2 = 9 - 3x \\ &\Leftrightarrow (x+1) \cdot y^2 = 9 - 3x \\ &\Leftrightarrow y^2 = \frac{9-3x}{x+1} \qquad (x \in [0\,;3]) \\ &\Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{9-3x}{x+1}} \qquad (y \geq 0) \end{aligned}$$

- *Graph von f_3^{-1}*: siehe Abbildung in 2.3

2.5 Volumen des Rotationskörpers **4,0 Punkte**

Ansatz: $V = \pi \cdot \int_0^3 f^2(x)\,dx = \pi \cdot \int_0^3 \frac{9-3x}{x+1}\,dx$

Polynomdivision: $(-3x+9) : (x+1) = -3 + \frac{12}{x+1}$

$$V = \pi \cdot \int_0^3 (-3 + \frac{12}{x+1})\,dx = \pi \cdot \left[-3x + 12 \cdot \ln|x+1| \right]_0^3$$

$$= \pi \cdot [(-9 + 12 \cdot \ln(4)) - (-0+0)] \approx 7{,}64\,\pi \approx 24 \text{ (VE)}$$

Im Folgenden wird wieder die Funktion $f_a(x) = -\frac{x^2 - 9}{x^2 + a}$ $(a \in \mathbb{R})$ betrachtet.

Dabei wird jetzt aber *a* als eine **beliebige** Zahl aus $\mathbb{R}$ vorausgesetzt.

2.6 Maximale Definitionsmenge von f_a — 2,5 Punkte

Ansatz: $x^2 + a = 0 \Leftrightarrow x^2 = -a$

Die Lösbarkeit der letzten Gleichung in Abhängigkeit von *a* entscheidet über die Definitionsmenge:

$a > 0$: keine Lösung, also $D = \mathbb{R}$

$a = 0$: Lösung $x = 0$, also $D = \mathbb{R}^*$

$a < 0$: $x^2 = -a \Leftrightarrow x = -\sqrt{-a} \vee x = \sqrt{-a}$

$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\sqrt{-a} ; \sqrt{-a} \right\}$

2.7 Passende Parameterwerte — 6,0 Punkte

① Punktprobe für $P(0 \mid 1{,}5)$:

$f(0) = 1{,}5 \Leftrightarrow \frac{9}{a} = 1{,}5 \Leftrightarrow a = 6$

Weitere Werte von a: Keine Polstellen haben nach 2.6 alle Funktionen mit $a > 0$.

② Punktprobe für $P(0 \mid -2{,}25)$:

$f(0) = -2{,}25 \Leftrightarrow a = -4$

Alternative: Definitionslücke 2: $\sqrt{-a} = 2 \Leftrightarrow a = -4$

Weitere Werte von a: Zwei Polstellen mit VZW haben alle Funktionen mit

$a < 0 \wedge a \neq -9$ (vgl. 2.6 und ④).

③ Pol ohne VZW bei 0 nach 2.6 nur für $a = 0$

④ Es gilt $f_a(x) = -1$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3 ; 3\}$.

Es liegen hebbare Definitionslücken bei −3 und 3 vor:

$x^2 + a = 0$ hat die Lösungen -3 und $3 \Leftrightarrow a = -9$

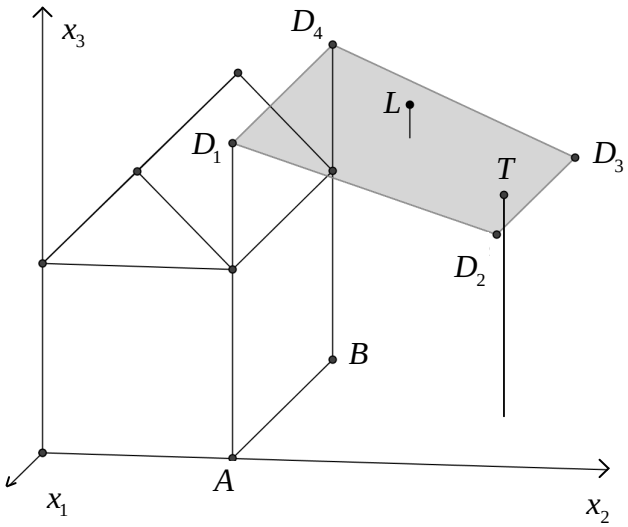
Aufgabe 2
ANALYTISCHE GEOMETRIE

Eine Seilbahn in den Alpen verbindet eine Tal- und eine Bergstation. Zum Schutz der Gäste wurde an der Talstation ein zusätzliches Glasdach angebracht. Die Abbildung zeigt diese Anordnung nicht maßstabsgetreu.

Gegeben sind die Punkte

$$A(0|6|0),\ D_1(0|6|10),\ D_2(-2|14|7),\ D_3(-16|14|7) \text{ und } D_4(-18|6|10).$$

Dabei gilt 1 LE $\hat{=}$ 1m.



1. Zeigen Sie, dass die Punkte D_1, D_2, D_3 und D_4 des Glasdachs in einer Ebene liegen und geben Sie eine Gleichung dieser Ebene in allgemeiner Normalenform an.

(Zur Kontrolle: $e: \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 98 = 0$.)

2. Zeigen Sie, dass es sich bei der Dachfläche $D_1D_2D_3D_4$ um ein gleichschenkliges Trapez handelt, und berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Trapezes.

3. Berechnen Sie das Maß des Winkels, unter dem die Dachfläche gegenüber der Horizontalen geneigt ist.

4. Das Glasdach wird im Punkt T durch einen lotrechten Stahlträger unterstützt.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes T, wenn der zugehörige Träger 7 m von der Seitenwand ABD_1D_2 entfernt ist und zudem zu den Punkten D_2 und D_3 den gleichen Abstand einnimmt.

5. Auf dem Glasdach ist ein lotrechter Stab befestigt, an dessen Spitze $L(-9|11|9)$ ein Laser sitzt, der Informationen von der Tal- zur Bergstation überträgt.

5.1 Wie dick ist die Schneeschicht auf dem Dach, wenn sie die Spitze des Stabes gerade zudeckt?

5.2 Der Laser sendet Signale an die Bergstation in Richtung $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 5 \end{pmatrix}$ zu einer rechteckigen „Empfangsfläche“ $E_1E_2E_3E_4$ mit

$E_1(291|900|1520)$, $E_2(291|900|1500)$, $E_3(291|920|1500)$, $E_4(291|920|1520)$.

Für welche Werte von *k* treffen die Signale die Rechteckfläche?

L ö s u n g e n

Gegeben sind folgende Punkte

$A(0\,|\,6\,|\,0)$, $D_1(0\,|\,6\,|\,10)$, $D_2(-2\,|\,14\,|\,7)$, $D_3(-16\,|\,14\,|\,7)$ und $D_4(-18\,|\,6\,|\,10)$.

1. Normalengleichung der Ebene durch die Punkte D_1, D_2, D_3 und D_4 **4,0 Punkte**

- Richtungsvektoren: $\overrightarrow{D_1D_2} = \vec{d}_2 - \vec{d}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} = \vec{u}$,

$$\overrightarrow{D_1D_4} = \vec{d}_4 - \vec{d}_1 = \begin{pmatrix} -18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 18 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \text{wähle} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Normalenvektor: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = \vec{n}$

- Punktnormalengleichung: $e: \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} \right] = 0$

- Allgemeine Normalengleichung: $e: \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 98 = 0$

Zu Zeigen ist noch, dass auch der Punkt D_3 in der Ebene e liegt.

Punktprobe für D_3: $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -16 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix} - 98 = 42 + 56 - 98 = 0$; D_3 liegt also in e.

2. Dachfläche $D_1D_2D_3D_4$ - gleichschenkliges Trapez und Flächeninhalt **7,5 Punkte**

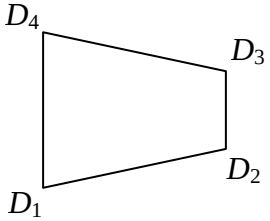
① *Trapezeigenschaft*: Zu zeigen ist, dass das Viereck $D_1D_2D_3D_4$ ein Trapez ist. (1,5 P)

$$\overrightarrow{D_1D_4} = \begin{pmatrix} -18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -18 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \overrightarrow{D_2D_3} = \vec{d}_3 - \vec{d}_2 = \begin{pmatrix} -14 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -14 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{D_1D_4}$ und $\overrightarrow{D_2D_3}$ sind somit kollinear, das Viereck $D_1D_2D_3D_4$ hat somit ein Paar zueinander paralleler Seiten.

② *Gleichschenkligkeit*: Für das Trapez $D_1D_2D_3D_4$ ist $\left|\overrightarrow{D_1D_2}\right| = \left|\overrightarrow{D_4D_3}\right|$ zu zeigen. (2,0 P)

Gemäß 1. gilt $\left|\overrightarrow{D_1D_2}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4 + 64 + 9} = \sqrt{77}$.



Für $\overrightarrow{D_4D_3} = \vec{d}_3 - \vec{d}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$ folgt $\left|\overrightarrow{D_4D_3}\right| = \sqrt{4 + 64 + 9} = \sqrt{77}$.

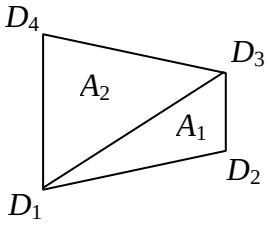
③ *Flächeninhalt* (4,0 P)

Das Trapez lässt sich in zwei Dreiecke zerlegen.

$$\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{D_2D_1}\times\overrightarrow{D_2D_3}\right| + \tfrac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{D_4D_1}\times\overrightarrow{D_4D_3}\right|$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}2\\-8\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-14\\0\\0\end{pmatrix}\right| + \tfrac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}18\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\8\\-3\end{pmatrix}\right|$$



$$= \tfrac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\-42\\-112\end{pmatrix}\right| + \tfrac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\54\\144\end{pmatrix}\right|$$

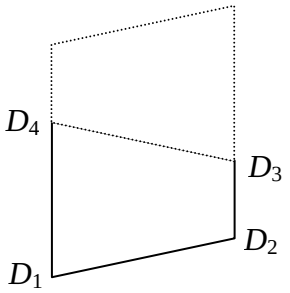
$$= \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{14308} + \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{23652} \approx 59{,}8 + 76{,}9 = 136{,}7 \ (\text{m}^2)$$

Vektorielle Alternative:

Das Trapez $D_1D_2D_3D_4$ kann zu einem Parallelogramm ergänzt werden.

$$\mu(A) = \tfrac{1}{2}\cdot[(\overrightarrow{D_1D_4} + \overrightarrow{D_2D_3})\times\overrightarrow{D_1D_2}]$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot\left|\left[\begin{pmatrix}-18\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-14\\0\\0\end{pmatrix}\right]\times\begin{pmatrix}2\\8\\-3\end{pmatrix}\right|$$



$$= \tfrac{1}{2}\cdot\left|-32\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\8\\-3\end{pmatrix}\right| = 16\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\-3\\8\end{pmatrix}\right|$$

$$= 16\cdot\sqrt{0+9+64} = 16\cdot\sqrt{73} \approx 136{,}7 \ (\text{m}^2)$$

(Vorteil: Es muss nur ein Vektorprodukt berechnet werden.)

Elementargeometrische Alternative:

Nach der Trapezformel gilt $\mu(A) = \frac{1}{2}\cdot(a+c)\cdot h$. Dabei gilt:

- Seitenlängen: $a = \left|\overrightarrow{D_1D_4}\right| = 18$ (nach 2. ①)

  $c = \left|\overrightarrow{D_2D_3}\right| = 14$ (nach 2. ①)

- Höhe: Aus Symmetriegründen ist die Höhe der Abstand der Seitenmittelpunkt $M_1(-9 \mid 6 \mid 4)$ und $M_1(-9 \mid 14 \mid 7)$

$$h = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\8\\-3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0+64+9} = \sqrt{73}$$

Damit folgt: $\mu(A) = \frac{1}{2}\cdot(a+c)\cdot h = \frac{1}{2}\cdot(18+14)\cdot\sqrt{73} \approx 136{,}70 \ (\text{m}^2)$

3. Neigungswinkel der Dachfläche gegen die Horizontale **2,0 Punkte**

Gesucht ist der Winkel φ zwischen der Ebene e und der x_1-x_2-Ebene.

- Normalenvektor von e: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ mit $|\vec{n}| = \sqrt{73}$ (Dachfläche)

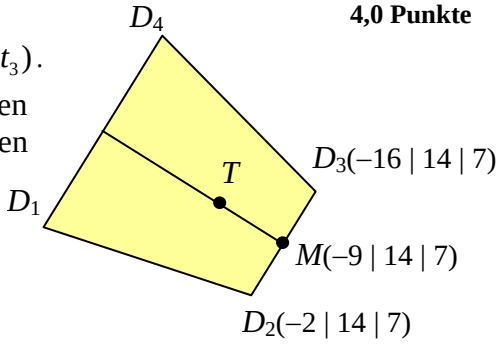
- Normalenvektor x_1-x_2-Ebene: $\overrightarrow{n_{12}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $|\overrightarrow{n_{12}}| = 1$ (Horizontale)

Es gilt: $\cos(\varphi) = \dfrac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{n_{12}}}{\left|\vec{n}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_{12}}\right|} = \dfrac{8}{\sqrt{73}} \approx 0{,}9363$. Damit ergibt sich: $\varphi \approx 20{,}6°$.

4. Koordinaten des Punktes *T* **4,0 Punkte**

Gesucht sind die Koordinaten des Punktes $T(t_1 \,|\, t_2 \,|\, t_3)$.

- Alle Punkte (in e), die von D_2 und D_3 den gleichen Abstand besitzen, liegen auf der Mittelsenkrechten von $\overline{D_2D_3}$.
  T hat dieselbe x_1-Koordinate wie M.
  Es gilt also: $t_1 = -9$.



- Da der Träger 7m von der Seitenwand ABD_1D_2 entfernt ist, ist die x_2-Koordinate von T um 7 größer als die z. B. von A, also: $t_2 = 6 + 7 = 13$.

- t_3 ergibt sich aus der Bedingung, dass der Punkt T in der Glasdachebene e liegen soll.
  Mithilfe einer Punktprobe für T in der Gleichung von e ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 13 \\ t_3 \end{pmatrix} = 98 \;\Leftrightarrow\; 39 + 8 \cdot t_3 = 98 \;\Leftrightarrow\; t_3 = \frac{59}{8}$$

Der gesuchte Punkt T hat also die Koordinaten $T(-9 \,|\, 13 \,|\, \frac{59}{8})$.

5.1 Dicke der Schneeschicht **3,0 Punkte**

Gesucht ist der Abstand von $L(-9 \,|\, 11 \,|\, 9)$ zur Dachfläche e: $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 98 = 0$.

1. Möglichkeit: Verwendung der Abstandsformel

$$d(L, e) = \left|\vec{n}^0 \cdot \overrightarrow{D_1L}\right| = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{D_1L}\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{73}} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -9 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} \right] \right| = \frac{1}{\sqrt{73}} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{73}} \cdot \left| 0 + 15 - 8 \right| = \frac{7}{\sqrt{73}} \approx 0{,}819 \text{ (m)}$$

Die Schneeschicht beträgt etwa 82 cm.

2. Möglichkeit: Verwendung der Lotgeradenmethode

Lotgerade: $g: \vec{x} = \vec{l} + \lambda \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} -9 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

Der Schnitt mit der Ebene *e* ergibt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -9 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \right] - 98 = 0 \;\Leftrightarrow\; 105 + 73\lambda - 98 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = -\frac{7}{73}$$

Für den Lotfußpunkt *P* gilt dann:

$$\vec{p} = \vec{l} + \lambda \cdot \vec{n}$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{p} - \vec{l} = \lambda \cdot \vec{n}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{LP} = \lambda \cdot \vec{n}$$

(Der Lotfußpunkt muss zur Abstandsbestimmung nicht explizit berechnet werden.)

Damit ergibt sich für den gesuchten Abstand:

$$d(L, e) = |\overrightarrow{LP}| = |\lambda \cdot \vec{n}| = |\lambda| \cdot |\vec{n}| = \frac{7}{73} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = \frac{7}{73} \cdot \sqrt{73} = \frac{7}{\sqrt{73}}$$

5.2 Auftreffen in der Rechteckfläche

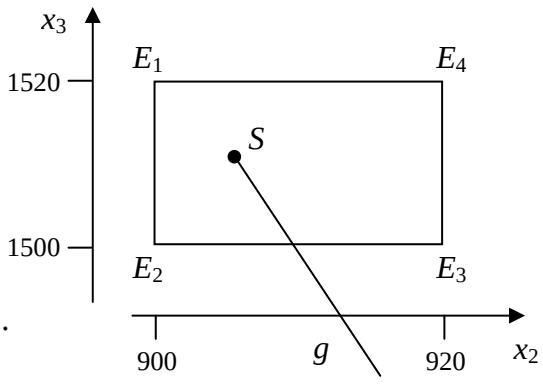
4,5 Punkte

Gegeben sind die Richtung $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 5 \end{pmatrix}$ und die Punkte

$E_1(291|900|1520)$, $E_2(291|900|1500)$, $E_3(291|920|1500)$, $E_4(291|920|1520)$.

- *Laserstrahl*:
  Der Laserstrahl wird beschrieben durch die Gerade

$$g: \vec{x} = \vec{l} + \lambda \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} -9 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 5 \end{pmatrix}.$$



- *Rechteckige Empfangsfläche* $E_1E_2E_3E_4$:
  Die Empfangsfläche liegt in einer Parallelebene e_E zur x_2-x_3-Ebene im Abstand 291.
  Eine Gleichung von e_E lautet damit: $x_1 = 291$.
  (Alle Punkte haben die x_1-Koordinate 291.)

Alternative: Rechnerische Bestimmung der Gleichung von e_E:

Richtungsvektoren: $\overrightarrow{E_1E_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix}$, wähle $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{E_1E_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ wähle } \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{n}$

Gleichung von e_E: $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{e}_1) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 291 \\ 900 \\ 1152 \end{pmatrix} \right) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 291$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 291$$

- *Bedingungen an Auftreffpunkt S*:
  Damit $S(s_1 \mid s_2 \mid s_3)$ in der Empfangsfläche liegt muss gelten (vgl. Abbildung):
  $s_1 = 291$; $900 \le s_2 \le 900$; $1500 \le s_3 \le 1520$

- *Schnittpunktsberechnung* $g \cap e_E$:
  Die Bedingung $x_1 = 291$ ergibt in der ersten Komponente von g:
  $-9 + \lambda \cdot 1 = 291 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 300$
  Damit folgt: $\vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix} + 300 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 291 \\ 11 + 300k \\ 1509 \end{pmatrix}$
  Die erste und zweite Bedingung sind erfüllt. Die dritte Bedingung ist auch erfüllt für:
  $900 \le 11 + 300k \le 920 \Leftrightarrow \frac{889}{300} \le k \le \frac{909}{300}$.

Aufgabe 3

WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

1. Elisabeth hat eine große Sammlung von Musik CDs. Unter den 48 CDs sind zwanzig aus dem Bereich Jazz, zwölf aus dem Bereich Pop, sieben aus dem Bereich Country, drei aus dem Bereich Klassik und sechs aus dem Bereich Hip-Hop.

1.1 Wie viele Möglichkeiten hat sie, ihre CDs in einer Reihe anzuordnen?

1.2 Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten für die Anordnung, wenn CDs aus dem gleichen Bereich nebeneinander stehen sollen. Runden Sie das Ergebnis sinnvoll.

1.3 Elisabeth wählt aus allen CDs zufällig drei aus, die sie am Abend hören will.
Wie wahrscheinlich ist es, dass keine Jazz CD dabei ist?

1.4 Der Inhaber eines CD-Ladens untersucht an einem Samstag das Käuferverhalten. An diesem Tag wurden insgesamt 240 CDs verkauft, davon 29 Jazz CDs. Jeder Käufer erwarb genau eine CD. Während von allen CDs 173 an Frauen verkauft wurden, wurden von den Jazz CDs nur acht an Frauen verkauft.

1.4.1 Stellen Sie den Sachverhalt als Vier-Felder-Tafel dar.

1.4.2 Nach Geschäftsschluss trägt der Händler zufällig eine der verkauften CDs in eine Liste ein.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde diese CD an einen männlichen Kunden verkauft?
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese CD eine Jazz CD ist, wenn man schon weiß, dass der Käufer männlich ist.

1.4.3 Prüfen Sie, ob die folgenden Ereignisse unabhängig sind.

E_1: „Eine CD wird von einem Mann gekauft."

E_2: „Eine verkaufte CD ist eine Jazz CD."

1.5 Beim regelmäßigen gemeinsamen Stöbern in einem CD-Laden entscheidet sich Elisabeth mit der Wahrscheinlichkeit p für den Kauf einer CD; ihre Freundin entscheidet sich doppelt so oft für einen CD-Kauf.

Wie groß muss p mindestens sein, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine von beiden eine CD kauft, mehr als 50% ist? Runden Sie das Ergebnis auf zwei Nachkommastellen. Zeichnen Sie zunächst ein beschriftetes Baumdiagramm, das die Situation beschreibt.

2. Eine Produktionsfirma für CDs verpackt jeweils 20 CDs in einen Karton. Obwohl regelmäßige Qualitätskontrollen stattfinden, muss man im Schnitt mit 3% fehlerhaften CDs rechnen.

2.1 Mit wie vielen defekten CDs muss man bei einer Lieferung von 10 Kartons im Mittel rechnen?

2.2 Wie viele CDs müssen mindestens geprüft werden, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% wenigstens eine defekte CD findet?

2.3 Ein Händler bestellt neun Kartons. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens zwei CDs der Lieferung defekt sind?

L ö s u n g e n

1. Sammlung von Musik-CDs

1.1 CDs in einer Reihe **1,0 Punkte**

Anzahl: $48!\quad \left(\approx 1,24\cdot 10^{61}\right)$

1.2 CDs aus gleichem Bereich nebeneinander **2,5 Punkte**

Anzahl: $\underbrace{\left(\underbrace{20!}_{\text{Jazz}}\cdot\underbrace{12!}_{\text{Pop}}\cdot\underbrace{7!}_{\text{Country}}\cdot\underbrace{3!}_{\text{Klassik}}\cdot\underbrace{6!}_{\text{HipHop}}\right)}_{\text{Vertauschungen innerhalb der 5 Bereiche}}\cdot\underbrace{5!}_{\text{Vertauschen der 5 Bereiche}} \approx 3,04\cdot 10^{20!36}$

1.3 Keine Jazz-CD **2,5 Punkte**

Zufallsexperiment: Auswahl von 3 CDs aus 48 mit $|\Omega| = \binom{48}{3} = 103\,776$

Ereignis *A*: Auswahl von 3 CDs aus 28 Nicht-Jazz-CDs mit $|A| = \binom{28}{3} = 19\,656$

Wahrscheinlichkeit: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{19656}{103776} \approx 0,189 = 18,9\%$

1.4 Untersuchung des Käuferverhaltens

1.4.1 Vier-Felder-Tafel **3,0 Punkte**

F: CD an eine Frau verkauft

M: CD an einen Mann verkauft

J: Jazz CD verkauft

	F	*M*	Σ
J	**8**	21	**29**
$\overline{J}$	165	46	211
Σ	**173**	67	**240**

1.4.2 CD in Liste **3,0 Punkte**

- Es gilt : $P(M) = \frac{|M|}{|\Omega|} = \frac{67}{240} \approx 27,9\%$
- Bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$P_M(J) = \frac{P(J\cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{|J\cap M|}{|\Omega|}}{\frac{|M|}{|\Omega|}} = \frac{|J\cap M|}{|M|} = \frac{21}{67} \approx 31,3\%$$

(Diese bedingte Wahrscheinlichkeit kann aus direkt aus der Vierfeldertafel bestimmt werden.)

1.4.3 Unabhängigkeit **2,5 Punkte**

- Es gilt $P(E_1) = P(M) = \frac{67}{240}$ und $P(E_2) = P(J) = \frac{29}{240}$.

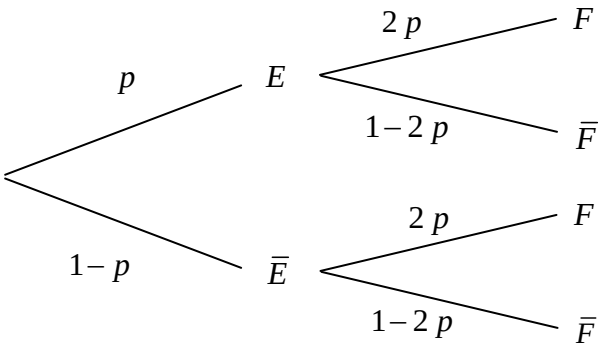
  Damit folgt: $P(E_1)\cdot P(E_2) = \frac{67}{240}\cdot\frac{29}{240} \approx 0,0337$
- Andererseits ergibt sich aus der Vierfeldertafel: $P(E_1\cap E_2) = \frac{21}{240} \approx 0,0875$.

Dies bedeutet, dass die Ereignisse E_1 und E_2 sind abhängig sind.

1.5 Baumdiagramm und Berechung der Wahrscheinlichkeit *p* **4,0 Punkte**

E: Elisabeth kauft eine CD,
$P(E) = p$

F: Die Freundin kauft eine CD,
$P(F) = 2\,p$



Betrachtet wird das Ereignis: „Mindestens eine von beiden kauft eine CD."
Formal ist dies das Ereignis $E \cup F$.
Die gegebene Bedingung lautet damit: $P(E \cup F) > 0{,}5$.

- *Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $E \cup F$:*

  Dem Ereignis $E \cup F$ entsprechen im Baumdiagramm drei Wege.

$$\begin{aligned} P(E \cup F) &= P(E \cap \overline{F}) + P(\overline{E} \cap F) + P(\overline{E} \cap \overline{F}) \\ &= 2p^2 + p \cdot (1 - 2p) + (1 - p) \cdot 2p \\ &= 2p^2 + p - 2p^2 + 2p - 2p^2 \\ &= -2p^2 + 3p \end{aligned}$$

  Alternative: Übergang zum Gegenereignis

$$\begin{aligned} P(E \cup F) &= 1 - P(\overline{E \cap F}) = 1 - P(\overline{E} \cap \overline{F}) = (1-p)\cdot(1-2\,p) \\ &= -2p^2 + 3p \end{aligned}$$

- *Bedingung*:

$$\begin{aligned} P(E \cup F) &> 0{,}5 \\ -2\,p^2 + 3\,p &> 0{,}5 \qquad | \cdot(-1) \\ 2\,p^2 - 3\,p &< -0{,}5 \qquad | : 2 \\ p^2 - \tfrac{3}{2}\,p &< -\tfrac{1}{4} \qquad | + \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 \\ p^2 - \tfrac{3}{2}\,p + \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 &< -\tfrac{1}{4} + \tfrac{9}{16} \\ \left(p - \tfrac{3}{4}\right)^2 &< \tfrac{5}{16} \\ \underbrace{p < \tfrac{\sqrt{5}}{4} + \tfrac{3}{4} \approx 1{,}31}_{\text{Wegen } p \le 1 \text{ immer erfüllt.}} &\quad \wedge \quad p > -\tfrac{\sqrt{5}}{4} + \tfrac{3}{4} \approx 0{,}19 \end{aligned}$$

  Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit muss $p > 0{,}19$ gelten.

2. Verpackung von 20 CDs in einem Karton

2.1 Erwartungswert **1,0 Punkte**

Die Zufallsgröße X zählt die Anzahl der defekten CDs.
Sie ist binomialverteilt mit $n = 200$ und $p = 0,03$.
Für den Erwartungswert ergibt sich: $E(X) = n \cdot p = 6$.

2.2 Zahl der zu testenden CDs **3,0 Punkte**

X: Anzahl der defekten CDs. Gegeben ist $p = 0,03$, n ist gesucht.

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) = 0,95 \\ \Leftrightarrow 1 - \binom{n}{0} \cdot 0,03^0 \cdot 0,97^n &= 0,95 \\ \Leftrightarrow 0,97^n &= 0,05 \\ \Leftrightarrow n &= \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,97)} \approx 98,35 \end{aligned}$$

Es müssen mindestens 99 CDs getestet werden.

2.3 Genau zwei CDs in der Lieferung defekt **2,5 Punkte**

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= \binom{180}{0} \cdot 0,03^0 \cdot 0,97^{180} + \binom{180}{1} \cdot 0,03^1 \cdot 0,97^{179} + \binom{180}{2} \cdot 0,03^2 \cdot 0,97^{178} \\ &= 0,0042 + 0,02131 + 0,0641 \\ &\approx 0,0914 \end{aligned}$$

Schriftliche Abiturprüfung 2011

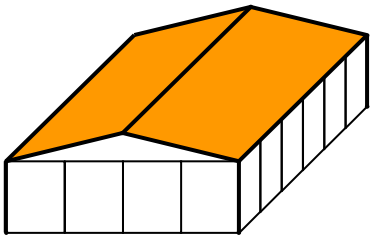
E-Kurs

Nachtermin

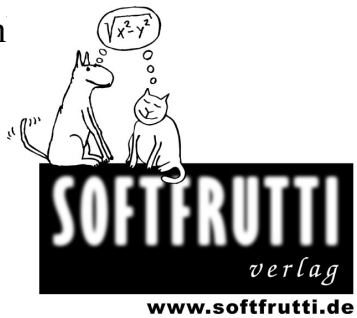
Themenübersicht

- Aufgabe 1: **Analysis**
  - Untersuchung der Funktionenschar $f_a(x) = \frac{\ln(a\,x)}{x^2} \quad (a \in \mathbb{R}^+)$
  - Modellierung: Bakterienwachstum
    - Wachstumsfunktion $f(t) = 1000 \cdot e^{0{,}0139 \cdot t}$
    - knickfreier Übergang zu einer erweiterten Funktion

- Aufgabe 2: **Analytische Geometrie**
  - Volumenberechnung
  - Winkel zwischen zwei Ebenen
  - Abstand Gerade-Ebene



- Aufgabe 3: **Stochastik**
  - Aufstellen und Auswerten eines Baumdiagramms
  - Aufstellen und Auswerten einer Vierfeldertafel (mit absoluten Werten)
  - Kombinatorische Berechnung von Wahrscheinlich



Aufgabe 1

ANALYSIS

1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_a : D \to \mathbb{R}$ mit $f_a(x) = \frac{\ln(a\,x)}{x^2}$ $(a \in \mathbb{R}^+)$.

1.1 Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und die Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereiches.

1.2 Untersuchen Sie die Funktionen f_a auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

1.3 Zeigen Sie, dass für den Funktionsterm der 1. Ableitung gilt: $f_a'(x) = \frac{1-2\cdot\ln(a\,x)}{x^3}$.

1.4 Bestimmen Sie die Extrempunkte von f_a und die Art der Extrempunkte.

Die zweite Ableitung $f_a''(x) = \frac{-5+6\cdot\ln(a\,x)}{x^4}$ kann ohne Herleitung verwendet werden.

(Zur Kontrolle: Extremwert $\frac{a^2}{2\mathrm{e}}$)

1.5 Für welchen Wert von *a* hat der Hochpunkt die *y*-Koordinate $\frac{2}{\mathrm{e}}$?

1.6 Ermitteln Sie eine Gleichung der Ortskurve, auf der die Hochpunkte der Schar liegen.

1.7 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f_2 unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem. Verwenden Sie als Einheit 2 cm, *y*-Achse von -4 bis 1.

1.8 Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f_2 an der Stelle $x = \frac{1}{2}$. Zeichnen Sie die Tangente in das Koordinatensystem von 1.7.

1.9 Begründen Sie ohne Rechnung:
Der Graph von f_2 besitzt mindestens einen Wendepunkt.

1.10 Bisher waren nur positive Parameter *a* zugelassen.

Untersuchen Sie nun für negative *a* die Definitionsmenge von f_a. Beschreiben Sie, wie der Graph von f_a aus dem Graphen von f_{-a} entsteht.

2. In einer flachen Glasschale wird eine Bakterienkultur angelegt und sich selbst überlassen. Um 0 Uhr befinden sich 1000 Bakterien in der Schale. Man nimmt an, dass die stündliche Wachstumsrate unter den gegebenen Versuchsbedingungen 1,4% beträgt.

2.1.1 Stellen Sie eine Gleichung der Wachstumsfunktion auf, die unter den oben genannten Bedingungen das Wachstum beschreibt. Wählen Sie als Zeiteinheit 1 Stunde.

(mögliches Ergebnis: $f(t) = 1000\cdot\mathrm{e}^{0{,}0139\cdot t}$)

2.1.2 Wie viele Bakterien hätten sich nach der oben gemachten Annahme um 10 Uhr in der Schale befunden?

2.1.3 Um wie viel Uhr hätte die Zahl der Bakterien der Annahme gemäß um 7% zugenommen?

2.2 Tatsächlich stellte man um 10 Uhr fest, dass 1200 Bakterien in der Schale waren. Zeigen Sie, dass die stündliche Wachstumsrate in Wirklichkeit rund 1,84% betrug.

2.3 Ein unbegrenztes exponentielles Wachstum auf längere Zeit ist nicht realistisch. Deshalb soll das Modell erweitert werden: Es soll angenommen werden, dass die Bakterienzahl bis 10 Uhr durch die Gleichung $g(t) = 1000 \cdot e^{0,0182 \cdot t}$ beschrieben wird. Ab dann soll die Gleichung $h(t) = 2000 - 1051 \cdot e^{-0,02729 \cdot t}$ das Wachstum beschreiben.

2.3.1 Bestätigen Sie, dass nach dem erweiterten Modell der Übergang um 10 Uhr ohne Sprung erfolgt.

2.3.2 Zeigen Sie, dass in diesem erweiterten Modell die Zahl der Bakterien auch für die Zeit nach 10 Uhr ständig wächst.

2.3.3 Begründen Sie, dass die Zahl der Bakterien den Wert 2000 nie überschreitet.

2.3.4 Skizzieren Sie den Verlauf der Graphen in ihrem Gültigkeitsbereich. Machen Sie zudem Aussagen über das Krümmungsverhalten von *g* und *h*.

2.3.5 Überprüfen Sie, ob nach dem erweiterten Modell der Übergang um 10 Uhr knickfrei erfolgt.

L ö s u n g e n

1. Untersuchung einer Funktionenschar

Betrachtet wird die Funktionenschar $f_a(x)=\dfrac{\ln(a\,x)}{x^2}$ $(a\in\mathbb{R}^+)$.

1.1 Bestimmung von Definitionsmenge und Grenzwerten **3,0 Punkte**

- *Definitionsmenge* (1,0 P)

  Bedingung an den ln-Term: $a\,x>0 \overset{a>0}{\Leftrightarrow} x>0$.

  Damit kann dann auch der Nennerterm nicht Null werden.

  Also folgt $D=\mathbb{R}^+$.

- *Grenzwerte* (2,0 P)

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to\infty}\cdot\underbrace{\ln(a\,x)}_{\to-\infty}\right)=-\infty \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0^+}\cdot\underbrace{\ln(a\,x)}_{\to+\infty}\right)=0^+$$

  (Der Potenzfunktionsterm dominiert über den ln-Term.)

1.2 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen **3,0 Punkte**

- *Schnittpunkt mit der x-Achse* (2,0 P)

  Es gilt: $f_a(x)=0 \;\Leftrightarrow\; \ln(a\,x)=0 \;\Leftrightarrow\; a\,x=1 \;\Leftrightarrow\; x=\frac{1}{a}$

  Schnittpunkt mit der *x*-Achse: $N\left(\frac{1}{a}\,\middle|\,0\right)$.

- *Schnittpunkt mit der y-Achse* (1,0 P)

  Wegen $D=\mathbb{R}^+$ gibt es keinen Schnittpunkt mit der *y*-Achse.

1.3 Erste Ableitung **3,0 Punkte**

$$f_a'(x)=\frac{\frac{1}{a\,x}\cdot a\cdot x^2-2\,x\cdot\ln(a\,x)}{x^4}=\frac{x-2x\cdot\ln(a\,x)}{x^4}=\frac{x\cdot\left(1-2\cdot\ln(a\,x)\right)}{x^4}=\frac{1-2\cdot\ln(a\,x)}{x^3}$$

1.4 Untersuchung auf Extrempunkte **3,0 Punkte**

- *notwendige Bedingung*: (1,5 P)

$$f_a'(x)=0 \;\Leftrightarrow\; 1-2\cdot\ln(a\,x)=0 \;\Leftrightarrow\; \ln(a\,x)=\tfrac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; a\,x=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \;\Leftrightarrow\; x=\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{a}$$

- *hinreichende Bedingung* (1,0 P)

  Die zweite Ableitung ist angegeben als: $f_a''(x)=\dfrac{-5+6\cdot\ln(a\,x)}{x^4}$.

  Es gilt: $f_a''\left(\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{a}\right)=\dfrac{-5+6\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\mathrm{e}^2}{a^4}}<0$, also liegt eine Minimumstelle vor.

- *Funktionswert* (0,5 P)

$$f_a\left(\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{a}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\mathrm{e}}{a^2}}=\frac{a^2}{2\mathrm{e}}$$

Alle Funktionen der Schar haben einen Hochpunkt $H\left(\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{a}\,\middle|\,\frac{a^2}{2\mathrm{e}}\right)$.

1.5 Bestimmung des Parameterwertes **2,0 Punkte**

y-Koordinate des Hochpunkts: $f_a\left(\frac{\sqrt{e}}{a}\right) = \frac{2}{e} \Leftrightarrow \frac{a^2}{2e} = \frac{2}{e} \Leftrightarrow a^2 = 4 \overset{a>0}{\Leftrightarrow} a = 2$

1.6 Ortskurve der Hochpunkte **3,0 Punkte**

x-Koordinate des Hochpunkts: $x = \frac{\sqrt{e}}{a} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{e}}{x}$

Einsetzen dieses Wertes für *a* in den Funktionsterm $f_a(x)$ ergibt:

$$y = \frac{\ln\left(\frac{\sqrt{e}}{x} \cdot x\right)}{x^2} = \frac{\ln\left(\sqrt{e}\right)}{x^2} = \frac{\frac{1}{2}\ln(e)}{x^2} = \frac{1}{2x^2}$$

(Die *y*-Koordinate des Hochpunkts muss bei der gegebenen Aufgabenstellung nicht unbedingt berechnet werden.)

Alternative: Berechnung der *y*-Koordinate des Hochpunkts: $y = \frac{a^2}{2e}$

Einsetzen des berechneten Wertes für *a* in die *y*-Koordinate ergibt die Gleichung der Ortskurve:

$$y = \frac{\left(\frac{\sqrt{e}}{x}\right)^2}{2e} = \frac{e}{x^2 \cdot 2e} = \frac{1}{2x^2}$$

1.7 Graph der Funktion f_2 **3,0 Punkte**

Betrachtet wird die Funktion

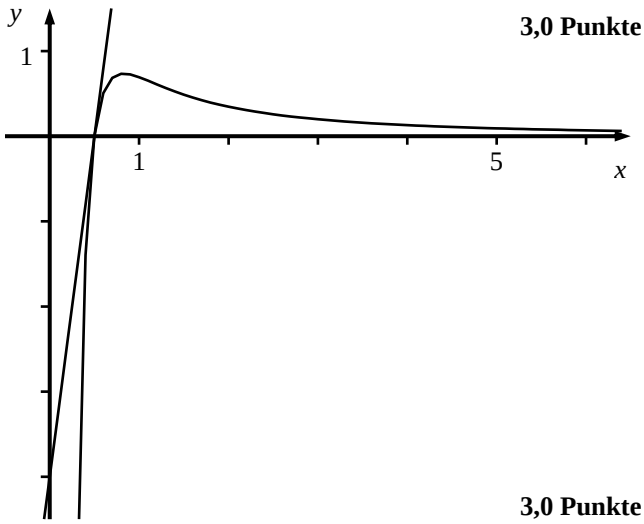
$$f_2(x) = \frac{\ln(2x)}{x^2}.$$

Charakteristische Punkte:

$N\left(\frac{1}{2} \mid 0\right)$

$HP\left(\frac{\sqrt{e}}{2} \mid \frac{4}{2e}\right) \approx (0{,}82 \mid 0{,}74)$

$WP\left(\frac{e^{\frac{5}{6}}}{2} \mid \frac{20}{6e^{\frac{5}{3}}}\right) \approx (1{,}15 \mid 0{,}63)$



1.8 Gleichung der Tangenten **3,0 Punkte**

Allgemeine Tangentengleichung $t: y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

Für die Stelle $x_0 = 0{,}5$ ergibt sich:

$$y = f'(0{,}5) \cdot (x - 0{,}5) + f(0{,}5) = 8 \cdot (x - 0{,}5) + 0 = 8x - 4$$

Zeichnung siehe 1.7.

1.9 Mindestens ein Wendepunkt **2,0 Punkte**

Für die zweite Ableitung von f_2 gilt: $f_2''(x) = \frac{-5 + 6 \cdot \ln(2x)}{x^4}$ ($a = 2$ in 1.4 wählen)

- *notwendige Bedingung*: $f_2''(x) = 0 \Leftrightarrow -5 + 6 \cdot \ln(2x) = 0$

  $\Leftrightarrow \ln(2x) = \frac{5}{6}$

  $\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} e^{\frac{5}{6}}$

- *hinreichende Bedingung*: Es handelt sich um eine einfache Nullstelle mit Vorzeichenwechsel. Also besitzt f_2 einen Wendepunkt.

1.10 Definitionsmenge für $a < 0$ **3,0 Punkte**

Es gilt: $a\,x > 0 \overset{a<0}{\Leftrightarrow} x < 0$, also $D = \mathbb{R}^-$

Der Graph von f_a entsteht aus dem Graphen von f_{-a} durch eine Spiegelung an der *y*-Achse.

2. Bakterienkultur

2.1 Aufstellen und Auswerten einer Wachstumsfunktion

2.1.1 **Wachstumsfunktion** **2,5 Punkte**

- *Ansatz*: $f(t) = a \cdot e^{k \cdot t}$
- *Anfangswert*: $f(0) = 1000 \Leftrightarrow a \cdot e^0 = 1000 = 1000 \Leftrightarrow a = 1000$.
- *Zweiter Wert*: $f(1) = 1{,}014 \cdot 1000 \Leftrightarrow 1000 \cdot e^k = 1014 \Leftrightarrow e^k = 1{,}014$
  $\Leftrightarrow k = \ln(1{,}014) \Leftrightarrow k \approx 0{,}0139$
- *Ergebnis*: $f(t) = 1000 \cdot e^{0{,}0139 \cdot t}$

Alternative: Ansatz als $f(t) = 1000 \cdot (1 + 0{,}014)^t = 1000 \cdot 1{,}014^t$
mit Anfangswert $a = 1000$ und dem Wachstumsfaktor q = 1,014 .

2.1.2 **Bakterienzahl um 10 Uhr** **1,0 Punkte**

Es gilt: $f(10) = f(t) = 1000 \cdot e^{0{,}0139 \cdot 10} \approx 1149$

Nach dieser Annahme sind um 10 Uhr 1149 Bakterien vorhanden.

2.1.3 **Zunahme um 7%** **3,0 Punkte**

Gesucht ist die Zeit, nach der 1000 · 1,07 = 1070 Bakterien vorhanden sind:

$$\begin{aligned} f(t) = 1000 \cdot e^{0{,}0139 \cdot t} = 1070 &\Leftrightarrow e^{0{,}0139 \cdot t} = 1{,}07 \\ &\Leftrightarrow 0{,}0139 \cdot t = \ln(1{,}07) \\ &\Leftrightarrow t = \frac{\ln(1{,}07)}{0{,}0139} \approx 4{,}9 \end{aligned}$$

Die gesuchte Zeit beträgt 4,9 Stunden. Das sind 4 Stunden und 54 Minuten.
Um ca. 4.54 Uhr hat die Zahl der Bakterien um 7% zugenommen.

2.2 Stündliche Wachstumsrate **3,0 Punkte**

- *Veränderte Wachstumsfunktion*: $g(t) = 1000 \cdot e^{r \cdot t}$
- *Bestimmung der Konstanten r*:

  $g(10) = 1200 \Leftrightarrow 1000 \cdot e^{r \cdot 10} = 1200 \Leftrightarrow e^{10 \cdot r} = 1{,}2 \Leftrightarrow r = \frac{\ln(1{,}2)}{10} \approx 0{,}0182$

  Damit lautet die Wachstumsfunktion: $g(t) = 1000 \cdot e^{0{,}0182 \cdot t}$
- *Berechnung der Wachstumsrate*:
  Für die Anzahl der Bakterien nach einer Stunde ergibt sich nach diesem Modell:
  $g(1) = 1000 \cdot e^{0{,}0182 \cdot 1} \approx 1018{,}4$.
  Verglichen mit dem Anfangswert 1000 entspricht diese Zunahme einem Wachstumsfaktor 1,0184 oder 1,84%.

Alternative: Ansatz als $g(t) = 1000 \cdot q^t$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} g(10) = 1000 \cdot q^{10} &= 1200 \\ \Leftrightarrow \quad q^{10} &= 1,2 \\ \Leftrightarrow \quad q &= 1,2^{\frac{1}{10}} \\ \Leftrightarrow \quad q &\approx 1,0184 \end{aligned}$$

Dem Wachstumsfaktor q = 1,0184 entspricht der Prozentsatz 1,84%.

2.3 Erweitertes Modell

Es werden im Text folgende Angaben über den Wachstumsprozess gemacht:

bis 10 Uhr: $g(t) = 1000 \cdot \mathrm{e}^{0,0182 \cdot t}$ (wie in 2.2 bestimmt)

ab 10 Uhr: $h(t) = 2000 - 1051 \cdot \mathrm{e}^{-0,02729 \cdot t}$

2.3.1 Übergang um 10 Uhr ohne Sprung **1,0 Punkte**

Es gilt: $g(10) = 1200$ (vgl. 2.2)

$$h(10) = 2000 - 1051 \cdot \mathrm{e}^{-0,02729 \cdot 10} \approx 1200$$

Der Übergang erfolgt also ohne Sprung (stetig).

2.3.2 Wachstum auch für die Zeit nach 10 Uhr **3,0 Punkte**

Es gilt: $h'(t) = \underbrace{-1051 \cdot (-0,02729)}_{>0} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-0,02729 \cdot t}}_{>0} > 0$

Die Funktion h ist also streng monoton wachsend in $[10; \infty[$.

2.3.3 Überschreiten der Zahl 2000 **1,0 Punkte**

Es gilt: $h(t) = 2000 - \underbrace{1051 \cdot \mathrm{e}^{-0,02729 \cdot t}}_{>0} < 2000$

Die Bakterienzahl kann also die Zahl 2000 nicht überschreiten.

2.3.4 Krümmungsverhalten und Graph **5,0 Punkte**

Krümmungsverhalten:

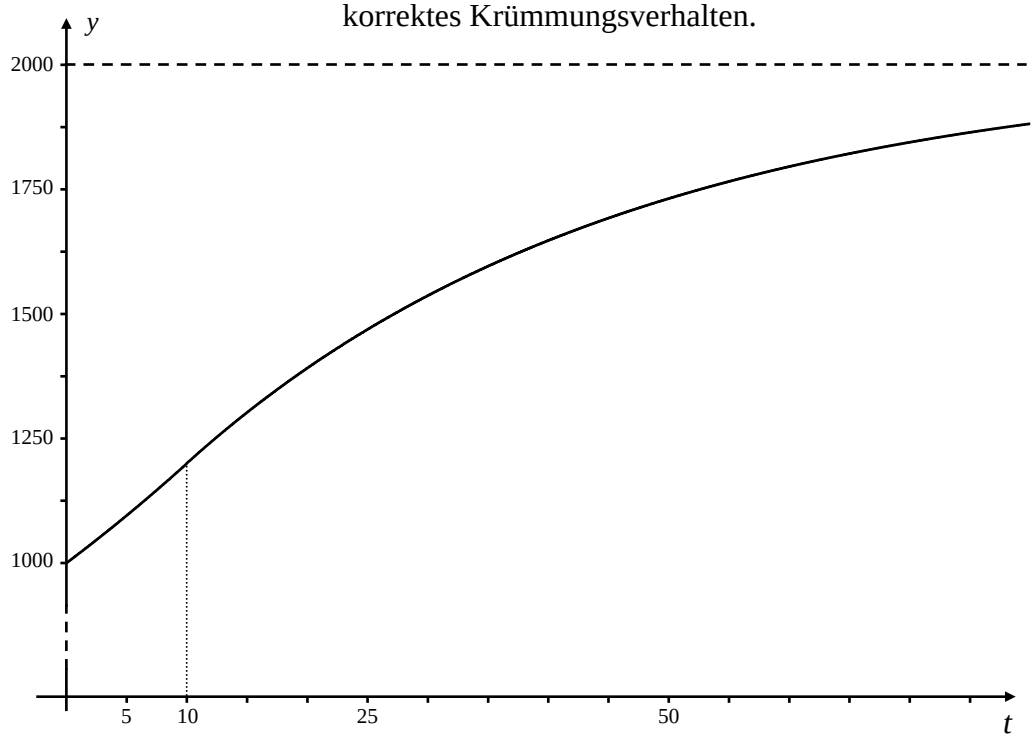
- Funktion g: $g''(t) = 0,33124 \cdot \mathrm{e}^{0,0182 \cdot t} > 0$ für alle $t \in [0\ ;\ 10]$ (sogar $t \in \mathbb{R}$)
  Der Graph von g ist linksgekrümmt in [0 ; 10].
- Funktion h: $h''(t) = -1051 \cdot 0,02729^2 \cdot \mathrm{e}^{-0,02729 \cdot t} < 0$ $t \in [10\ ;\ \infty]$ (sogar $t \in \mathbb{R}$)
  Der Graph von h ist rechtsgekrümmt in $[10; \infty[$.

Skizze der Graphen: Anforderungen an die Skizze:

Punkte $(0\,|\,1000)$ und $(10\,|\,1200)$

Asymptote $y = 2000$

korrektes Krümmungsverhalten.



2.3.5 **Knickfreiheit** **3,5 Punkte**

Es soll überprüft werden, ob auch die Steigungswerte an der Stelle 10 übereinstimmen.

- *Funktion g*: Ableitung: $g'(t) = 18,2 \cdot e^{0,0182 \cdot t}$

  Steigungswert: $g'(10) = 18,2 \cdot e^{0,182} \approx 21,8$

- *Funktion h*: Ableitung: $h'(t) = 1051 \cdot 0,02729 \cdot e^{-0,02729 \cdot t}$ (vgl. 2.3.2)

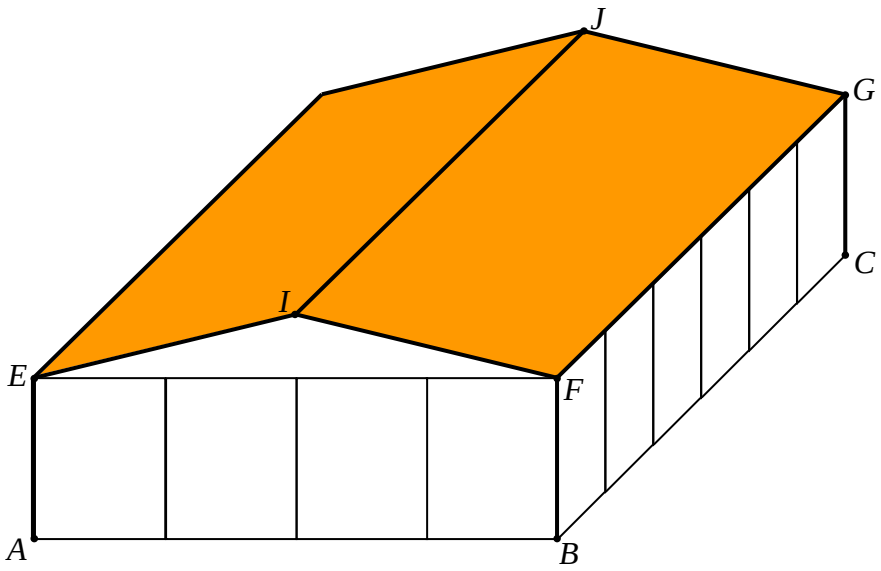
  Steigungswert: $h'(10) = 1051 \cdot 0,02729 \cdot e^{-0,2729} \approx 21,8$

Der Übergang erfolgt also auch knickfrei.

Aufgabe 2
ANALYTISCHE GEOMETRIE

Anlässlich eines Schuljubiläums wird ein großes rechteckiges Festzelt auf dem Sportplatz aufgebaut. Das Zelt hat folgende Maße:

Länge der Vorderseite: 8 m — Seitenhöhe: 2,5 m
Seiten- und Firstlänge: 12 m — Firsthöhe: 3,5 m



1. Das Festzelt wird nun in ein räumliches Koordinatensystem eingebettet: Die x_3-Achse zeigt dabei senkrecht zur Bodenfläche nach oben.

Die Punkte *A*, *F* und *J* haben folgende Koordinaten:

$$A(6\,|\,-4\,|\,0)\,,\ F\,(6\,|\,4\,|\,2{,}5)\,,\ J\,(-6\,|\,0\,|\,3{,}5)\,.$$

Beschreiben Sie die Lage des Koordinatenursprungs sowie der x_1 und x_2-Achse bezüglich des Zeltes und ermitteln Sie die Koordinaten der Eckpunkte *B, C, E, G, I* des Zeltes.

2. Berechnen Sie das Volumen des Zeltes.

3. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, die die Dachfläche *IFGJ* enthält. (Zur Kontrolle: $e:\ x_2 + 4\,x_3 - 14 = 0$.)

4. Berechnen Sie das Maß des Winkels, unter dem die Dachfläche gegenüber der Horizontalen geneigt ist, sowie den Flächeninhalt des gesamten Zeltdaches.

5. Im Zelt wird im hinteren Teil eine ein Meter hohe Bühne aufgebaut. Kann ein 1,85 m großer Mensch im Punkt $P\,(-5\,|\,2\,|\,1)$ noch aufrecht auf der Bühne stehen?

6. Im Punkt $Q\,(1\,|\,8\,|\,0)$ steht ein 5 m hoher Mast, von dessen Spitze aus zwei Girlanden zu den beiden Firstpunkten *I* und *J* so gespannt werden sollen, dass sie geradlinig verlaufen.

6.1 Berechnen Sie die Längen der beiden Girlanden.

6.2 Die beiden Girlanden spannen eine Ebene e' auf. Begründen Sie, dass die Zeltkante $\overline{FG}$ parallel zu dieser Ebene verläuft.

6.3 Beschreiben Sie ein Verfahren, um den Abstand der Zeltkante $\overline{FG}$ zu e' zu bestimmen. (Die Berechnung dieses Abstandes ist nicht verlangt.)

L ö s u n g e n

1. Beschreibung der Lage **4,5 Punkte**

Der Koordinatenursprung ist der Mittelpunkt des Zeltbodens.
Die x_1-Achse verläuft parallel zu $\overrightarrow{CB}$, die x_2-Achse parallel zu $\overrightarrow{AB}$.
Punkte: $B(6\,|\,4\,|\,0)$, $C(-6\,|\,4\,|\,0)$, $E(6\,|\,-4\,|\,2{,}5)$, $G(-6\,|\,4\,|\,2{,}5)$, $I(6\,|\,0\,|\,3{,}5)$

2. Volumen des Zeltes **3,0 Punkte**

Das Zelt lässt sich zerlegen in einen Quader und ein Prisma. Die Volumina können mit gemachten Angaben elementargeometrisch berechnet werden.

$$V = V_{\text{Quader}} + V_{\text{Prisma}}$$
$$= 8\,\text{m}\cdot 2{,}5\,\text{m}\cdot 12\,\text{m} + \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}\cdot 8\,\text{m}\cdot 1\,\text{m}\right)}_{\text{dreieckige Grundfläche}}\cdot\underbrace{12\,\text{m}}_{\text{Höhe}} = 288\,\text{m}^3$$

3. Koordinatengleichung der Ebene, die die Dachfläche *IFGJ* enthält **3,5 Punkte**

- Richtungsvektoren: $\overrightarrow{FI} = \vec{i} - \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{u}$,

$$\overrightarrow{FG} = \vec{g} - \vec{f} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \text{wähle } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Normalenvektor: $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{n}$

- Punktnormalengleichung: $e: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} \right] = 0$

- Allgemeine Normalengleichung: $e: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 14 = 0$

- Koordinatengleichung: $e: x_2 + 4x_3 - 14 = 0$

4. Neigungswinkel der Dachfläche und Flächeninhalt **3,5 Punkte**

- *Winkel zwischen zwei Ebenen*:
  - Ebene *e* mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $|\,\vec{n}\,| = \sqrt{17}$ (Dachfläche *IFGJ*)
  - x_1-x_2-Ebene mit dem Normalenvektor $\overrightarrow{n_{12}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $|\,\overrightarrow{n_{12}}\,| = 1$ (Horizontale)

Für den gesuchten Winkel folgt:

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{n_{12}}}{\left|\vec{n}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_{12}}\right|} = \frac{4}{\sqrt{17}} \approx 0,9701 \quad , \quad \text{also } \varphi \approx 14,0° .$$

- *Flächeninhalt*:
  Das Zeltdach besteht aus zwei gleichgroßen Rechteckflächen.

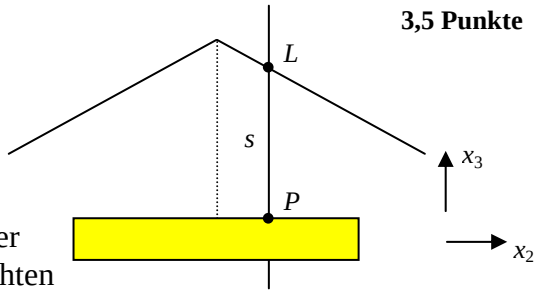
$$\mu(A) = 2 \cdot \left(\left| \overrightarrow{FG} \right| \cdot \left| \overrightarrow{FI} \right| \right) = 2 \cdot \sqrt{12^2 + 0^2 + 0^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + 4^2}$$

(vgl. Vektoren in 3.)

$$= 2 \cdot \left(12 \cdot \sqrt{17}\right) \approx 98,95 \quad (\text{m}^2)$$

5. Mensch auf Bühne

3,5 Punkte



Der Mann steht im Punkt $P(-5 \mid 2 \mid 1)$. Die positive x_2-Koordinate belegt, dass der Mann unter der rechten Dachfläche *IFGJ* steht.

Gesucht ist die Länge der Strecke $\overline{PL}$.
Dabei ergibt sich der Punkt *L* als Schnittpunkt der Dachebene $e: x_2 + 4x_3 - 14 = 0$ mit der Senkrechten

$$s: \vec{x} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schnitt von *s* mit der Ebene *e*: (Einsetzungsverfahren)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 14 \Leftrightarrow 6 + 4 \cdot \lambda = 14 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

Einsetzen in die Gleichung von *L* ergibt den Punkt $L(-5 \mid 2 \mid 3)$.

Der gesuchte Abstand von *P* zu *L* ist 2m (Vergleich der x_3-Koordinaten von *P* und *L*).
Der 1,85 m große Mann kann also im Punkt *P* noch stehen.

6. Girlanden von *Q* zu den Firstpunkten *I* und *J*

6.1 Längen der beiden Girlanden

2,5 Punkte

Betrachtet werden die Spitze $S(1 \mid 8 \mid 5)$ (*S* in 5m über $Q(1 \mid 8 \mid 0)$) und die beiden Punkte $I(6 \mid 0 \mid 3,5)$ und $J(-6 \mid 0 \mid 3,5)$.

Abstände:

$$\left|\overrightarrow{SI}\right| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -1,5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{25 + 64 + 2,25} \approx 9,55 \text{ (m)}$$

$$\left|\overrightarrow{SJ}\right| = \left| \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ -1,5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{49 + 64 + 2,25} \approx 10,74 \text{ (m)}$$

6.2 Zeltkante $\overline{FG}$ parallel zu der Ebene e' **2,0 Punkte**

Rechnerische Lösung:

Richtungsvektoren der Girlandenebene e' sind $\overrightarrow{SI} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -1,5 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{SJ} = \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ -1,5 \end{pmatrix}$.

Als Normalenvektor ergibt sich $\vec{n}' = \overrightarrow{SI} \times \overrightarrow{SJ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ -96 \end{pmatrix}$.

Damit folgt: $\vec{n}' \cdot \overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ -96 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$. Die bedeutet, dass $\overline{FG}$ parallel zu e' ist.

Geometrische Argumentation:

Die Ebene e' enthält die Gerade *IJ*. Da $\overline{IJ} \parallel \overline{FG}$ ist, muss auch $e' \parallel \overline{FG}$ sein.

6.3 Abstand der Zeltkante $\overline{FG}$ zu e' **2,5 Punkte**

Wegen der Parallelität von $\overline{FG}$ zu e' (vgl. 6.2) ist der gesuchte Abstand der Abstand eines beliebigen Punktes der Geraden *FG* zu e', z. B. des Puktes *F* ($d(F, e')$).

1. Möglichkeit: Lotgeradenmethode

- Lotgerade ℓ mit Aufpunkt *F* und Richtungsvektor $\vec{n}'$ bestimmen.
- Schnittpunkt *L* von ℓ und e' bestimmen.
- Der gesuchte Abstand ist $\left| \overrightarrow{FL} \right|$.

2. Möglichkeit: Abstandformel

Es gilt: $d(F, e') = \left| \vec{n}^0 \cdot \overrightarrow{SF} \right| = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \left| \vec{n} \cdot \overrightarrow{SF} \right|$

Dabei ist $\vec{n}$ ein Normalenvektor und *S* ein Punkt von e'.

Aufgabe 3

WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

1. Die Firma Tony stellt Fernsehgeräte her. 30% der Geräte werden mit einer Bildschirm-Diagonalen von 32 Zoll produziert und die restlichen Geräte zu gleichen Teilen mit 37-Zoll- bzw. 40-Zoll-Bildschirmen.

Der Kunde kann außerdem zwischen verschiedenen Gehäusefarben wählen:

Bei den 32- und 37-Zoll-Geräten ist die Hälfte der Produktion schwarz, die andere Hälfte weiß. Bei den 40-Zoll-Geräten werden 20% in der Sonderfarbe platin hergestellt, die restlichen zu gleichen Teilen in den Farben schwarz und weiß.

1.1 Zeichnen Sie das zugehörige Baumdiagramm und beschriften Sie die Äste mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

1.2 Die Qualitätskontrolle von Tony überprüft regelmäßig die laufende Produktion.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Fernsehgerät eine 40-Zoll-Bildschirmdiagonale hat und platinfarben ist.

1.3 Wie wahrscheinlich ist es, einen schwarzen Fernseher auszuwählen?

1.4 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Fernsehgerät eine 40-Zoll-Diagonale hat, wenn man schon weiß, dass das Gerät schwarz ist.

2. In der Qualitätskontrolle werden die Bildschirme auf Pixelfehler untersucht, von denen es zwei Typen gibt:

F_1: ständig leuchtende Pixel, F_2: ständig schwarze Pixel.

Es werden 300 Fernsehgeräte untersucht. Davon weisen 253 keine Pixelfehler auf, 40 weisen den Fehlertyp F_2 auf, 28 sowohl F_1 als auch F_2.

Aus den 300 Geräten wird ein Gerät zufällig ausgewählt.

2.1 Stellen Sie den Sachverhalt in einer Vierfeldertafel dar.

2.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:

2.2.1 Der Bildschirm des Gerätes weist den Fehlertyp F_1 und den Fehlertyp F_2 auf.

2.2.2 Der Bildschirm weist entweder den Fehlertyp F_1 oder den Fehlertyp F_2 auf.

2.2.3 Der Bildschirm weist höchstens einen der beiden Fehlertypen auf.

2.2.4 Bei dem ausgewählten Gerät hat man den Fehlertyp F_2 festgestellt. Wie wahrscheinlich ist es, dass der Bildschirm dieses Gerätes auch den Fehlertyp F_1 aufweist?

2.2.5 Untersuchen Sie, ob das Auftreten von F_1 unabhängig von F_2 ist.

3. Für ein Computerspiel-Event stellt Tony besonders große Bildschirme her, an denen sich Spieler einen Wettkampf liefern. Es gibt insgesamt 34 Teilnehmer, von denen 14 weiblich und 20 männlich sind. Für die Startgruppe werden vier Teilnehmer ausgelost.

Bearbeiten Sie die folgenden Arbeitsaufträge unter der Annahme, dass jeder Teilnehmer die gleiche Chance hat, ausgelost zu werden.

3.1 Berechnen Sie, wie viele Möglichkeiten es gibt, eine Vierergruppe als Startgruppe zu bilden.

3.2 Zeigen Sie: Die Wahrscheinlichkeit, dass genau ein Junge teilnimmt, beträgt etwa 0,157.

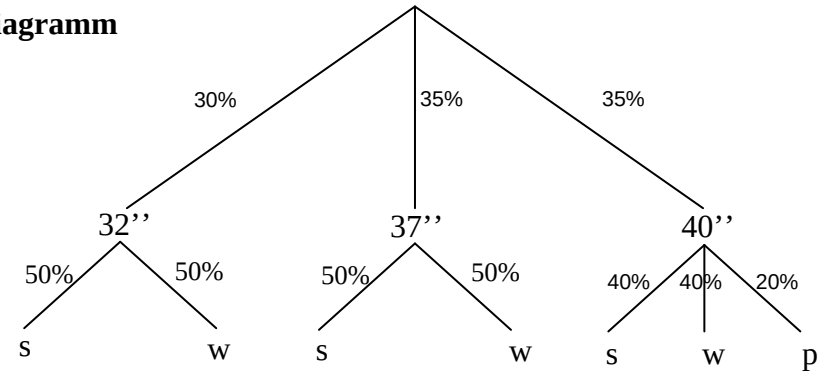
3.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Bildung einer Vierergruppe wie in 3.2 für den Fall, dass drei Mädchen und ein Junge zum Event nicht angetreten sind.

Welche prozentuale Änderung ergibt sich im Vergleich zum Ergebnis aus 3.2?

L ö s u n g e n

1. Herstellung von Fernsehgeräten

1.1 Baumdiagramm **3,5 Punkte**



s: schwarz
w: weiß
p: platin

1.2 Berechnung „UND“-Wahrscheinlichkeit **1,0 Punkte**

$P(40" \cap \text{p}) = 0,35 \cdot 0,2 = 0,07 = 7\%$

1.3 Wahrscheinlichkeit für schwarzen Fernseher **2,0 Punkte**

$P(\text{s}) = 0,3 \cdot 0,5 + 0,35 \cdot 0,5 + 0,35 \cdot 0,4 = 0,465 = 46,5\%$

1.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit **3,0 Punkte**

Bedingung: Gerät ist schwarz.

$$P(40" \mid \text{s}) = \frac{P(40" \cap \text{s})}{P(\text{s})} = \frac{0,35 \cdot 0,4}{0,465} = \frac{0,14}{0,465} = \frac{28}{93} \approx 30,1\%$$

2. Qualitätskontrolle

2.1 Vierfeldertafel **3,0 Punkte**

	F_1	$\overline{F_1}$	Σ
F_2	**28**	12	**40**
$\overline{F_2}$	7	**253**	260
Σ	35	265	**300**

2.2 Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

Es gilt jeweils $|\Omega| = 300$.

2.2.1 **Fehlertyp F_1 und F_2** **1,0 Punkte**

$P(F_1 \cap F_2) = \frac{28}{300}$

2.2.2 **Entweder Fehlertyp F_1 oder F_2** **1,5 Punkte**

$P\left((F_1 \cap \overline{F}_2) \cup (\overline{F}_1 \cap F_2)\right) = \frac{7}{300} + \frac{12}{300} = \frac{19}{300}$

2.2.3 **Höchstens einen der beiden** **2,0 Punkte**

$P(\overline{F_1 \cap F_2}) = 1 - P(F_1 \cap F_2) = 1 - \frac{28}{300} = \frac{272}{300} \approx 90,7\%$

2.2.4 **Wahrscheinlichkeit von F_1 unter der Bedingung F_2** **2,0 Punkte**

$$P_{F_2}(F_1) = \frac{P(F_1 \cap F_2)}{P(F_2)} = \frac{\frac{28}{300}}{\frac{40}{300}} = \frac{28}{40} = 70\% \quad \text{(oder: } P_{F_2}(F_1) = \frac{|F_1 \cap F_2|}{|F_2|} = \frac{28}{40} = 70\%\text{)}$$

2.2.5 **Unabhängigkeit von F_1 und F_2** **1,5 Punkte**

Es gilt: $P(F_1) \cdot P(F_2) = \frac{30}{300} \cdot \frac{40}{300} \approx 0{,}0133$ und $P(F_1 \cap F_2) = \frac{28}{300} \approx 0{,}0093$.

Die beiden Werte stimmen nicht überein. F_1 und F_2 sind also abhängig.

Alternative:

Mit dem Ergebnis von 2.2.4 ergibt sich: $P_{F_2}(F_1) = 0{,}7 = \frac{210}{300} \neq P(F_1) = \frac{35}{300}$

Dies bedeutet, dass F_1 und F_2 abhängig sind.

3. Computerspiel-Event

3.1 Vierergruppe als Startgruppe **1,0 Punkte**

$\binom{34}{4} = 46376$ (Auswahl: 4 aus 34)

3.2 Genau ein Junge nimmt teil **1,5 Punkte**

A: Genau ein Junge nimmt teil.

Es gilt $|A| = \binom{14}{3} \cdot \binom{20}{1} = 7280$ und $|\Omega| = \binom{34}{4} = 46376$.

Damit folgt: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{7280}{46376} \approx 0{,}157$

3.3 Bildung einer Vierergruppe **2,5 Punkte**

A: Genau ein Junge nimmt bei veränderter Situation teil.

Es gilt $|B| = \binom{11}{3} \cdot \binom{19}{1} = 3135$ und $|\Omega'| = \binom{30}{4} = 27405$.

Veränderte Situation:
(Männer: 3 aus 11
Frauen: 1 aus 19)

Damit folgt: $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega'|} = \frac{3135}{27405} \approx 0{,}114$

Absolute Änderung: $0{,}114 - 0{,}157 = -0{,}043$

Relative Änderung: $\frac{-0{,}043}{0{,}157} \approx -0{,}274 = -27{,}4\%$

Die Wahrscheinlichkeit verringert sich um 27,4%.

Schriftliche Abiturprüfung 2012

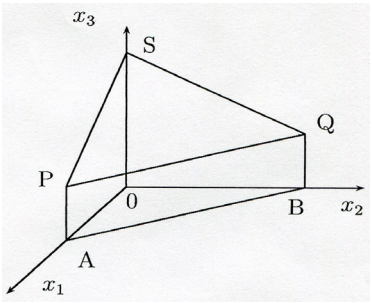
E-Kurs

Haupttermin

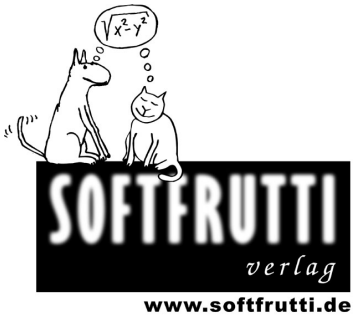
Themenübersicht

- Aufgabe 1: **Analysis**
  - Untersuchung der e-Funktion $f(x) = x \cdot e^{-0{,}1 \cdot x}$
  - Modellierung: Feinstaubkonzentration
  - Untersuchung der ln-Funktion $f(x) = \ln(x^2)$
  - Beweis mithilfe vollständiger Induktion

- Aufgabe 2: **Analytische Geometrie**
  - Winkel Ebene-Ebene
  - Volumenberechnung
  - Schwerpunkt eines Dreiecks
  - Reflexion eines Lichtstrahls



- Aufgabe 3: **Stochastik**
  - Kombinatorik
  - Aufstellen und Auswerten einer Vierfeldertafel (mit absoluten Werten)
  - Bernoulli-Kette



Aufgabe 1
ANALYSIS

1.1 Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x \cdot e^{-0,1 \cdot x}$.

Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen sowie Extrempunkte und bestimmen Sie das Grenzwertverhalten für $x \to \pm\infty$.

Skizzieren Sie damit den Graphen der Funktion f. (Längeneinheit 0,5 cm)

1.2 Beschreiben Sie, wie der Graph der Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } g(x) = 18 + 10 \cdot x \cdot e^{-0,1 \cdot x}$$

aus dem Graphen der Funktion f (Teil 1.1) entsteht.

1.3 Mit Hilfe der Funktion g (Teil 1.2) wird die zeitliche Entwicklung der Feinstaubkonzentration in der Außenluft nach einem Großbrand modelliert. Dabei gibt $g(x)$ die Feinstaubkonzentration in einer geeigneten Einheit zum Zeitpunkt x ($x \geq 0$, Maßzahl der Zeit in Tagen) nach Ausbruch des Brandes an.

a) Bestätigen Sie, dass die Feinstaubkonzentration bei Ausbruch des Brandes 18 Einheiten betrug und dass sie sich gemäß dem Modell langfristig wieder diesem Wert annähert.

b) Weisen Sie nach, dass die Feinstaubkonzentration 10 Tage nach Ausbruch des Brandes einen Maximalwert erreicht. Zeigen, Sie dass es sich um ein absolutes Maximum handelte und geben Sie dessen Wert an.

c) Berechnen Sie, wann im Zeitintervall [0 ; 30] die stärkste Zunahme und die stärkste Abnahme der Belastung zu verzeichnen waren.

d) Stellen Sie den zeitlichen Verlauf der Feinstaubkonzentration für die ersten 30 Tage in einem geeigneten Koordinatensystem graphisch dar. Nutzen Sie dabei bisherige Ergebnisse.

e) EU-Richtlinien schreiben vor, dass die Feinstaubkonzentration im Mittel den Wert von 40 Einheiten nicht überschreitet. Überprüfen Sie rechnerisch, ob die mittlere Feinstaubkonzentration im Zeitraum der ersten 30 Tage diese Vorschrift erfüllt.

Hinweis: Ohne Nachweis zu benutzen:

Die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = -(10 \cdot x + 100) \cdot e^{-0,1 \cdot x}$ ist eine Stammfunktion der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x \cdot e^{-0,1 \cdot x}$.

2.1 Gegeben ist die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \ln(x^2)$.

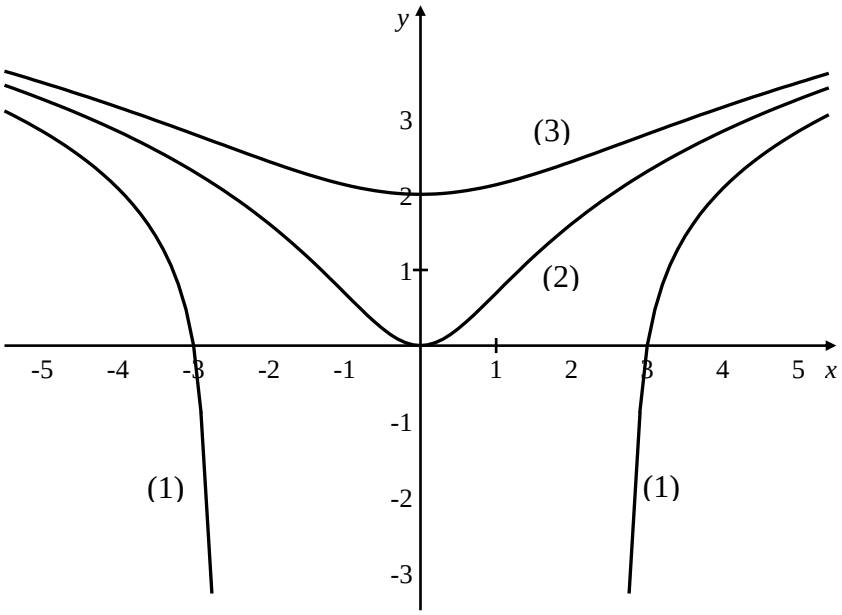
Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge *D*, die Symmetrie, die Nullstellen und das Monotonieverhalten. Zeichnen Sie den Graphen.

2.2 Gegeben ist die Funktionenschar $f_a : D \to \mathbb{R}$ mit $f_a(x) = \ln(x^2 + a)$ mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie jeweils die maximale Definitionsmenge der Funktionen f_1 und f_{-1}.

b) Begründen Sie, dass die maximale Definitionsmenge jeder Funktion f_a für $a > 0$ gleich $\mathbb{R}$ ist.

c) Die nachfolgend gezeigten Graphen (1)**,** (2) und (3) gehören zu Funktionen der Schar. Bestimmen Sie den jeweiligen Parameterwert. Begründen Sie Ihr Vorgehen.



d) Zeigen Sie, dass die Funktionen f_a nur für positive Parameterwerte lokale Minima haben. Für welche Parameterwerte liegen die Tiefpunkte unterhalb der *x*-Achse?

3. Zeigen Sie mit Hilfe des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion.

Für die *n*-te Ableitung **(***n* ∈ IN*) der Funktion $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-x}$ gilt:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot (x - n) \cdot \mathrm{e}^{-x} \quad .$$

L ö s u n g e n

1. Untersuchung der Funktion *f*

Gegeben ist $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1 \cdot x}$.

1.1 Untersuchung auf Nullstellen, Extrempunkte, Grenzwerte, Graph *f* — 5,5 Punkte

- *Nullstelle* (0,5 P)

  $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad (\mathrm{e}^{-0{,}1 \cdot x} \neq 0)$

- *Ableitung* (1,0 P)

  $f'(x) = 1 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1 \cdot x} + x \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1 \cdot x} \cdot (-0{,}1) = (1 - 0{,}1 \cdot x) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1 \cdot x}$

- *Extrempunkt* (2,0 P)
  - Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 0{,}1 \cdot x \Leftrightarrow x = 10$ (einfach, mit Vzw.)
  - Hinreichende Bedingung:

    Vorzeichentabelle für f':

    10 ist lokale Maximumstelle.

x		10	
$f'(x)$	+	0 mit HP	−

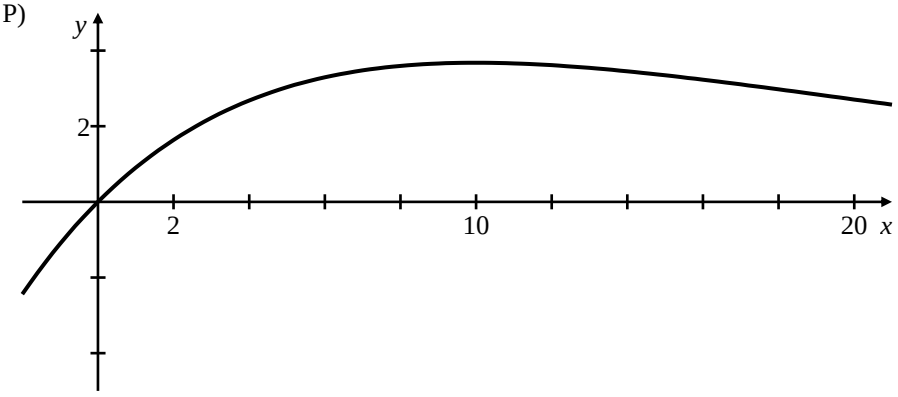
  - Funktionswert: $f(10) = \frac{10}{\mathrm{e}} \approx 3{,}7$
  - Hochpunkt: $H(10 \mid 3{,}7)$

- *Grenzwerte* (1,0 P)

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\underbrace{x}_{\to -\infty} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-0{,}1 \cdot x}}_{\to +\infty} \right) = -\infty \quad ; \qquad \lim_{x \to +\infty} \left(\underbrace{x}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-0{,}1 \cdot x}}_{\to 0^+} \right) = 0^+$$

  (Die e-Funktion dominiert über die Potenzfunktion.)

- *Graph* (1,0 P)



1.2 Entstehung des Graphen von *g* aus dem Graphen von *f* — 1,0 Punkte

Es gilt: $g(x) = 18 + 10 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1 \cdot x} \;=\; g(x) = 18 + 10 \cdot f(x)$.

Der Graph von $g(x)$ entsteht aus dem Graphen von $f(x)$ (nur in dieser Reihenfolge) durch eine Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 10 und einer Verschiebung um 18 in positiver y-Richtung.

1.3 Zeitliche Entwicklung der Feinstaubkonzentration

1.3 a) Konzentration beim Ausbruch und langfristige Entwicklung **2,0 Punkte**

Feinstaubkonzentration bei Ausbruch des Brandes: $g(0) = 10$

Grundbelastung (langfristiger Näherungswert): $\lim\limits_{x \to +\infty} (g(x)) = 18$

1.3 b) Absolutes Maximum der Konzentration **5,0 Punkte**

– Ableitung: $g'(x) = 10 \cdot \underbrace{f'(x)}_{1.1} = 10 \cdot (1 - 0{,}1 \cdot x) \cdot e^{-0{,}1 \cdot x} = (10 - x) \cdot e^{-0{,}1 \cdot x}$

– Notwendige Bedingung: $g'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 10$ (einfach mit Vzw.)

– Hinreichende Bedingung: g' (hat wie f') an der Stelle 10 einen Vzw. von + nach –.
10 ist daher lokale Maximumstelle.

– Absolutes Extremum: Da 10 die einzige lokale Extremstelle in D ist, handelt es sich um die absolute Maximumstelle.

Maximaler Wert: $g(10) = 18 + 100 \cdot e^{-1} \approx 54{,}8$

Alternative: Vergleich von $g(10) \approx 54{,}8$ mit Randwerten; hier die Grenzwerte:

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 18$

1.3 c) Stärkste Zunahme und Abnahme der Belastung **5,0 Punkte**

Gesucht sind die absoluten Maxima der Ableitungsfunktion g' im Intervall [0 ; 30]:

Zweite Ableitung: $g''(x) = (0{,}1 \cdot x - 2) \cdot e^{-0{,}1 \cdot x}$

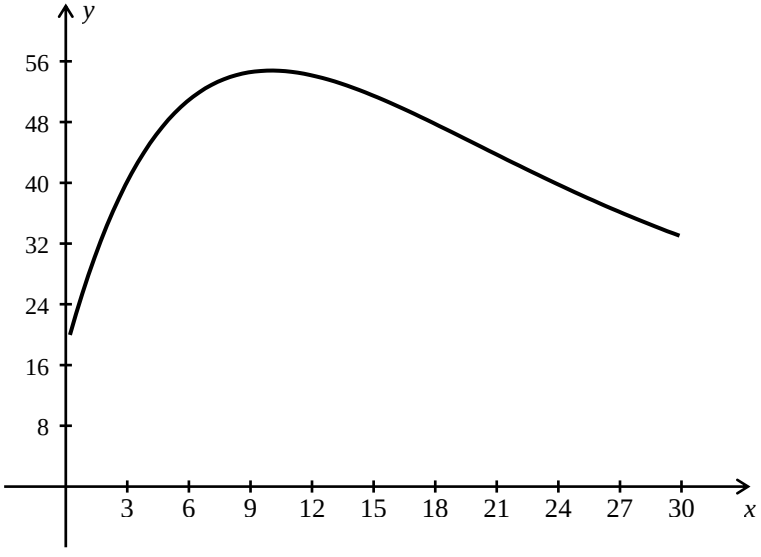
– Notwendige Bedingung: $g''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 20$

– Hinreichende Bedingung: g'' an der Stelle 20 einen Vzw. von – nach +.
20 ist daher lokale Minimumstelle von g'.

– Absolute Extrema: Da 20 die einzige lokale Extremstelle in D ist, handelt es sich dabei auch um die absolute Minimumstelle.
Die stärkste Abnahme von g erfolgt zum Zeitpunkt 20.

Das absolute Maximum von g' liegt an einer der beiden Randstellen: $g'(0) = 10$, $g'(30) = -20 \cdot e^{-3} < 0$.
Die stärkste Zunahme erfolgt also an der Randstelle 0.

1.3 d) Graphische Darstellung des zeitlichen Verlaufs **2,0 Punkte**



1.3 e) Mittlere Feinstaubkonzentration **4,0 Punkte**

$$\overline{g} = \frac{1}{30}\cdot\int_0^{30}(18+10\cdot f(x))dt = \frac{1}{30}\cdot\int_0^{30} g(t)dt = \frac{1}{30}\cdot\left[18\cdot x - 10\cdot\underbrace{(10x+100)\cdot e^{-0{,}1\cdot x}}_{\text{gemäß Angabe für } F(x)}\right]_0^{30}$$

$$= \frac{1}{30}\cdot\left[1540 - 4000\cdot e^{-3}\right] \approx 44{,}7$$

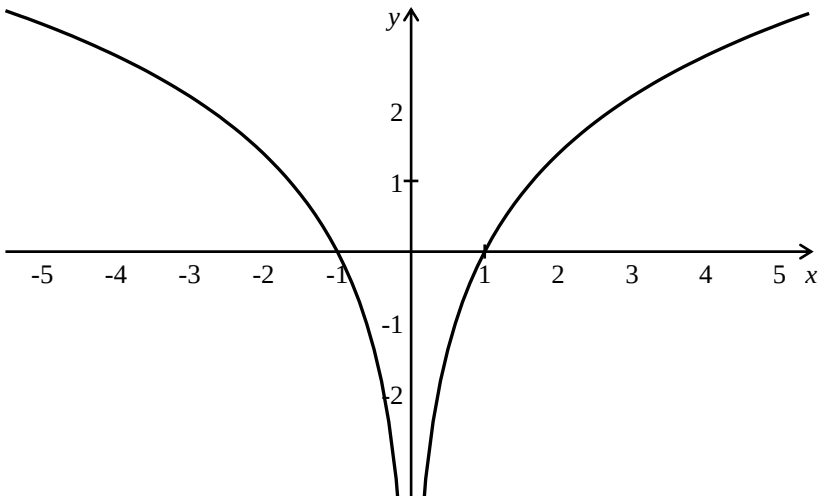
Die mittlere Belastung liegt oberhalb des Grenzwertes.

2. Untersuchung einer Funktionenschar f_a

2.1 Untersuchung der Funktion f **6,0 Punkte**

Betrachtet wird die Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \ln(x^2)$.

- *Definitionsmenge* (0,5 P)
  Bedingung: $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$
  Also: $D = \mathbb{R}^*$
- *Symmetrie* (1,0 P)
  G_f ist symmetrisch zur y-Achse, da $D = \mathbb{R}^*$ symmetrisch ist und für alle $x \in D$ gilt:
  $f(-x) = \ln((-x)^2) = \ln(x^2) = f(x)$.
- *Nullstellen* (1,0 P)
  Bedingung: $\ln(x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$
- *Ableitung* (0,5 P)
  $f'(x) = \frac{1}{x^2}\cdot 2x = \frac{2}{x}$
- *Vorzeichenverhalten von* f' (0,5 P)
  $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$ und $f'(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^-$
- *Monotonieintervalle* (1,0 P)
  $f \nearrow$ in $\mathbb{R}^+$ und $f \searrow$ in $\mathbb{R}^-$.
- *Graph* (1,5 P)



2.2 Eigenschaften der Funktionenschar f_a

Betrachtet wird die Funktionenschar $f_a : D \to \mathbb{R}$ mit $f_a(x) = \ln(x^2 + a)$ mit $a \in \mathbb{R}$.

2.2 a) Maximale Definitionsmenge von f_1 und f_{-1} **3,0 Punkte**

$f_1(x) = \ln(x^2 + 1)$: $D = \mathbb{R}$,
(denn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x^2 + 1 > 0$).

$f_{-1}(x) = \ln(x^2 - 1)$: $D =]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$,
(denn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1$).

2.2 b) Maximale Definitionsmenge von f_a mit $a \in \mathbb{R}^+$ **1,0 Punkte**

Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^+$ gilt: $x^2 + a > 0$.
Daher gilt $D_{max} = \mathbb{R}$ für jede Funktion mit positivem a.

2.2 c) Bestimmung des Parameterwerts **4,5 Punkte**

Graph (1): Nullstelle 3, also: $\ln(3^2 + a) = 0 \Leftrightarrow 9 + a = 1 \Leftrightarrow a = -8$

Graph (2): Nullstelle 0, also: $\ln(0^2 + a) = 0 \Leftrightarrow 0 + a = 1 \Leftrightarrow a = 1$

Graph (3): y-Achsenabschnitt 2, also: $\ln(0 + a) = 2 \Leftrightarrow a = e^2$

2.2 d) Lokale Minima der Funktionen f_a **5,0 Punkte**

- *Ableitung* (1,0 P)
  $f_a'(x) = \frac{1}{x^2 + a} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + a}$

- *Notwendige Bedingung* (2,0 P)
  $f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

  Nur für $a > 0$ gehört die Stelle 0 zur Definitionsmenge D, d.h. nur für $a > 0$ kann es lokale Extrema geben.

- *Hinreichende Bedingung* (1,0 P)
  f_a' hat für $a > 0$ an der Stelle 0 einen Vorzeichenwechsel von – nach +, d.h. die Stelle 0 ist lokale Minimumstelle mit dem Funktionswert $f_a(0) = \ln(0 + a) = \ln(a)$.

  Tiefpunkt: $T(0 \mid \ln(a))$ für $a > 0$

- *Zusätzliche Bedingung* (1,0 P)
  Tiefpunkt unterhalb der x-Achse: $\ln(a) < 0 \Leftrightarrow a < 1$
  Insgesamt muss also gelten: $0 < a < 1$

3. Vollständige Induktion **6,0 Punkte**

Betrachtet wird die Funktion $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-x}$.

Zu zeigen: $f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot (x-n) \cdot \mathrm{e}^{-x}$

Induktionsanfang für n = 1:

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = 1 \cdot \mathrm{e}^{-x} + x \cdot \mathrm{e}^{-x} \cdot (-1) = -(x-1) \cdot \mathrm{e}^{-x} = (-1)^1 \cdot (x-1) \cdot \mathrm{e}^{-x}$$

Induktionsschritt:

a) Voraussetzung: Die Behauptung gelte für eine beliebige Zahl $n \in \mathrm{IN}^*$, d.h.

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot (x-n) \cdot \mathrm{e}^{-x} \ .$$

b) Behauptung: Dann gilt die Behauptung auch für den Nachfolger $n+1$, d.h.

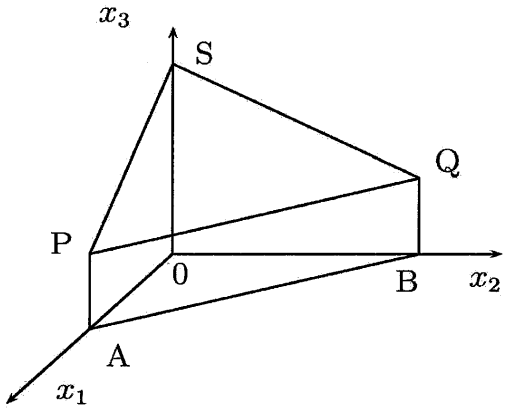
$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot (x-(n+1)) \cdot \mathrm{e}^{-x}$$

c) *Beweis*:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))' \\ &= \left((-1)^n \cdot (x-n) \cdot \mathrm{e}^{-x}\right)' \\ &= (-1)^n \cdot \left(1 \cdot \mathrm{e}^{-x} + (x-n) \cdot \mathrm{e}^{-x} \cdot (-1)\right) \\ &= (-1)^{n+1} \cdot (-1 + x - n) \cdot \mathrm{e}^{-x} \\ &= (-1)^{n+1} \cdot (x-(n+1)) \cdot \mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

Aufgabe 2
ANALYTISCHE GEOMETRIE

In eine Häuserecke wird ein Wintergarten eingepasst mit einer in der x_1-x_2-Ebene liegenden dreieckigen Grundfläche (siehe Abbildung). Die Eckpunkte sind im angegebenen Koordinatensystem $A(6 \mid 0 \mid 0)$, $B(0 \mid 6 \mid 0)$ und der Ursprung O (Längeneinheit 1 m). Die Eckpunkte P, Q und S des Daches liegen senkrecht über A, B bzw. O. Die Kanten AP und BQ haben jeweils eine Länge von 3,0 m; die Kante OS ist 4,5 m lang.



a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte P, Q und S an und stellen Sie eine Parameter- und eine Koordinatengleichung der Ebene auf, in der die Dachfläche liegt.

(Zur Kontrolle: Eine Gleichung der Ebene lautet: $x_1 + x_2 + 4 \cdot x_3 - 18 = 0$)

b) Zur Außenbeschattung des Wintergartens wird eine Markise angebracht, die bei Sonnenschein das Aufheizen des Innenraums verhindern soll. Zur Planung dieser Markise werden der Neigungswinkel der Dachfläche gegenüber der Horizontalen und der Inhalt der Dachfläche benötigt. Berechnen Sie diese Größen.

c) Nach den Empfehlungen der Herstellerfirma sind zur Belüftung mindestens 25 % der Frontfläche $ABQP$ als Fenster- oder Türöffnung notwendig. Berechnen Sie diesen Anteil der Frontfläche.

d) Berechnen Sie den umbauten Raum, d.h. das Volumen des Wintergartens, der modellartig durch den abgebildeten Körper beschrieben wird.

e) Zeigen Sie: Der Punkt $(2 \mid 2 \mid 3{,}5)$ ist der Schwerpunkt des Dreiecks PQS.

Aus Gründen der Stabilität soll im Schwerpunkt der Dachfläche senkrecht zu ihr eine gerade Stütze montiert werden. Berechnen Sie den Auflagepunkt dieser Stütze auf dem Boden des Wintergartens.

f) Im Sommer fällt zu einem bestimmten Zeitpunkt Sonnenlicht parallel zum Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ auf das Dach. Im Punkt $(2 \mid 2 \mid 3{,}5)$ des Dachs trifft ein Lichtstrahl auf und wird reflektiert.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden, längs derer sich der reflektierte Strahl ausbreitet. Spiegeln Sie dazu einen Punkt der Geraden, längs derer sich der einfallende Strahl ausbreitet, an der Dachebene.

Zur Kontrolle: Der Vektor $\begin{pmatrix} 23 \\ 23 \\ 20 \end{pmatrix}$ gibt die Richtung des reflektierten Lichts an.

g) Das Lot auf die Dachebene im Auftreffpunkt des Strahls und der einfallende Strahl bilden den Einfallswinkel. Mit dem reflektierten Strahl bildet das Lot den Reflexionswinkel. Bestätigen Sie in einer Rechnung die Maßgleichheit von Einfalls und Reflexionswinkel.

L ö s u n g e n

a) Eckpunkte und Gleichung der Ebene, in der die Dachfläche liegt **4,0 Punkte**

- *Eckpunkte der Dachfläche*: $P(6\,|\,0\,|\,3)$ (3m über $A(6\,|\,0\,|\,0)$)
  $Q(0\,|\,6\,|\,3)$ (3m über $B(0\,|\,6\,|\,0)$)
  $S(0\,|\,0\,|\,4{,}5)$ (4,5m über $O(0\,|\,0\,|\,0)$)
- *Richtungsvektoren*: $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; wähle $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

  $\overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} = 1{,}5 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; wähle $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- *Parametergleichung der Ebene*: $e_{PQS}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- *Normalenvektor*: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{n}$
- *Normalengleichungen*: $e_{PQS}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} \right] = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 + x_2 + 4 \cdot x_3 - 18 = 0$

b) Neigungswinkel der Dachfläche gegen die Horizontale und Größe **3,0 Punkte**

- *Winkel zwischen Dachfläche und Horizontale (x_1-x_2-Ebene)*:

  Zugehörige Normalenvektoren: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{18}$

  $\overrightarrow{n_{12}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $|\overrightarrow{n_{12}}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$

  $$\cos(\alpha) = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{n_{12}}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{n_{12}}|} = \frac{0 + 0 + 4}{\sqrt{18} \cdot 1} = \frac{4}{3 \cdot \sqrt{2}} \approx 0{,}9428 \quad ; \quad \text{also} \quad \alpha \approx 19{,}47°$$
- *Größe der Dachfläche (Flächeninhalt)*:

  $\mu(A) = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PS}| = \frac{1}{2} \cdot |6\vec{u} \times 1{,}5\vec{v}| = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1{,}5 \cdot |\vec{u} \times \vec{v}|$ (Vektoren aus a))

  $= \frac{9}{2} \cdot |\vec{n}| = \frac{9}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \frac{9}{2} \cdot \sqrt{18} \approx 19{,}09\ (\text{m}^2)$

c) Anteil der Frontfläche **2,0 Punkte**

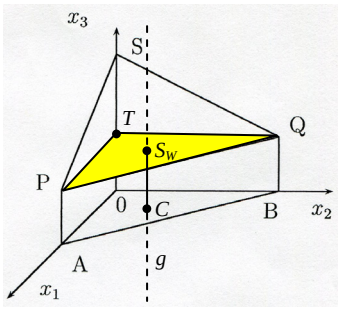
Es gilt: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Rechteckige Frontfläche: $A_{ABQP} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{72} \cdot 3 \approx 25{,}46$ (m^2)

25% von A_{ABQP} sind ungefähr 6,36 (m^2).

d) Volumen des Wintergartens **3,0 Punkte**

Das gesuchte Volumen setzt sich zusammen aus aus dem Volumen des Prismas mit der Oberseite *PQT* und der Pyramide *PQTS*.



Dabei gilt $T(0 \mid 0 \mid 3)$ (gleiche Höhe wie Q)

Es gilt: $V_{ges} = V_{\text{Prisma}} + V_{\text{Pyramide}}$

- *Prisma*: Grundfläche: $G = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|$

  $= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18$ (rechtwinkliges Dreieck)

  Höhe: $h_1 = |\overrightarrow{AP}| = 3$ (vgl. c))

  V_{Prisma} = Grundseite · Höhe = $G \cdot h_1 = 18 \cdot 3 = 54$ (m^2)

- *Pyramide*: Grundfläche: $G = 18$ (wie beim Prisma)

  Höhe: $h_2 = |\overrightarrow{OS}| - |\overrightarrow{TS}| = 4{,}5 - 3 = 1{,}5$

  $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot$ Grundseite · Höhe $= \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_2 = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 1{,}5 = 9$ (m^2)

- *Gesuchtes Volumen*: $V_{ges} = V_{\text{Prisma}} + V_{\text{Pyramide}} = 54 + 9 = 63$ (m^2)

e) Schwerpunkt des Dreiecks *PQS* und Auflagepunkt **4,0 Punkte**

Schwerpunkt der Dachfläche: $\overrightarrow{s_w} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{p} + \vec{q} + \vec{s}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}$; Punkt $S_W(2 \mid 2 \mid 3{,}5)$

Die Stütze ist Teil der Lotgeraden g durch S_W senkrecht zur Dachebene e_{PQS}.

Gleichung von g : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ (vgl. Abbildung in d))

Der gesuchte Auflagepunkt C ist der Schnittpunkt von g mit der x_1-x_2-Ebene (Boden):

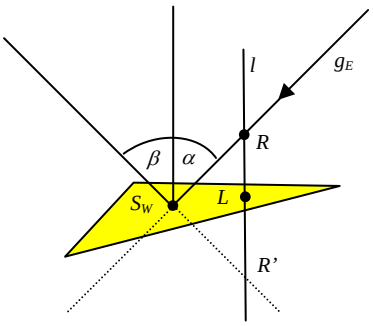
$$x_3 = 0 \Leftrightarrow 3{,}5 + 4\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{7}{8}$$

Auflagepunkt: $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} - \frac{7}{8} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/8 \\ 9/8 \\ 0 \end{pmatrix}$; $C(\frac{9}{8} \mid \frac{9}{8} \mid 0)$

f) Gleichung der Geraden, längs der sich der reflektierte Strahl ausbreitet **7,0 Punkte**

Gegeben sind der Punkt $S_W(2 \mid 2 \mid 3{,}5)$ und die Richtung $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ des Sonnenlichts.

- *Gerade des einfallenden Lichts*: $g_E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$



- *Punkt R von* g_E (oberhalb des Daches):

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7{,}5 \end{pmatrix}$$

(Durch die negative Wahl des Parameters ist im Einklang zum Kontext in der Aufgabenstellung gewährleistet, dass der Punkt *R* oberhalb der Dachfläche liegt. Dies ist aber zur Bestimmung einer Gleichung reflektierten Gerade nicht unbedingt notwendig.)

- *Berechnung des Spiegelpunkts R' von R*:

Lotgerade: $l\colon \vec{x} = \vec{r} + \lambda \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7{,}5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Schnitt von *l* mit Ebene e_{PQS} :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7{,}5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right] - 18 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(1+\lambda) + (1+\lambda) + 4 \cdot (7{,}5 + 4\lambda) - 18 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -\frac{7}{9}$$

Einsetzen dieses Werte in die Gleichung von *l* ergibt den Lotfußpunkt:

$$\vec{l} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7{,}5 \end{pmatrix} - \frac{7}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/9 \\ 2/9 \\ 99/18 \end{pmatrix} \quad ; \quad \text{also } L\left(\tfrac{2}{9} \mid \tfrac{2}{9} \mid \tfrac{99}{18}\right)$$

Für den Spiegelpunkt *R'* folgt:

$$\vec{r'} = 2\vec{l} - \vec{r} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2/9 \\ 2/9 \\ 99/18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/9 \\ -5/9 \\ 23/18 \end{pmatrix} \quad ; \quad \text{also } R'\left(-\tfrac{5}{9} \mid -\tfrac{5}{9} \mid \tfrac{23}{18}\right)$$

- *Richtungsvektor des reflektierten Strahls*:

$$\overrightarrow{R'S_w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5/9 \\ -5/9 \\ 23/18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23/9 \\ 23/9 \\ 20/9 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 23 \\ 23 \\ 20 \end{pmatrix}$$

- *Gerade des reflektierten Lichts*: $g_R\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 23 \\ 23 \\ 20 \end{pmatrix}$

g) Maßgleichheit von Einfalls und Reflexionswinkel **2,0 Punkte**

Einfallswinkel: Winkel zwischen einfallender Gerade g_E und Lotgerade l

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{18}} = \frac{|-14|}{18} = \frac{7}{9} \quad \text{, also } \alpha \approx 38,94°$$

Reflexionswinkel: Winkel zwischen reflektierter Gerade g_R und Lotgerade l

$$\cos(\beta) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 23 \\ 23 \\ 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{1458} \cdot \sqrt{18}} = \frac{126}{\sqrt{1458} \cdot \sqrt{18}} = \frac{7}{9}$$

Damit folgt $\alpha = \beta$.

Aufgabe 3

WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

Der Billardklub „Snooker 93", bestehend aus zwanzig aktiven Mitgliedern, darunter fünf Frauen, plant gegen den Lokalrivalen anzutreten.

1. Für den regelmäßig stattfindenden Wettkampf soll eine Mannschaft mit vier Personen aus den Klubmitgliedern von „Snooker 93" ausgewählt werden.

1.1 Berechnen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, diese Mannschaft zusammenzustellen.

1.2 Nach einem Vorstandsbeschluss soll eine gemischte Mannschaft, bestehend aus zwei Frauen und zwei Männern, gebildet werden.

a) Berechnen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, die gemischte Mannschaft zusammenzustellen.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden jüngsten Vereinsmitglieder Petra und Peter für diese gemischte Mannschaft ausgewählt werden.

2. Zur Vorbereitung auf den Wettkampf wird ein Sondertraining angesetzt.

2.1 Vier Männer und eine Frau fehlen bei diesem Sondertraining. Man wählt ein Vereinsmitglied aus und betrachtet die Merkmale „männlich/weiblich" und „Teilnahme/Nicht-teilnahme am Sondertraining".

a) Erstellen Sie für die beiden Merkmale eine Vierfeldertafel oder ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewähltes Mitglied eine Frau, die am Sondertraining teilgenommen hat?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewähltes Mitglied eine Frau, wenn man weiß, dass es am Sondertraining teilgenommen hat?

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine zufällig ausgewählte Frau am Sondertraining teilgenommen?

e) Zeigen Sie, dass die Merkmale „männlich" und „Teilnahme am Sondertraining" abhängig sind.

2.2 Verändern Sie die Teilnehmerzahlen für das Sondertraining so, dass die im Teil 2.1 e) genannten Merkmale unabhängig sind. Begründen Sie Ihre Angaben.

3. Im Wettkampf gegen den Lokalrivalen spielt jedes der vier ausgewählten Vereinsmitglieder gegen jeden der vier Spieler der gegnerischen Mannschaft.
Durch das Sondertraining konnten sich die Spieler von „Snooker 93" so verbessern, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit in jedem Spiel doppelt so groß ist wie die des Gegners.
Mit dem neunten Sieg einer Mannschaft endet der Wettkampf, andernfalls verläuft der Wettkampf unentschieden.

3.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Wettkampf 9 : 0 für „Snooker 93" endet. Begründen Sie Ihre Rechnung.

3.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass „Snooker 93" den Wettkampf mit 9 : 2 gewinnt.

3.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Wettkampf unentschieden endet.
(Zur Kontrolle: $p = 0{,}07654$)

3.4 Die Spielstärken der beiden Klubs verändern sich in den nächsten Jahren nicht.
Wie viele Wettkämpfe müssen die beiden Klubs mindestens gegeneinander austragen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 80% mindestens ein unentschiedener Kampf vorkommt?

L ö s u n g e n

1. Mannschaft aus 4 Personen für den Club „Snooker 92“

1.1 Anzahl der Möglichkeiten der Möglichkeiten für eine Mannschaft **1,0 Punkte**

$$|\,A\,| = \binom{20}{4} = 4845 \qquad \text{(Auswahl: 4 aus 20)}$$

1.2 Zusammenstellung einer gemischten Mannschaft **3,0 Punkte**

a) *Zahl der Zusammenstellungen einer beliebigen gemischten Mannschaft* (1,0 P)

$$|\,\Omega\,| = \underbrace{\binom{15}{2}}_{\text{2 Männer}} \cdot \underbrace{\binom{5}{2}}_{\text{2 Frauen}} = 1050$$

(Männer: 2 aus 15
Frauen: 2 aus 5)

b) *Wahrscheinlichkeit, dass Petra und Peter mit dabei sind* (2,0 P)

Für die Zahl der Mannschaften, bei denen Petra und Peter dabei sind, ergibt sich:

$$|\,B\,| = \underbrace{\binom{1}{1}}_{\text{Petra}} \cdot \underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{2. Frau}} \cdot \underbrace{\binom{1}{1}}_{\text{Peter}} \cdot \underbrace{\binom{14}{1}}_{\text{2. Mann}} = 56$$

Zugehörige Wahrscheinlichkeit: $P(B) = \dfrac{|\,B\,|}{|\,\Omega\,|} = \dfrac{56}{1050} \approx 5{,}3\%$

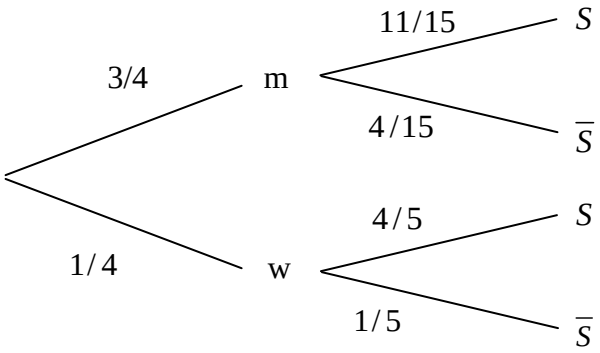
2. Sondertraining zur Wettkampfvorbereitung

Es bedeute: S : Person nimmt am Sondertraining teil.
$\overline{S}$: Person nimmt am Sondertraining nicht teil.
m : männlich
w : weiblich

2.1 Vier Männer und eine Frau fehlen beim Sondertraining.

a) **Vier-Felder-Tafel** *Baumdiagramm* **2,0 Punkte**

	m	w	Σ
S	11	4	15
$\overline{S}$	4	1	5
Σ	15	5	20



b) **Mitglied ist eine Frau, die am Sondertraining teilgenommen hat.** **1,0 Punkte**

Gesucht ist eine „Und-Wahrscheinlichkeit“.

Mit den abgelesen Werten aus der Vierfeldertafel erhält man:

$$P(\text{w} \cap S) = \frac{4}{20} = 20\%$$

Mit den Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades erhält man:

$$P(\text{w} \cap S) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{20} = 20\%$$

c) **Mitglied ist eine Frau, wenn am Sondertraining teilgenommen hat?** **2,0 Punkte**

Gesucht ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit.
Bedingung: Teilnahme am Sondertraining

Die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit kann aus der Vierfeldertafel ablesen werden:

$$P_S(\text{w}) = \frac{|\, w \cap S \,|}{|\, S \,|} = \frac{4}{15} \approx 26{,}7\%$$

Mit den Wahrscheinlichkeiten des Baumdiagramms ergibt sich anhand der Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$P_S(\text{w}) = \frac{P(\text{w} \cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{4}{20}}{\frac{3}{4}\cdot\frac{11}{15} + \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}}$$

$$= \frac{\frac{4}{20}}{\frac{11}{20} + \frac{4}{20}} = \frac{\frac{4}{20}}{\frac{15}{20}} = \frac{4}{15} \approx 26{,}7\%$$

d) **Zufällig ausgewählte Frau hat am Sondertraining teilgenommen.** **2,0 Punkte**

Gesucht ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit.
Bedingung: Eine Frau wird betrachtet.

Die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit kann aus der Vierfeldertafel ablesen werden:

$$P_{\text{w}}(S) = \frac{|\, S \cap w \,|}{|\, w \,|} = \frac{4}{5} = 80\%$$

Aus dem vorgegebenen Baumdiagramm kann ist diese bedingte Wahrscheinlichkeit am zugehörigen Ast direkt ablesbar:

$$P_{\text{w}}(S) = \frac{4}{5} = \frac{P(\text{w} \cap S)}{P(\text{w})} = 80\%$$

Alternative: Verwendung der Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P_{\text{w}}(S) = \frac{P(S \cap w)}{P(w)} = \frac{\frac{4}{20}}{\frac{1}{4}} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

e) **Merkmale „männlich" und „Teilnahme am Sondertraining" sind abhängig.** **2,0 Punkte**

Es gilt: (Werte aus der Vierfeldertafel abgelesen und Wahrscheinlichkeiten gebildet)

- $P(\text{m} \cap S) = \frac{11}{20}$
- $P(\text{m}) \cdot P(S) = \frac{15}{20} \cdot \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$

Damit gilt $P(\text{m} \cap S) \neq P(\text{m}) \cdot P(S)$.
Dies bedeutet, dass die beiden Ereignisse m und S abhängig sind.

2.2 Veränderung der Teilnehmerzahl, so dass Merkmale unabhängig **2,0 Punkte**

Der Anteil der Frauen, die am Sondertraining teilnehmen, beträgt $P(S \,|\, \text{w}) = \frac{4}{5}$ nach 2.1d.
Um denselben Anteil auch bei den Männer zu erreichen, müssen 12 Männer teilnehmen, denn dann gilt auch: $P(S \,|\, \text{m}) = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

(oder: $P(\text{m} \cap S) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ und $P(\text{m}) \cdot P(S) = \frac{15}{20} \cdot \frac{16}{20} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$)

(Andere Zahlen für die Teilnahme am Sondertraining sind auch:

- 3 Frauen und 9 Männer,
- 1 Frau und 3 Männer,
- die Sonderfälle, dass alle am Sondertraining teilnehmen oder niemand teilnimmt.)

3. Wettkampf gegen den Lokalrivalen

Treffer *T*: Sieg von Snooker in einem Spiel

Trefferwahrscheinlichkeit: $p = \frac{2}{3}$.

3.1 9 : 0 für „Snookers 93“ **2,0 Punkte**

Weil es bei jedem Spiel um Sieg oder Niederlage geht und die einzelnen Spiele unabhängig sind, handelt es sich um eine Bernoullikette.

9:0 für Snooker bedeutet, dass Snooker von 9 Spielen alle gewinnt.
Die Kettenlänge beträgt damit $n = 9$.

$$P(\text{9:0 für Snooker}) = P(T = 9) = B(9\,;\,\tfrac{2}{3}\,;\,9) = \binom{9}{9} \cdot (\tfrac{2}{3})^9 \cdot (\tfrac{1}{3})^0 \approx 2{,}6\%$$

3.2 9 : 2 für „Snookers 93“ **2,0 Punkte**

9:2 für Snooker bedeutet, dass Snooker im 11. Spiel den 9. Sieg erringt.
Dies bedeutet, dass Snooker in den ersten 10 Spielen achtmal gewinnt (Bernoulli-Kette der Länge $n = 10$) und dann auch im 11. Spiel gewinnt.

$$P(\text{9:2 für Snooker}) = \underbrace{P(T=8)}_{\text{Spiele 1 bis 10}} \cdot \underbrace{\tfrac{2}{3}}_{\text{Spiel 11}} = B(10\,;\,\tfrac{2}{3}\,;\,8) \cdot \tfrac{2}{3}$$

$$= \binom{10}{8} \cdot (\tfrac{2}{3})^8 \cdot (\tfrac{1}{3})^2 \cdot \tfrac{2}{3} \approx 13{,}0\%$$

3.3 *Unentschieden 8 : 8* **2,0 Punkte**

Das Ergebnis ist 8:8. Dies bedeutet, dass Snooker in 16 Spielen achtmal gewinnt. Die Kettenlänge beträgt damit $n = 16$.

$$P(8:8) = P(T = 8) = B(16\,;\,\tfrac{2}{3}\,;\,8) = \binom{16}{8} \cdot (\tfrac{2}{3})^8 \cdot (\tfrac{1}{3})^8 = 0{,}07654 \approx 7{,}7\%$$

3.4 Berechnung der Kettenlänge **4,0 Punkte**

Y: Anzahl der unentschiedenen Wettkämpfe ; $p = 0{,}07654$; n gesucht

$$\begin{aligned}
& P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) > 0{,}8 \\
\Leftrightarrow\ & 1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}07654^0 \cdot 0{,}92346^n > 0{,}8 \\
\Leftrightarrow\ & 0{,}92346^n < 0{,}2 \\
\Leftrightarrow\ & \ln(0{,}92346^n) < \ln(0{,}2) \qquad | \ \ln \\
\Leftrightarrow\ & n \cdot \ln(0{,}92346) < \ln(0{,}2) \qquad | : \ln(0{,}92346) < 0 \\
\Leftrightarrow\ & n > \frac{\ln(0{,}2)}{\ln(0{,}92346)} \approx 20{,}21
\end{aligned}$$

Die Klubs müssen mindestens 21 Wettkämpfe gegeneinander austragen.

Schriftliche Abiturprüfung 2012

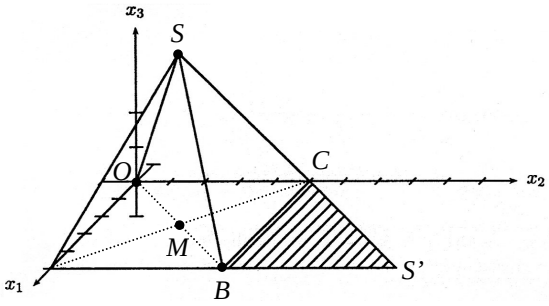
E-Kurs

Nachtermin

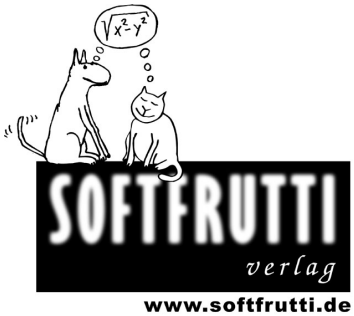
Themenübersicht

- Aufgabe 1: **Analysis**
  - Modellierung: Ausbreitung Grippewelle durch $f(x) = 100 \cdot e^{0{,}3 \cdot x - 0{,}01 \cdot x^2}$
  - Untersuchung der ln-Funktionenschar $g_a(x) = x \cdot (a - \ln(x))$
  - Extremwertaufgabe

- Aufgabe 2: **Analytische Geometrie**
  - Schrägbild Pyramide zeichnen
  - Flächeninhaltsberechnung
  - Schattenpunkt bestimmen
  - Schnitt Gerade-Ebene
  - Innkreisradius



- Aufgabe 3: **Stochastik**
  - Aufstellen und Auswerten einer Vierfeldertafel (mit absoluten Werten)
  - Kombinatorik
  - Bernoulli-Kette



Aufgabe 1
ANALYSIS

1.1 Die Ausbreitung einer Grippewelle in einer Stadt lässt sich modellartig mit Hilfe der Funktionsgleichung

$$f(x) = 100 \cdot e^{0{,}3 \cdot x - 0{,}01 \cdot x^2}$$

beschreiben. Dabei gibt $f(x)$ die Anzahl der Infizierten zum Zeitpunkt x ($x \geq 0$) in Tagen nach Ausbruch der Grippewelle an.

a) Berechnen Sie die Anzahl der Infizierten bei Ausbruch der Grippewelle. Wie entwickelt sich der Krankenstand langfristig?

b) Weisen Sie nach, dass der Krankenstand 15 Tage nach Ausbruch der Grippewelle einen Maximalwert erreicht. Zeigen Sie, dass es sich um ein absolutes Maximum handelt und geben Sie dessen Wert an.

c) Ermitteln Sie, wann die stärkste Zunahme und die stärkste Abnahme der Zahl der Infizierten zu verzeichnen sind.

d) Stellen Sie den zeitlichen Verlauf des Krankenstandes in einem geeigneten Koordinatensystem graphisch dar. Nutzen Sie dabei bisherige Ergebnisse.

1.2 Das Modell aus 1.1 wird folgendermaßen verallgemeinert:

$$f_a(x) = 100 \cdot e^{a \cdot x - 0{,}01 \cdot x^2} \quad (x \geq 0 \,;\, a > 0) \,.$$

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a Zeitpunkt und Höhe des maximalen Krankenstandes.

b) Ermitteln Sie die Gleichung der Kurve, auf der die Hochpunkte der Schar f_a liegen. Interpretieren Sie den Einfluss des Parameters a auf den zeitlichen Verlauf des Krankenstandes.

2. Gegeben ist die Funktionenschar durch

$$g_a : D \to \mathbb{R} \;;\; x \mapsto g_a(x) = x \cdot (a - \ln(x)) \text{ mit } a \in \mathbb{R}^+ .$$

a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge D und untersuchen Sie das Verhalten der Scharkurven an den Rändern von D.

b) Untersuchen Sie die Funktionenschar auf Nullstellen und Extrempunkte und ermitteln Sie das Krümmungsverhalten.

c) Zeichnen Sie die Graphen der Funktion g_1 und ihrer Ableitung in dasselbe Koordinatensystem unter Verwendung bisheriger Ergebnisse.

d) Weisen Sie nach, dass

$$H(x) = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{4}x^2$$

ein Stammfunktionsterm der Funktion h mit $h(x) = x \cdot \ln(x)$ ist, und berechnen Sie die Fläche, die der Graph von g_1 mit der x-Achse über dem Intervall [1 ; 2] einschließt.

e) Auf dem Graph von g_1 liegt der Punkt $P(u \mid v)$ mit $u > 0$. Bestimmen Sie die Koordinaten von P so, dass das Dreieck mit den Eckpunkten O(0 | 0), $Q(u \mid 0)$ und $P(u \mid v)$ den größtmöglichen Flächeninhalt hat. Fertigen Sie zunächst eine Skizze an.

L ö s u n g e n

1.1 Untersuchung der Funktion *f*

Gegeben ist $f(x) = 100 \cdot e^{0{,}3 \cdot x - 0{,}01 \cdot x^2}$.

1.1.a Anzahl der Infizierten beim Ausbruch und langfristige Entwicklung **2,0 Punkte**

Ausbruch: $f(0) = 100 \cdot e^0 = 100$

Langfristig: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (100 \cdot e^{0{,}3 \cdot x - 0{,}01 \cdot x^2}) = 0^+$ (da $0{,}3x - 0{,}01x^2 \to -\infty$ für $x \to +\infty$)

1.1.b Maximalwert nach 15 Tage **6,0 Punkte**

- *Ableitung*: $f'(x) = 100 \cdot e^{0{,}3 \cdot x - 0{,}01 \cdot x^2} \cdot (0{,}3 - 0{,}02 \cdot x)$
- *Untersuchung auf lokale Extrema*:
  - notw. Bed.: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}3 - 0{,}02 \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 15$ (einfach, mit Vzw.)
  - hinr. Bed.: Vorzeichenwechsel für f':

x		15	
$f'(x)$	+	0 mit HP	−

  - Funktionswert: $f(15) \approx 950$, also Hochpunkt $H(15|950)$
- *Untersuchung auf globale Extrema*:

  Da 15 die einzige lokale Extremstelle ist, liegt bei 15 auch das absolute Maximum vor.

Alternative: Begründung des absoluten Maximums durch eine Randbetrachtung

Es gilt: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \underset{1.1.a}{=} 0^+$ und $f(0) = 100$.

Wegen niedrigerer Werte an den Rändern ist es ein absolutes Maximum.

1.1.c Stärkste Zunahme und Abnahme der Zahl der Infizierten **5,0 Punkte**

Gesucht sind die absoluten Extrema der Ableitungsfunktion f'.

- *Zweite Ableitung*:

$$f''(x) = 100 \cdot \left(-0{,}02 \cdot e^{0{,}3 \cdot x - 0{,}01 \cdot x^2} + (0{,}3 - 0{,}02 \cdot x) \cdot e^{0{,}3 \cdot x - 0{,}01 \cdot x^2} \cdot (0{,}3 - 0{,}02 \cdot x) \right)$$

$$= 100 \cdot \left(-0{,}02 + (0{,}3 - 0{,}02 \cdot x)^2 \right) \cdot e^{0{,}3 \cdot x - 0{,}01 \cdot x^2}$$

- *Untersuchung auf lokale Extrema*:
  - notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\Leftrightarrow -0{,}02 + (0{,}3 - 0{,}02 \cdot x)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (0{,}3 - 0{,}02 \cdot x)^2 = 0{,}02$$

$$\Leftrightarrow 0{,}3 - 0{,}02 \cdot x = -\sqrt{0{,}02} \vee 0{,}3 - 0{,}02 \cdot x = \sqrt{0{,}02}$$

$$\Leftrightarrow 0{,}3 + \sqrt{0{,}02} = 0{,}02 \cdot x \vee 0{,}3 - \sqrt{0{,}02} = 0{,}02 \cdot x$$

$$\Leftrightarrow x = 50 \cdot (0{,}3 + \sqrt{0{,}02}) \vee x = 50 \cdot (0{,}3 - \sqrt{0{,}02})$$

$$\Leftrightarrow x \approx 22 \vee x \approx 8$$ (jeweils Nullstelle mit Vzw.)

– hinr. Bed.: Vorzeichentabelle für f''

x		8		22		Testwert:
$f''(x)$	+	0	–	0	+	$f''(0) > 0$

f'' hat an der Stelle 8 ein lokales Maximum, an der Stelle 22 ein lokales Minimum.

- *Untersuchung auf globale Extrema*:

  Funktionswerte von f' an den Stellen 8 und 22:

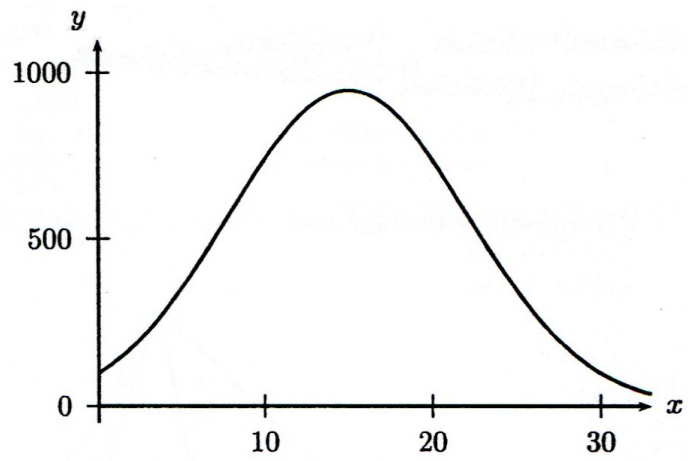
  - $f'(8) \approx 81,4$
  - $f'(22) \approx -81,4$

  Vergleich dieser Werte mit den Randwerten:

  - $f'(0) = 100 \cdot 0,3 \cdot e^0 = 30$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0^-$

  Bei den lokalen Extrema handelt es sich also auch um die absoluten.

1.1.d Graph **2,0 Punkte**



1.2 Betrachtung Funktionenschar f_a

Gegeben ist die Funktionenschar mit $f_a(x) = 100 \cdot e^{a \cdot x - 0,01 \cdot x^2}$ $(x \geq 0\ ;\ a > 0)$.

1.2.a Zeitpunkt und Höhe des maximalen Krankenstandes abhängig von a **3,0 Punkte**

- *Ableitung*:

  $f_a'(x) = 100 \cdot (a - 0,02 \cdot x) \cdot e^{a \cdot x - 0,01 \cdot x^2}$

- *Untersuchung auf lokale Extrema*:
  - notw. Bed.: $f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow a - 0,02 \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 50a$
  - hinr. Bed.: Vorzeichentabelle für f_a'

x		$50a$	
$f_a'(x)$	+	0 mit HP	–

  - Funktionswert: $f_a(50a) = 100 \cdot e^{25a^2}$, also Hochpunkt $H(50a \mid 100 \cdot e^{25a^2})$

- *Untersuchung auf globale Extrema*:

  Da $50a$ die einzige lokale Extremstelle ist, liegt bei $50a$ auch das absolute Maximum vor.

Alternative: Begründung des absoluten Maximums durch eine Randbetrachtung

Lokales Maximum: $f_a(50a) = 100 \cdot e^{25a^2} > 100 \cdot e^0 = 100$
(wegen der Monotonie der e-Funktion)

Es gilt: $\lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x) = 0^+$ und $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 100 \cdot e^0 = 100$.

Wegen niedrigerer Werte an den Rändern ist das lokale auch das absolute Maximum.

1.2.b Ortskurve der Hochpunkte und Interpretation des Parameters *a* **4,0 Punkte**

- *Ortskurve*:

  Es gilt: $x = 50a \Leftrightarrow a = \frac{x}{50}$

  Einsetzen in die Funktionsgleichung von f: $y = 100 \cdot e^{25 \cdot (\frac{x}{50})^2} = 100 \cdot e^{\frac{x^2}{100}}$

- *Auswirkung des Parameters a*:

  Für den Hochpunkt H gilt: $x_H = 50a$ und $y_H = f_a(50a) = 100 \cdot e^{25a^2}$.

  Mit steigendem a wird das Maximum später erreicht. Es wächst aber auch stark an.

2. Betrachtung Funktionenschar g_a

2.a Bestimmung von D_{max} und Grenzwerte **3,0 Punkte**

– *Maximale Definitionsmenge*:
Es gilt $D_{max} = \mathbb{R}^+$ (da ln(x) nur für $x > 0$ definiert ist).

– *Grenzwerte*:

$$\lim_{x \to +\infty} g_a(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\underbrace{x}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{(a - \ln(x))}_{\to -\infty} \right) = -\infty \quad ;$$

$$\lim_{x \to +\infty} g_a(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\underbrace{x}_{\to 0^+} \cdot \underbrace{(a - \ln(x))}_{\to +\infty} \right) = 0^+$$ (Die Potenzfunktion dominiert über die ln-Funktion.)

2.b Nullstellen, Extrempunkte und Krümmungsverhalten **7,0 Punkte**

- *Nullstelle* (2,0 P)

$$g_a(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot (a - \ln(x)) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x = 0}_{\notin D_{max}} \vee \ln(x) = a \Leftrightarrow x = e^a$$

- *Extrempunkte* (3,0 P)

  – Ableitung: $g_a'(x) = 1 \cdot (a - \ln(x)) + x \cdot (-\frac{1}{x}) = a - \ln(x) - 1$

  – Notw. Bed.: $g_a'(x) = 0 \Leftrightarrow a - \ln(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = a - 1 \Leftrightarrow x = e^{a-1}$ (mit Vzw.)

  – Hinr. Bed.: Vorzeichentabelle für g_a':

x		0		e^{a-1}		e^a
$g_a'(x)$	| |		+	0 mit HP		–

  Testwert: $g_a'(e^a) = a - a - 1 = -1 < 0$

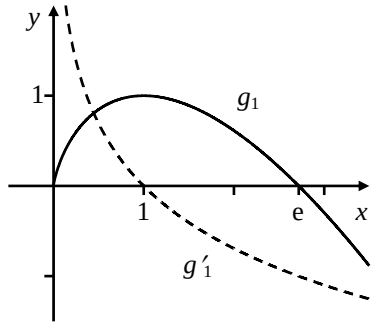
  Wegen $g_a(e^{a-1}) = e^{a-1}$ ist $H(e^{a-1} \mid e^{a-1})$ Hochpunkt und einziger Extrempunkt.

- *Krümmungsverhalten* (2,0 P)

  Zweite Ableitung: $g_a''(x) = -\frac{1}{x}$

  Es gilt $g_a''(x) = -\frac{1}{x} < 0$ für alle $x \in D_{max} = \mathbb{R}^+$, also liegt Rechtskrümmung vor.

2.c **Graphen der Funktion g_1 und ihrer Ableitung** **3,0 Punkte**



$$g_1(x) = x \cdot (1 - \ln(x))$$

$$g_1'(x) = 1 - \ln(x) - 1 = -\ln(x)$$

2.d **Nachweis Stammfunktion und Berechnung eines Flächenmaßes** **7,0 Punkte**

Für die Ableitung der Funktion $H(x) = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{4}x^2$ gilt:

$$H'(x) = (x \cdot \ln(x) + \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x}) - \frac{1}{2}x = (x \cdot \ln(x) + \frac{1}{2}x) - \frac{1}{2}x = x \cdot \ln(x) = h(x).$$

Damit hat $g_1(x) = x \cdot (1 - \ln(x)) = x - x \cdot \ln(x)$ die Stammfunktion

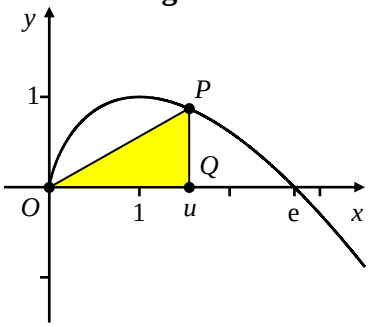
$$G_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - (\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{4}x^2) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x).$$

Für den gesuchten Flächeninhalt folgt damit:

$$\mu(A) = \int_1^2 g_1(x)\,dx = \left[\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2\ln(x)\right]_1^2 = (3 - 2\ln(2)) - (\frac{3}{4} - 0) = \frac{9}{4} - 2\ln(2).$$

(Die Nullstelle von g_1 ist e und liegt außerhalb des Integrationsintervalls.)

2.e **Extremwertaufgabe** **7,0 Punkte**



- *Flächeninhalt*: $A(u) = \frac{1}{2}u \cdot g_1(u) = \frac{1}{2}u \cdot u \cdot (1 - \ln(u)) = \frac{1}{2}u^2 \cdot (1 - \ln(u))$ mit $u > 0$
- *Ableitung*:
$$A'(u) = u \cdot (1 - \ln(u)) + \frac{1}{2}u^2 \cdot (-\frac{1}{u}) = u - u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2}u$$
$$= \frac{1}{2}u - u \cdot \ln(u) = u \cdot (\frac{1}{2} - \ln(u))$$
- *Notw. Bedingung*: $A'(u) = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{u \neq 0} \frac{1}{2} - \ln(u) = 0 \Leftrightarrow u = \sqrt{e}$
- *Hinr. Bedingung*: $u = \sqrt{e}$ ist lokale Maximumstelle, da ein Vorzeichenwechsel von + nach – vorliegt.
- *Randbetrachtung*: Es gilt: $\lim_{u \to 0^+} A(u) = 0$ und $A(e) = 0$ verglichen mit $A(\sqrt{e}) = \frac{e}{4}$.
  Alternative: Da $u = \sqrt{e}$ die einzige lokale Extremstelle ist, handelt es sich auch um die absolute.
- *Ergebnis*: Der maximale Flächeninhalt ist $A(\sqrt{e}) = \frac{e}{4}$.

Aufgabe 2
ANALYTISCHE GEOMETRIE

Gegeben ist eine regelmäßige Pyramide mit der Höhe 5 dm, deren quadratische Grundfläche die Eckpunkte O(0 | 0 | 0), A(5 | 0 | 0), B(5 | 5 | 0) und C(0 | 5 | 0) hat (Koordinaten in dm).

a) Weisen Sie nach, dass der Punkt S(2,5 | 2,5 | 5) die Spitze der Pyramide ist und zeichnen Sie ein Schrägbild der Pyramide im Koordinatensystem. Dabei soll 1 cm im Koordinatensystem einer Länge von 1 dm in der Wirklichkeit entsprechen.

b) Stellen Sie eine Parameter- und eine Koordinatengleichung der Ebene auf, in der die Seitenfläche BCS liegt und berechnen Sie den Neigungswinkel dieser Seitenfläche gegenüber der Horizontalen und deren Flächeninhalt.

Zur Kontrolle: Eine Ebenengleichung lautet $2 \cdot x_2 + x_3 - 10 = 0$

c) Paralleles Licht fällt in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ auf die Pyramide.

Berechnen Sie die Koordinaten des Schattenpunktes der Pyramidenspitze S in der x_1-x_2-Ebene. Zeichnen Sie das Schattenbild der Pyramide in das Koordinatensystem des Aufgabenteils a).

d) Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes P der Seitenfläche BCS**,** in dem ein Bohrer senkrecht zur Seitenfläche angesetzt werden muss, damit er in der Mitte der gegenüber liegenden Grundkante austritt.

e) Zeichnen Sie das Schnittbild der Pyramide durch die Spitze S und die Mitten der Grundkanten $\overline{OA}$ und $\overline{CB}$. Geben Sie die Art des Dreiecks an.

Berechnen Sie den Radius des Inkreises dieses Dreiecks. Betrachten Sie dazu die Winkelhalbierenden des Dreiecks.

L ö s u n g e n

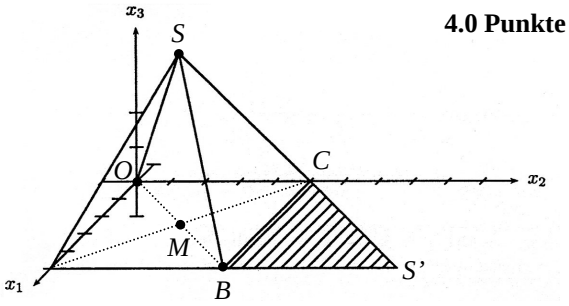
a) Spitze der Pyramide und Schrägbild **4.0 Punkte**

Diagonalenschnittpunkt des Quadrates:

$M(2{,}5 \mid 2{,}5 \mid 0)$ (Mittelpunkt von $\overline{OB}$)

S liegt 5LE oberhalb des Diagonalenschnittpunkts des Quadrates:

Damit folgt: $S(2{,}5 \mid 2{,}5 \mid 5)$



b) Koordinatengleichung, Neigungswinkel und Flächeninhalt **6.5 Punkte**

- *Koordinatengleichung* (3,5 P)

– Richtungsvektoren: $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; wähle $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -2{,}5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad \text{wähle } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

– Parametergleichung der Ebene: $e_{BCS}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

– Normalenvektor: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}$

– Normalengleichungen: $e_{BCS}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \Leftrightarrow 2x_2 + x_3 - 10 = 0$

- *Neigungswinkel der Dachfläche gegen die Horizontale* (1,5 P)

Gesucht ist der Winkel zwischen zwei Ebenen:

- Ebene e_{BCS} mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $|\vec{n}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$
- x_1-x_2-Ebene (Horizontale) mit dem Normalenvektor $\overrightarrow{n_{12}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $|\overrightarrow{n_{12}}| = 1$

Winkel: $\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{n_{12}}}{\left|\vec{n}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_{12}}\right|} = \dfrac{0+0+1}{\sqrt{5} \cdot 1} \approx 0{,}4472$; also $\alpha \approx 63{,}43°$

- *Flächeninhalt* (1,5 P)

$$\mu(A) = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BS}| = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2{,}5 \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{12{,}5}{2} \cdot \sqrt{5} \approx 13{,}98 \text{ (LE}^2\text{)}$$

c) Koordinaten des Schattenpunkts und Schattenbild der Pyramide **4.0 Punkte**

Gerade des einfallenden Lichts: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2{,}5 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt *S'* von *g* mit der x_1-x_2-Ebene: $x_3 = 0 \Leftrightarrow 5 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2{,}5$

Schattenpunkt: $\vec{s}\,' = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2{,}5 \\ 5 \end{pmatrix} + 2{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$; $S'(5 \mid 10 \mid 0)$

Zeichnung: siehe Abbildung in a)

d) Koordinaten des Punktes zum Ansetzen des Bohrers **4.5 Punkte**

- *Gerade durch die Mitte von $\overrightarrow{OA}$ senkrecht zu ΔBCS* (1,5 P)
  - Mittelpunkt der Strecke $\overrightarrow{OA}$: $E(2{,}5 \mid 0 \mid 0)$
  - Richtungsvektor: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (Normalenvektor von e_{BCD})
  - Geradengleichung $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$

- *Schnitt von g mit der Ebene e_{BCS}: $2x_2 + x_3 - 10 = 0$* (3,0 P)

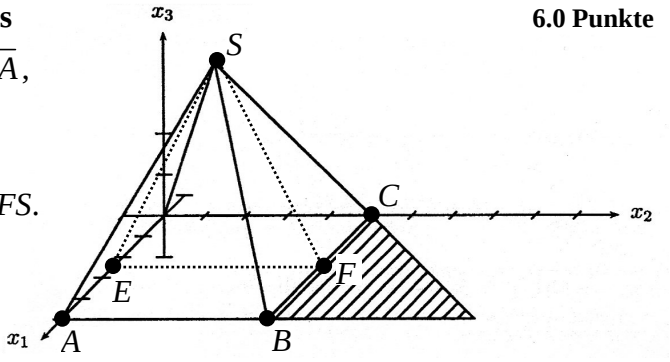
  $0 \cdot 2{,}5 + 2 \cdot (2\lambda) + 1 \cdot \lambda - 10 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$

  $\lambda = 2$ in Gleichung von *g*: $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, also $P(2{,}5 \mid 4 \mid 2)$.

e) Schnittbild und Radius des Inkreises **6.0 Punkte**

Seien *E* die Seitenmitte der Strecke $\overline{OA}$,
F die Mitte der Strecke $\overline{CB}$.

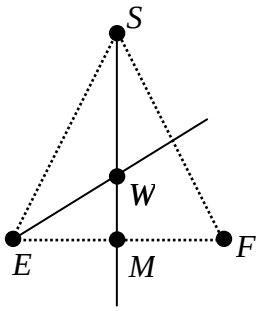
Der Schnitt *S*-*F*-*E* durch die Pyramide ergibt das gleichschenklige Dreieck *EFS*.



Der Inkreismittelpunkt eines Dreiecks ergibt sich als Schnittpunkt je zweier Winkelhalbierenden.

Wir wählen die Winkelhalbierenden durch die Ecke *E* und die durch die Spitze *S*.

Ein Richtungsvektor der Winkelhalbierenden ergibt sich z. B. als Summenvektor von Einheitsvektoren in Richtung der jeweiligen Seiten des Dreiecks.



$D(2{,}5 \mid 2{,}5 \mid 5)$
$E(2{,}5 \mid 0 \mid 0)$
$F(2{,}5 \mid 5 \mid 0)$
$M(0 \mid 2{,}5 \mid 2{,}5)$

- *Winkelhalbierende durch S*:

  Die Winkelhalbierende verläuft (nach Konstruktion) parallel zur x_3-Achse.

  Ein Richtungsvektor ist also z. B. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

  Geradengleichung: $w_S: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2{,}5 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

- *Winkelhalbierende durch E*:

  $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{EF}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

  $\overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2{,}5 \\ -5 \end{pmatrix} = -2{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{ED}^0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

  Richtungsvektor: $\vec{v} = \overrightarrow{EF}^0 + \overrightarrow{ED}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

  Geradengleichung: $w_E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

- *Schnittpunktsberechnung mithilfe des Gleichsetzungsverfahrens*:

$$\begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2{,}5 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}5 \\ 5 \end{pmatrix} = -\lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 = 0 \\ 2{,}5 = (1 + \frac{1}{\sqrt{5}}) \cdot \mu \\ 5 = \lambda + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \mu \end{pmatrix}$$

Aus (2) folgt: $\mu = \frac{2{,}5}{\frac{1}{\sqrt{5}}+1} = \frac{2{,}5\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}$

Einsetzen in (1): $\lambda = 5 - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \mu = 5 - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2{,}5\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1} = 5 - \frac{5}{\sqrt{5}+1}$

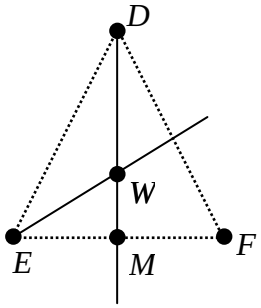
Einsetzen des Wertes für λ liefert den Inkreismittelpunkt:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2{,}5 \\ 5 \end{pmatrix} + (5 - \frac{5}{\sqrt{5}+1}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2{,}5 \\ \frac{5}{\sqrt{5}+1} \end{pmatrix} \quad ; \quad \text{also } W(2{,}5 \mid 2{,}5 \mid \frac{5}{\sqrt{5}+1})$$

- *Radius des Inkreises*

  Für den Radius des Inkreises ergibt sich:

$$r = |\overrightarrow{MW}| = \left| \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2{,}5 \\ \frac{5}{\sqrt{5}+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{5}{\sqrt{5}+1} \end{pmatrix} \right| = \frac{5}{\sqrt{5}+1} \approx 1{,}55$$



Anmerkung:

Macht man für die Winkelhalbierende durch S den Ansatz

$$w_S : \vec{x} = \vec{m} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2{,}5 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

so ist λ ist die x_3-Koordinate des Inkreismittelpunkts und gleichzeitig auch der Radius.

Aufgabe 3

WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

1. Eine Fastfood-Kette hat unter den 61500 Restaurantbesuchern, die den neuen Vegetaria-Burger probiert hatten, eine Meinungsumfrage durchgeführt. Von den Befragten waren 45631 männlich. Die Umfrage ergab, dass 7634 Frauen und insgesamt 23499 der Befragten den neuen Burger gut fanden, während er den übrigen nicht schmeckte.

1.1 Ist der Vegetaria-Burger bei Frauen oder bei Männern beliebter? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

1.2 Erstellen Sie für die beiden Merkmale "**männlich/weiblich**" und "findet den neuen Burger **gut/nicht gut**" eine Vierfeldertafel oder ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm.

Berechnen Sie die sich aus der Umfrage ergebenden Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse. Runden Sie dabei die in Prozent angegebenen Werte auf eine Nachkommastelle.

a) Ein zufällig ausgesuchter Kunde ist männlich und findet den neuen Burger gut.

b) Ein zufällig ausgesuchter Kunde, der den Vegetaria-Burger nicht mag, ist männlich.

c) Eine zufällig ausgesuchte Kundin findet den neuen Burger nicht gut.

1.3 Prüfen Sie, ob auch die Ereignisse "Der Kunde ist männlich" und "Der Kunde mag den Vegetaria-Burger nicht" abhängig sind.

1.4 Um den Absatz zu steigern, bietet die Fastfood-Kette zu jedem gekauften Burger ein Rubbellos an. Auf dem Rubbellos befinden sich in zufälliger Reihenfolge drei Symbole für Cola-Becher, drei Symbole für Pommes-Frites-Tüten und zwei für Burger in einer Reihe.

Man gewinnt einen Cola-Becher, wenn sich auf dem Los drei Cola-Symbole nebeneinander befinden. Man gewinnt eine Tüte Pommes, wenn drei Pommes-Symbole nebeneinander stehen bzw. einen Burger, wenn die beiden Burger-Symbole nebeneinander angeordnet sind.

a) Wie viele verschiedene Lose dieser Art gibt es?

Berechnen Sie unter der Laplaceannahme

b) die Wahrscheinlichkeit, mit einem Los eine Cola zu gewinnen.

c) die Wahrscheinlichkeit, mit einem Los eine Cola, eine Tüte Pommes und einen Burger zu gewinnen.

2. Die Herstellerfirma des Vegetaria-Burgers produziert auch die Hähnchenburger der Fastfood-Kette. Trotz strikter Trennung der Produktionsabläufe enthalten 2 Prozent der Vegetaria-Burger Spuren von Hähnchenfleisch.

2.1 Brigitte hat in den letzten Wochen sieben Vegetaria-Burger gegessen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Brigitte dabei

a) genau einen Burger gegessen hat, der Fleisch enthielt,

b) mehr als einen Burger gegessen hat, der Fleisch enthielt.

2.2 Ein anderer Liebhaber des Vegetaria-Burgers befürchtet, dass er mit mehr als 99%-tiger Sicherheit mindestens einen Burger gegessen hat, der Fleisch enthielt. Berechnen Sie, unter der Annahme, dass seine Behauptung zutrifft, die Mindestanzahl der Burger, die er gegessen haben müsste.

2.3 Die von der Herstellerfirma gelieferten Kartons mit jeweils 500 Vegetaria-Burgern werden von der Fastfood-Kette auf folgende Weise überprüft. Bis zu zehn Burger werden aus jedem Karton genommen und auf Verunreinigungen untersucht.

Hat man zwei verunreinigte Burger gefunden, beendet man die Entnahme und lässt den ganzen Karton zurückgehen; andernfalls benutzt man den Karton. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein zweiter verunreinigter Burger erst bei der zehnten Entnahme entdeckt?

L ö s u n g e n

1. Fastfood-Kette

1.1 Vegetarier-Burger – bei Frauen oder Männern beliebter **2.0 Punkte**

Es bedeute: G : gut mit $|\mathrm{G}| = 23\,499$

$\overline{G}$: nicht gut

m : männlich mit $|\mathrm{m}| = 45\,631$

w : weiblich mit $|\mathrm{w}| = 61\,500 - 45\,631 = 15\,869$

Weiter gilt: $|\mathrm{G} \cap \mathrm{w}| = 7\,624$ und $|\mathrm{G} \cap \mathrm{m}| = 23\,499 - 7\,624 = 15\,875$.

Dann ist: $P_{\mathrm{w}}(G) = \frac{|G \cap \mathrm{w}|}{|\mathrm{w}|} = \frac{7634}{15869} \approx 0{,}481$ und

$$P_{\mathrm{m}}(G) = \frac{|G \cap \mathrm{m}|}{|\mathrm{m}|} = \frac{15875}{45631} \approx 0{,}348 \ .$$

Der Burger ist bei Frauen beliebter.

1.2 Vier-Felder-Tafel und Berechnung von Wahrscheinlichkeiten **2.0 Punkte**

	m	w	Σ
G	15 865	***7 634***	***23 499***
$\overline{G}$	29 766	8 235	38 001
Σ	***45 631***	15 869	***61 500***

a) **Kunde ist männlich und findet den neuen Burger gut.** **1.0 Punkte**

$P(A) = P(\mathrm{m} \cap G) = \frac{15865}{61500} \approx 25{,}8\%$

b) **Kunde, der den Vegetaria-Burger nicht mag, ist männlich.** **1.0 Punkte**

Bedingung: $\overline{G}$: nicht gut

$P(B) = P_{\overline{\mathrm{G}}}(\mathrm{m}) = \frac{29766}{38001} \approx 78{,}3\%$

c) **Kundin findet den neuen Burger nicht gut.** **1.0 Punkte**

Bedingung: w: weiblich

$P(C) = P_{\mathrm{w}}(\overline{G}) = \frac{8235}{15869} \approx 51{,}9\%$

1.3 Prüfung auf Unabhängigkeit **2.0 Punkte**

Es gilt: $P(m) \cdot P(\overline{G}) = \frac{45631}{61500} \cdot \frac{38001}{61500} \approx 0{,}458$

$$P(m \cap \overline{G}) = \frac{29766}{61500} \approx 0{,}484$$

Die Ereignisse sind damit abhängig.

1.4 Rubbellose

a) **Anzahl der verschiedenen Lose** **2.0 Punkte**

Anzahl: $|\Omega| = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{3 Cola}\\ \text{aus 8}}}{\binom{8}{3}} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \text{3 Pommes}\\ \text{aus noch 5}}}{\binom{5}{3}} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \text{2 Burger}\\ \text{aus noch 2}}}{\binom{2}{2}} = 56 \cdot 10 \cdot 1 = 560$

b) **Wahrscheinlichkeit „3 Cola nebeneinander“** **2.0 Punkte**

B: „3 Cola nebeneinander“

Anzahl: $|B| = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{6 Positionen}\\ \text{für 3 Cola}}}{6} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \text{3 Pommes}\\ \text{aus noch 5}}}{\binom{5}{3}} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \text{2 Burger}\\ \text{aus noch 2}}}{\binom{2}{2}} = 6 \cdot 10 \cdot 1 = 60$

Wahrscheinlichkeit: $P(\text{„Cola“}) = P(B) = \frac{60}{560} \approx 10{,}7\%$

c) **Wahrscheinlichkeit, die 3 Blöcke gleicher Symbole anzuordnen** **2.0 Punkte**

C: „Cola, Pommes, Burger nebeneinander“

Anzahl: Es gibt 3! = 6 Möglichkeiten, die drei Blöcke zu vertauschen.

$P(\text{„Cola, Pommes, Burger“}) = P(C) = \frac{6}{560} \approx 1{,}1\%$

2. Produktion von Hähnchenburgern

2.1 Brigitte isst Vegetaria-Burger.

Interpretation als Bernoulli-Kette der Länge 7

Treffer T: Vegetarier-Burger enthält Spuren von Hähnchenfleisch mit $p = 0{,}02$

a) **Wahrscheinlichkeit für genau einen Burger, der Fleisch enthielt.** **1.0 Punkte**

$$P(A) = P(T = 1) = \binom{7}{1} \cdot 0{,}02^1 \cdot 0{,}98^6 \approx 12{,}4\%$$

b) **Wahrscheinlichkeit für mehr als einen Burger, der Fleisch enthielt.** **2.0 Punkte**

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(T = 0) - P(T = 1)$$

$$= 1 - \binom{7}{0} \cdot 0{,}02^0 \cdot 0{,}98^7 - 0{,}124 = 1 - 0{,}868 - 0{,}124 \approx 0{,}8\%$$

2.2 Berechnung der Kettenlänge **4.0 Punkte**

$$\begin{aligned}
P(T \geq 1) > 0{,}99 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - P(T = 0) > 0{,}99 \\
&\Leftrightarrow \quad -P(T = 0) > -0{,}01 \quad | \cdot (-1) \\
&\Leftrightarrow \quad P(T = 0) < 0{,}01 \\
&\Leftrightarrow \quad \binom{n}{0} \cdot 0{,}02^0 \cdot 0{,}98^n < 0{,}01 \\
&\Leftrightarrow \quad 0{,}98^n < 0{,}01 \quad | \ln \\
&\Leftrightarrow \quad n \cdot \ln(0{,}98) < \ln(0{,}01) \quad | : \ln(0{,}98) < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad n > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}98)} \approx 227{,}9
\end{aligned}$$

Sie müsste mindestens 228 Burger gegessen haben.

2.3 Prüfung von Kartons mit Vegetaria-Burgern **3.0 Punkte**

Ansatz: – Bei den ersten 9 Burgern befindet sich ein verunreinigter Burger.
– Der 10. Burger ist verunreinigt.

A: Ein verunreinigter Burger bei der Entnahme der ersten neun Burger
Treffer *T*: verunreinigter Burger
Bernoulli-Kette der Länge $n = 9$ mit Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}02$

$$P(A) = P(T = 1) = \binom{9}{1} \cdot 0{,}02^1 \cdot 0{,}98^8 \approx 0{,}1531$$

B: Zweiter verunreinigter Burger bei der 10. Entnahme
$P(B) = 0{,}02$

$P(\text{„2. Fleischburger bei 10. Entnahme“}) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}1531 \cdot 0{,}02 \approx 0{,}3\%$

Schriftliche Abiturprüfung 2013

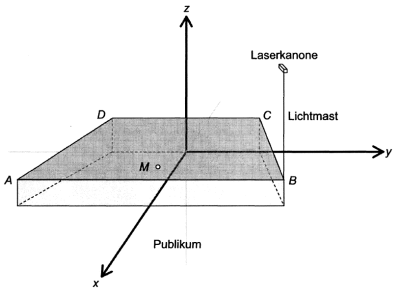
E-Kurs

Haupttermin

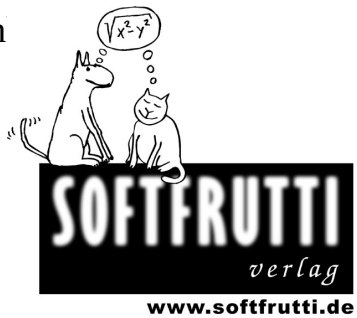
Themenübersicht

- Aufgabe 1: **Analysis**
  - Untersuchung der gebrochenrationalen Funktion $f(x)=\frac{4x^2-1}{x-1}$
  - Übergang zur Funktionenschar $f_a(x)=\frac{a\cdot x^2-1}{x-1}$
  - Zuordnung von Graphen zu Funktionen der Schar
  - Betrachtung von Rotationskörpern zur Funktion $g(x) = \sqrt{9-(x-3)^2}$

- Aufgabe 2: **Analytische Geometrie**
  - Flächeninhalt eines Trapezes
  - Umkreismittelpunkt
  - Schnitt einer Ebene mit einer Geraden
  - Winkel zwischen zwei Ebenen
  - Abstand Punkt-Gerade



- Aufgabe 3: **Stochastik**
  - Aufstellen und Auswerten einer Vierfeldertafel (mit absoluten Werten)
  - Kombinatorische Berechnung von Wahrscheinlich
  - Bernoulli-Kette



Aufgabe 1
ANALYSIS

1.1 Gegeben ist die Funktion $f: D_{\max} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{4x^2 - 1}{x - 1}$.

1.1.1 Geben Sie die maximale Definitionsmenge der Funktion *f* an und berechnen Sie die beiden Nullstellen.

Zeigen Sie, dass der Funktionsterm in der Form $4 \cdot x + 4 + \frac{3}{x-1}$ dargestellt werden kann.

1.1.2 Der Graph der Funktion *f* schließt mit der *x*-Achse eine Fläche ein. Berechnen Sie deren Inhalt.

1.1.3 Der Graph der Funktion *f* wird um 1 Längeneinheit in negative *x*-Richtung und um 8 Längeneinheiten in negative *y* -Richtung verschoben.

1.1.3.1 Zeigen Sie, dass der neue Graph die Gleichung $y = 4 \cdot x + \frac{3}{x}$ hat.

1.1.3.2 Untersuchen Sie den neuen Graphen auf einfache Symmetrie.

1.2 Die Funktion *f* aus 1.1 gehört zu einer Funktionenschar, die gegeben ist durch

$$f_a: D_{\max} \to \mathbb{R} \text{ mit } f_a(x) = \frac{a \cdot x^2 - 1}{x - 1} \text{ mit } a \in \mathbb{R}_0^+ .$$

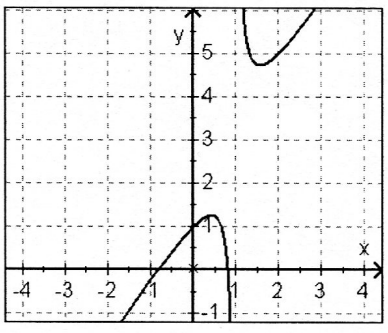
1.2.1 Bestimmen Sie in Abhängigkeit von *a* die maximale Definitionsmenge von f_a und die Art der Definitionslücke. Zeichnen Sie den Graph von f_1.

1.2.2 Zeigen Sie, dass die Geraden $y = a \cdot x + a$ Asymptoten der Funktionen f_a sind und dass diese Geraden genau einen Punkt *S* gemeinsam haben.

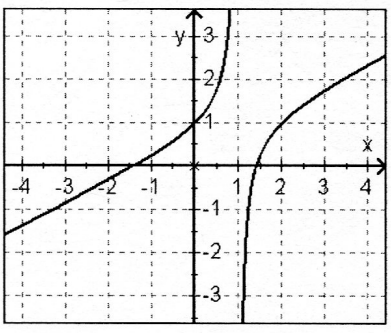
1.2.3 Zeigen Sie, dass für die erste Ableitung von f_a gilt: $f_a'(x) = \frac{a \cdot x^2 - 2 \cdot a \cdot x + 1}{(x-1)^2}$

1.2.4 Zeigen Sie, dass die Funktionen f_a nur für $a > 1$ waagerechte Tangenten besitzen.

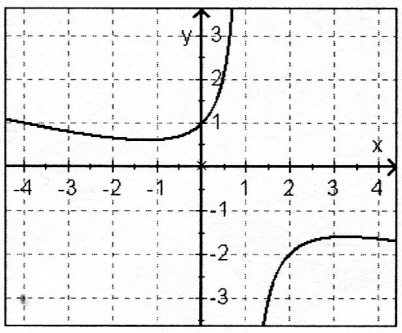
1.2.5 Ordnen Sie die Parameterwerte $a = 0{,}5$ bzw. $a = 1{,}5$ zweien der unten abgebildeten Graphen passend zu.
Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie jeweils beschreiben, wie zwei charakteristische Eigenschaften des Graphen von f_a sich beim Übergang von $a < 1$ zu $a > 1$ ändern.



Graph 1



Graph 2



Graph 3

1.3 Gegeben ist die Funktion $g : [0 ; 6] \to \mathbb{R} ;\ x \mapsto \sqrt{9-(x-3)^2}$.

1.3.1 Erstellen Sie eine Wertetabelle und zeichnen Sie den Graphen der Funktion *g*.

Zeigen Sie anhand einer Rechnung, dass alle Punkte des Graphen *g* denselben Abstand vom Punkt *M*(3 | 0) haben.

1.3.2 Die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion *g* und der *x*-Achse rotiert über dem Intervall [0 ; *h*] um die *x*-Achse (wobei $0 < h \leq 6$ gilt) und erzeugt so einen Rotationskörper.

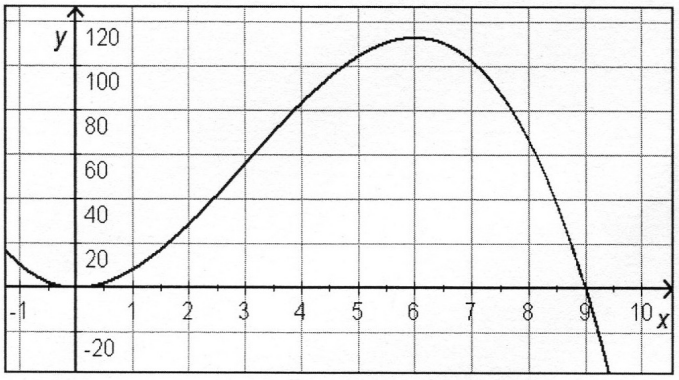
1.3.2.1 Berechnen Sie das Volumen dieses Rotationskörpers für $h = 6$.

1.3.2.2 Beschreiben Sie die Form dieses Rotationskörpers in Abhängigkeit von *h* für $0 < h < 6$.

1.3.2.3 Bestimmen Sie mit Hilfe der Integralrechnung eine Formel für das Volumen des Rotationskörpers in Abhängigkeit von *h*.

1.3.3 Der nachstehende Graph gehört zur Funktion *V*: $\mathbb{R} \to \mathbb{R} ;\ x \mapsto \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot x^2 \cdot (9 - x)$.

Über dem Intervall [0 ; 6] beschreibt *V* das Füllvolumen eines Kugeltanks (siehe Foto) mit dem Innendurchmesser 6 Längeneinheiten in Abhängigkeit von der Füllhöhe *x* .



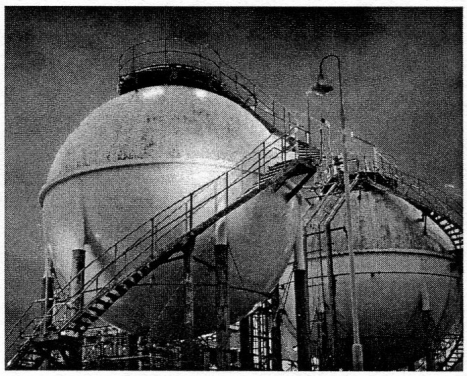


Foto: mmmx / fotolia

1.3.3.1 Berechnen Sie den Wendepunkt *W* der Funktion *V* mit Hilfe der Differentialrechnung.

1.3.3.2 Interpretieren Sie die Lage von *W* und den Verlauf des Graphen von *V* bezüglich *W* unter Bezugnahme auf die Form des Kugeltanks.

L ö s u n g e n

1.1 Funktion *f*

Gegeben ist die Funktion $f: D_{\max} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{4x^2 - 1}{x - 1}$.

1.1.1 Definitionsmenge und Nullstellen **4,0 Punkte**

- Maximale Definitionsmenge: $D_{\max} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ (1 ist Nullstelle des Nennerpolynoms)
- Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{1}{2}$
- Veränderte Darstellung des Funktionsterms:

$$4 \cdot x + 4 + \frac{3}{x-1} = \frac{(4x+4)(x-1)+3}{x-1} = \frac{4x^2 - 4 + 3}{x-1} = \frac{4x^2 - 1}{x-1} = f(x)$$

Alternative: Polynomdivision

$$(4x^2 - 1) : (x - 1) = 4 \cdot x + 4 + \frac{3}{x-1}$$

1.1.2 Inhalt der Fläche mit der *x*-Achse **4,5 Punkte**

Aus 1.1.1 ergeben sich die Integrationsgrenzen – 0,5 und + 0,5.

$$\mu(A) = \int_{-0,5}^{+0,5} f(x)\, dx$$

$$= \int_{-0,5}^{+0,5} \left(4 \cdot x + 4 + \frac{3}{x-1}\right) dx$$

(Term nach Polynomdivision zur Bestimmung der Stammfunktion verwenden!)

$$= \left[2 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 3 \cdot \ln|x-1|\right]_{-0,5}^{+0,5}$$

$$= (0{,}5+2+3\ln(0{,}5)) - (0{,}5-2+3\ln(1{,}5)) \approx 0{,}704$$

Der Flächeninhalt beträgt etwa 0,7 FE.

1.1.3.1 Funktionsgleichung des verschobenen Graphen **2,0 Punkte**

Einer Verschiebung um 1 in negative *x*-Richtung entspricht der Übergang $x \to x + 1$ im Funktionsterm.

$$g(x) = \underbrace{f(x+1)}_{\substack{\text{Verschiebung} \\ \text{in } x\text{-Richtung}}} \quad \underbrace{-\ 8}_{\substack{\text{Verschiebung} \\ \text{in } y\text{-Richtung}}}$$

$$= \left(4 \cdot (x+1) + 4 + \frac{3}{(x+1)-1}\right) - 8$$

$$= 4x + 4 + 4 + \frac{3}{x} - 8$$

$$= 4x + \frac{3}{x}$$

1.1.3.2 Symmetrie des verschobenen Graphen **2,5 Punkte**

- Die Definitionsmenge $D_{\max} = \mathbb{R}^*$ ist symmetrisch zum Ursprung O.
- Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}^*$: $g(-x) = 4(-x) + \frac{3}{(-x)} = -(4x + \frac{3}{x}) = -g(x)$.

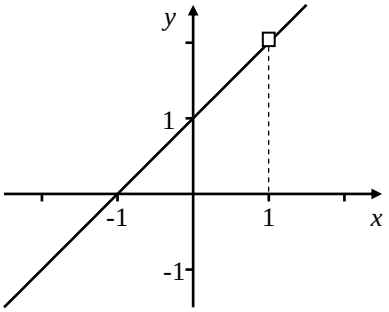
Somit ist der verschobene Graph symmetrisch zum Ursprung.

1.2 Funktionenschar f_a

Gegeben ist die Funktionenschar $f_a : D_{max} \to \mathbb{R}$ mit $f_a(x) = \frac{a \cdot x^2 - 1}{x - 1}$ mit $a \in \mathbb{R}_0^+$.

1.2.1 Definitionsmenge, Art der Definitionslücke und Graph **4,5 Punkte**

- *Maximale Definitionsmenge* (0,5 P)
  Es gilt: $D_{max} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ (hängt nicht von a ab.)
- *Charakterisierung der Definitionslücke 1* (3,0 P)
  Es ist zu prüfen, ob es sich um eine Polstelle oder eine behebbare Lücke handelt.
  Dazu ist zu untersuchen, für welchen Wert von a die Stelle 1 auch Nullstelle des Zählerpolynoms ist:
  $$a \cdot 1^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1 .$$
  Dies bedeutet:
  - Für $a = 1$ ergibt sich $f_1(x) = x + 1$ (mit 1 als stetig behebbarer Lücke).
  - Für $a \neq 1$ ist 1 eine Polstelle (mit Vorzeichenwechsel).
- *Graph von* f_1 (1,0 P)



1.2.2 Asymptote und genau ein gemeinsamer Punkt aller Asymptoten **4,5 Punkte**

- *Asymptote* (2,5 P)
  Eine Polynomdivision ergibt:
  $$\begin{array}{l} (a\,x^2 \quad\quad - 1) \;:\; (x - 1) = a\,x + a + \frac{a-1}{x-1} \\ \underline{-\,(a\,x^2 - a\,x)} \\ \quad\quad a\,x - 1 \\ \quad \underline{-\,(a\,x - a)} \\ \quad\quad\quad a - 1 \end{array}$$
  Gleichung der Asymptote: $y = a \cdot x + a$
- *Genau ein gemeinsamer Punkt aller Asymptoten* (2,0 P)
  Ansatz: Asymptoten $y = a \cdot x + a$ und $y = b \cdot x + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ und $a \neq b$.
  Schnittbedingung:
  $$\begin{array}{rll} a \cdot x + a = b \cdot x + b & \Leftrightarrow & a \cdot x - b \cdot x = -a + b \\ & \Leftrightarrow & (a - b) \cdot x = -(a - b) \quad | : (a - b) \neq 0 \\ & \Leftrightarrow & x = -1 \qquad \text{(unabh. von } a,b\text{)} \end{array}$$
  Alle Geraden schneiden sich an der Stelle –1 im Punkt $S(-1 \mid 0)$.

1.2.3 Erste Ableitung **3,0 Punkte**

$$f_a'(x) = \frac{(x-1) \cdot 2ax - (ax^2 - 1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2ax^2 - 2ax - ax^2 + 1}{(x-1)^2} = \frac{ax^2 - 2ax + 1}{(x-1)^2}$$

Alternative: Ableitung des Funktionsterms $f_a(x) = a\,x + a + \frac{a-1}{x-1}$ aus dem Aufgabenteil 1.2.2 und Umformung in die angegebene Darstellung.

1.2.4 Stellen mit waagerechter Tangente **4,5 Punkte**

Bedingung: $f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow ax^2 - 2ax + 1 = 0$ (mit $a \geq 0$)

Für $a = 0$ ergibt sich die unerfüllbare Aussage $1 = 0$. In diesem Fall gibt es keine waagerechte Tangente.

Im Folgenden sei $a > 0$ vorausgesetzt.

$$\begin{aligned} f_a'(x) = 0 &\Leftrightarrow ax^2 - 2ax + 1 = 0 \quad | : a \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + \frac{1}{a} = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 1 - \frac{1}{a} \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 - \frac{1}{a} \end{aligned}$$

Es gibt nur Lösungen für: $1 - \frac{1}{a} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{a} \Leftrightarrow a \geq 1 \quad (a \in \mathbb{R}_0^+)$

Für $a = 1$ ergibt sich allerdings als Lösung $x = 1 \notin D_{\max}$.

Insgesamt folgt, dass es nur für $a > 1$ waagerechte Tangenten gibt.

1.2.5 Zuordnung **4,0 Punkte**

Als passende Zuordnung der angegebenen Graphen zu den Parameterwerten $a = 0{,}5$ und $a = 1{,}5$ ergibt sich:

- Graph 1 : $a = 1{,}5$
  schiefe Asymptote mit positiver Steigung sowie zwei Stellen mit waagerechter Tangente.
  Somit: $a > 0$ und $a > 1$; es verbleibt nur $a = 1{,}5$.
- Graph 2 : $a = 0{,}5$
  schiefe Asymptote mit positiver Steigung, aber keine Stelle mit waagerechter Tangente.
  Somit: $0 < a < 1$; es verbleibt nur $a = 0{,}5$.
- Graph 3 : kein Wert von a
  schiefe Asymptote mit negativer Steigung.
  Dieser Graph scheidet somit aus.

Mögliche Änderungen beim Übergang von $a < 1$ zu $a > 1$:

- Annäherungsverhalten an die schiefe Asymptote

  Für $x \to -\infty$ Wechsel der Annäherung von „von oben“ zu „von unten“.

  Für $x \to +\infty$ Wechsel der Annäherung von „von unten“ zu „von oben“.

- Vorzeichenwechsel an der Polstelle 1

  Der Vorzeichenwechsel ändert von „von + nach –„ zu „von – nach +“.

- Anzahl der waagerechten Tangenten bzw. der lokalen Extrema.

  Die Anzahl wechselt von 0 zu 2.

- Krümmungsverhalten

  Die Krümmungsart in den Krümmungsintervallen $]-\infty\,;\,1[$ und $]1\,;\,+\infty\,[$ wechselt von Linkskrümmung zu Rechtskrümmung bzw. von Rechtskrümmung zu Linkskrümmung.

1.3 Kreis und Kugelkappe / Kugeltank

Gegeben ist die Funktion $g : [0 ; 6] \to \mathbb{R} ;\ x \mapsto \sqrt{9-(x-3)^2}$.

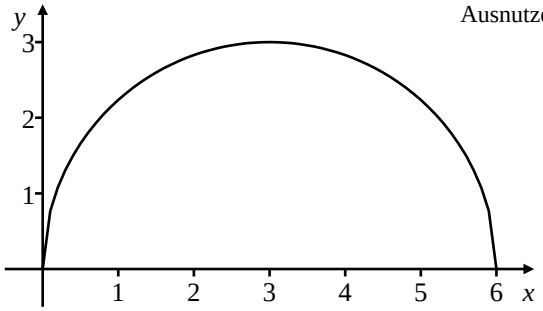
1.3.1 Halbkreis **4,0 Punkte**

- *Wertetabelle*: (Werte teilweise gerundet) (1,0 P)

x	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
$g(x)$	0,0	1,7	2,2	2,6	2,8	3,0	2,8	2,6	2,2	1,7	0,0

Ausnutzen der Achsensymmetrie zu $x = 3$

- *Graph* (1,0 P)



Der Graph ist ein Halbkreis mit dem Mittelpunkt $M(3 \mid 0)$ und und dem Radius 3.

- *Abstand eines Punktes $P(x \mid g(x))$ von $M(3 \mid 0)$* (2,0 P)

$$d(P ; M) = \sqrt{(3-x)^2+(0-g(x))^2} = \sqrt{(3-x)^2+9-(x-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

1.3.2 Rotationskörper um die x-Achse

1.3.2.1 Volumen für $h = 6$ **1,0 Punkte**

Für $h = 6$ ergibt sich als Rotationskörper eine Kugel mit dem Durchmesser 6 bzw. dem Radius 3.

Volumen: $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi \approx 113{,}10$ (VE)

1.3.2.2 Form für $0 < h < 6$ **1,0 Punkte**

Der Rotationskörper ist eine Kugelkappe für $0 < h < 6$.

1.3.2.3 Volumen für allgemeinen Wert von h **4,5 Punkte**

$$V(h) = \pi \cdot \int_0^h (g(x))^2\,dx = \pi \cdot \int_0^h (9-(x-3)^2)dx = \pi \cdot \int_0^h (9-(x^2-6x+9))dx$$

$$= \pi \cdot \int_0^h (6x-x^2)dx = \pi \cdot \left[3x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^h = \pi \cdot \left[3h^2-\frac{1}{3}h^3\right] = \frac{1}{3}\pi \cdot h^2 \cdot (9-h)$$

1.3.3 Wendepunkt der Funktion V

1.3.3.1 Wendepunktsberechnung **4,0 Punkte**

- Volumenfunktion: $V(x) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot x^2 \cdot (9-x) = \pi \cdot (3x^2 - \frac{1}{3}x^3)$
- Ableitungen: $V'(x) = \pi \cdot (6x - x^2)$

  $V''(x) = \pi \cdot (6 - 2x)$

  $V'''(x) = \pi \cdot (-2) = -2\pi$
- Notwendige Bedingung: $V''(x) = 0 \Leftrightarrow 6 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 3$
- Hinreichende Bedingung: $V'''(3) = -2\pi \neq 0$

Daher liegt der Wendepunkt $W(3 \mid 18\pi)$ vor.

1.3.2.2 Interpretation der Lage des Wendepunkts **2,0 Punkte**

Am Wendpunkt *W* ist der Kugeltank beim halben Durchmesser als Füllhöhe halb voll (vergleiche mit dem Ergebnis von 1.3.3.1).

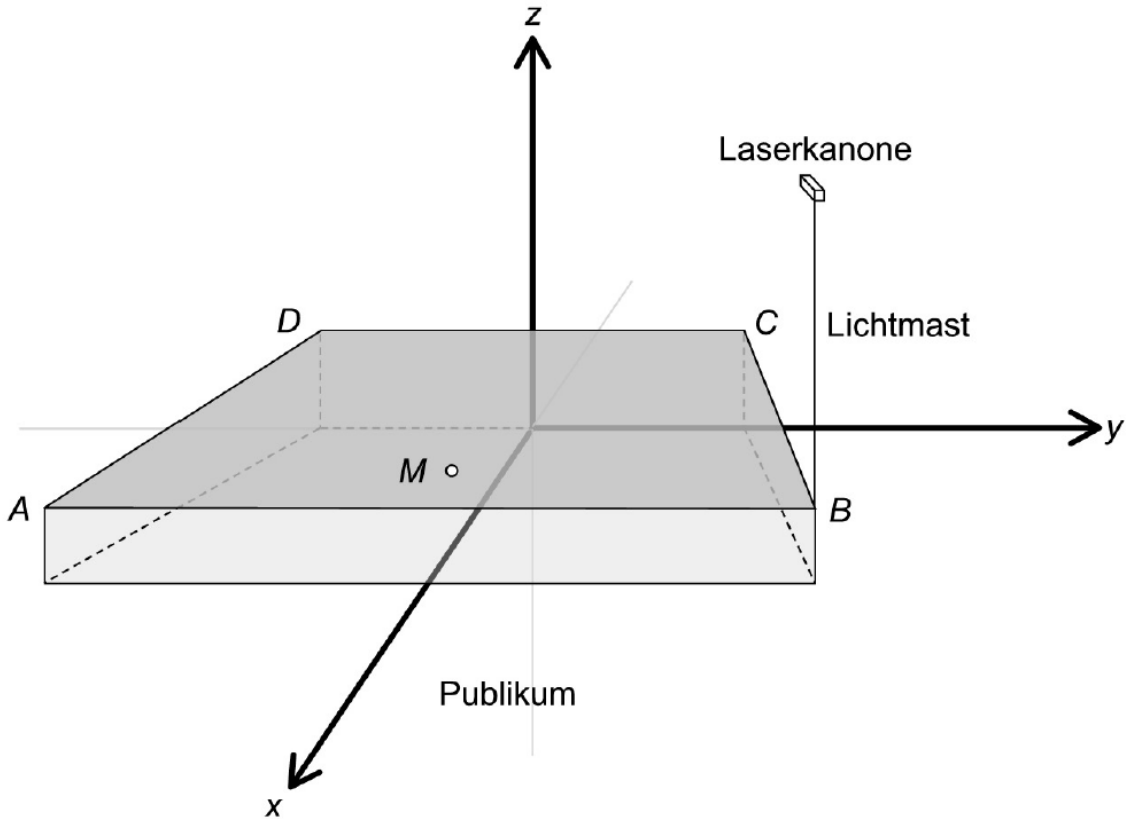
Die Querschnittsfläche und damit der momentane Volumenanstieg haben am Wendepunkt *W* ihr Maximum erreicht.

Der Graph ist symmetrisch zum Wendepunkt *W*.

Die Symmetrie des Graphen erklärt sich geometrisch daraus, dass die horizontalen kreisförmigen Querschnittsflächen des Kugeltanks von der Mittelebene aus gesehen sich nach oben und unten in demselben geometrischen Rahmen ändern.

Aufgabe 2
ANALYTISCHE GEOMETRIE

Bei einem Musikfestival wird eine Bühne aufgebaut, deren Bühnenfläche *ABCD* die Form eines gleichschenkligen Trapezes besitzt. Das Publikum und die gesamte Bühne stehen auf der *x*-*y*-Ebene. Dabei ist $A(10 \mid -9 \mid 1{,}5)$, $B(10 \mid 9 \mid 1{,}5)$ und $D(0 \mid -5 \mid 2)$ (1 LE $\triangleq$ 1 m).
Die Bühnenebene ist also geneigt.



2.1 Geben Sie die Koordinaten des Eckpunktes *C* sowie die Länge der vorderen Seite $\overline{AB}$ und die Länge der hinteren Seite $\overline{CD}$ der Bühnenfläche *ABCD* an.
Um wie viele Zentimeter liegt der hintere Bühnenrand $\overline{CD}$ höher als der vordere?

2.2 Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der die Bühnenfläche liegt.
[Zur Kontrolle: e_B: $x + 20z - 40 = 0$]

2.3 Berechnen Sie den Flächeninhalt der Bühnenfläche.

2.4 Am Mittelpunkt *E* der Strecke $\overline{AD}$ befindet sich eine elektrische Anschlussdose.
Ermitteln Sie, wie weit ein dort angeschlossenes 10 m langes Kabel an den Punkt *C* heranreicht.

2.5 Ein Bühnentechniker soll für eine Choreographie denjenigen Punkt *M* auf der Bühnenfläche *ABCD* markieren, der von allen vier Eckpunkten den gleichen Abstand hat.
Beschreiben Sie eine Vorgehensweise, wie man mit Hilfe der Vektorrechnung die Koordinaten von *M* bestimmen kann. Die Berechnung selbst ist nicht erforderlich.

2.6 Am Ende eines Mastes ist im Punkt *B'*(10 | 9 | 8) eine Laserkanone befestigt. Sie erzeugt einen ebenen Lichtteppich, der Teil der Ebene mit der Gleichung

$$e_L: \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 114 = 0 \quad \text{ist.}$$

2.6.1 Prüfen Sie, ob der Lichtteppich die Stelle *E*(5 | −7 | 1,75) erfassen kann.

2.6.2 Der Lichtteppich markiert in der *x*-*y*-Ebene, auf der das Publikum steht, eine gerade Linie. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden *g*, die diese Linie enthält.

[Zur Kontrolle: Eine der möglichen Geradengleichungen von *g* ist

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 57 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \vec{0} \ .\ ]$$

2.6.3 Bestimmen Sie das maximal mögliche Maß des Winkels, unter dem ein Laserstrahl des Lichtteppichs auf die *x*-*y*-Ebene treffen kann.

2.6.4 Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes *P*, in dem das Laserlicht aus dem Lichtteppich senkrecht auf die in Aufgabenteil 2.6.2 beschriebene Gerade *g* trifft.

L ö s u n g e n

Gegeben sind die Punkte $A(10 \mid -9 \mid 1{,}5)$, $B(10 \mid 9 \mid 1{,}5)$ und $D(0 \mid -5 \mid 2)$.

2.1 Punkt und Längen **2,5 Punkte**

Aus den gegebenen Eckpunkten und der Tatsache, dass es sich um ein gleichschenkliges Trapez handelt, folgt $C(0 \mid 5 \mid 2)$ (x_2-Koordinate gegenüber D geändert).

- Länge der vorderen Seite: 18m ($|\overrightarrow{AB}| = 18$)
- Länge der hinteren Seite: 10m ($|\overrightarrow{CD}| = 18$)
- Erhöhung der hinteren Seite gegenüber der vorderen Seite: 50 cm

2.2 Ebenengleichung **3,0 Punkte**

- Normalenvektor: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 180 \end{pmatrix}$; wähle $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}$

- Punktnormalengleichung: e_B: $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \right] = 0$

- Allgemeine Normalengleichung: e_B: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 40 = 0$

- Koordinatengleichung: e_B: $x + 20z - 40 = 0$

2.3 Inhalt A_B der trapezförmigen Tribüne **4,0 Punkte**

1. Möglichkeit: Verwendung der Trapezformel

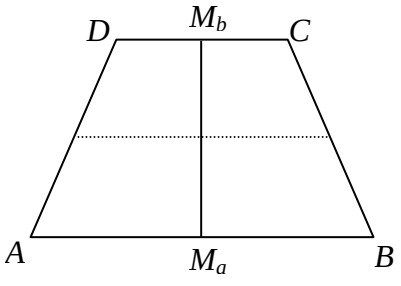
Zur Berechnung der Trapezfläche macht man gemäß der Trapezformel den Ansatz:

A_B = Mittelparallele · Höhe = $\frac{1}{2} \cdot (|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{CD}|) \cdot h_b$

Die Höhe h_b kann im Fall eines gleichschenkligen Trapezes berechnet werden als Abstand der Mittelpunkte M_a von $\overline{AB}$ und M_c von $\overline{CD}$.

$\vec{m}_a = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$;

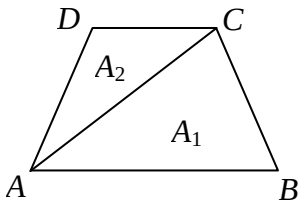
$\vec{m}_c = \frac{1}{2} \cdot (\vec{c} + \vec{d}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$



Für die Höhe folgt: $h_b = |\overrightarrow{M_a M_c}| = |\vec{m}_c - \vec{m}_a| = \left| \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{100{,}25} \approx 10{,}01$ (m)

Somit gilt: $\mu(A) = \frac{1}{2} \cdot (18 + 10) \cdot 10{,}01 \approx 140{,}17$ (m^2)

2. Möglichkeit: Zerlegung des Trapezes in zwei Teildreiecke und Berechnung der Flächeninhalte mithilfe des Vektorprodukts



$$\mu(A_1) = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ 14 \\ 0,5 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ 14 \\ 0,5 \end{pmatrix} \right| = 9 \cdot \left| \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \right| = 9 \cdot \sqrt{100,25} \approx 90,11$$

$$\mu(A_2) = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -10 \\ 14 \\ 0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 0,5 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10025} \approx 50,06$$

Insgesamt folgt: $\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2) = 140,17$ (m^2)

2.4 Kabellänge **2,5 Punkte**

E ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AD}$: $\vec{e} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{d}) = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 1,75 \end{pmatrix}$

Der Abstand der Punkte E und C mit $C(0 \mid 5 \mid 2)$ beträgt:

$$d(E\,;\,C) = |\overrightarrow{EC}| = |\vec{c} - \vec{e}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 1,75 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \\ 0,25 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{169,0625} \approx 13 \text{ (m)}.$$

Das Kabel reicht von E aus bis auf etwa 3 m an den Punkt C heran.

2.5 Punkt mit gleichem Abstand von allen Eckpunkten **2,5 Punkte**

M ist der Umkreismittelpunkt der Bühnenfläche. Dieser ist zugleich Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Seiten. *(Die Existenz von M braucht nicht begründet zu werden).*

- Es genügt, den Schnittpunkt zweier geeigneter Mittelsenkrechten zu bestimmen. Aus der Symmetrie des Trapezes ergeben sich zwei der vier Mittelsenkrechten als die Gerade h durch die Mittelpunkte M_a und M_c der Strecken $\overline{AB}$ bzw. $\overline{CD}$.
- Nun konstruiert man als Hilfsebene e_H die Mittelebene der Strecke $\overline{AD}$ mit E als Aufpunkt und dem Vektor $\overrightarrow{AD}$ als Normalenvektor.
- Der Schnittpunkt von e_H und h ist der Umkreismittelpunkt M.

Alternative: (ein mögliches Beispiel)

- M ergibt sich als Schnittpunkt der Schnittgerade m der beiden Mittelebenen zu den Strecken $\overline{AD}$ bzw. $\overline{BC}$ mit der Bühnenebene e_B.

2.6 Laserlicht

Gegeben ist die Ebene mit der Gleichung $e_L: \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 114 = 0$

2.6.1 Stelle E im Laserlicht **1,0 Punkte**

Punktprobe für den Punkte E in e_L: $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 1,75 \end{pmatrix} - 114 = -23,25 - 114 \neq 0$

Die Stelle E kann von keinem Laserstrahl erfasst werden.

2.6.2 Gerade Linie des Lichtteppichs in der *x*-*y*-Ebene **4,0 Punkte**

Koordinatengleichung von $e_L: \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 114 = 0 \Leftrightarrow 2x + 6y + 5z - 114 = 0$

Die gesuchte Gerade g ergibt sich als Schnittmenge der Ebene e_L und der x-y-Ebene mit der Gleichung $z = 0$.

Mit $z = 0$ ergibt sich: $2x + 6y - 114 = 0 \Leftrightarrow x = -3y + 57 = 0$

Wählt man $y = \lambda$, so ergibt sich: $x = -3\lambda + 57 = 0$

Damit folgt: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\lambda + 57 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 57 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(*Als Kontrolle ist parameterfrei eine Geradengleichung in Plücker-Form angegeben, aus der man einen Geradenpunkt und einen Richtungsvektor entnehmen kann.*)

2.6.3 Winkel zwischen e_L und der *x*-*y*-Ebene **2,0 Punkte**

Gegeben sind:

$$\vec{n}_L = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ mit } \left|\vec{n}_L\right| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 5^2} = \sqrt{65}$$

$$\vec{n}_{xy} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ mit } \left|\vec{n}_{xy}\right| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$$

Damit folgt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{n}_L \cdot \vec{n}_{xy}}{\left|\vec{n}_L\right| \cdot \left|\vec{n}_{xy}\right|} = \frac{\left|0 + 0 + 5\right|}{\sqrt{65} \cdot \sqrt{1}} = \frac{5}{\sqrt{65} \cdot 1} = \frac{5}{\sqrt{65}} \approx 0,6202 \quad \text{, also } \alpha \approx 51,7°$$

2.6.4 Punkt, in dem das Laserlicht die Gerade senkrecht schneidet **3,5 Punkte**

Der gesuchte Punkt P hat von der Geraden g die minimale Entfernung. Es handelt sich um den Lotfußpunkt von B' auf g.

Hilfsebene: Ebene $e_{B'}$ durch $B'(10 \mid 9 \mid 8)$ mit dem Richtungsvektor von g als Normalenvektor

$$e_{B'}: \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 21 = 0$$

Der gesuchte Punkt P ergibt sich als Schnitt der Geraden g mit der Ebene $e_{B'}$:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 57 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + 21 = 0 \Leftrightarrow -171 + 10\lambda + 21 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 15$$

Einsetzen: $\vec{p} = \begin{pmatrix} 57 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 15 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}$

Gesuchter Punkt: $P(12 \mid 15 \mid 0)$

Aufgabe 3

WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

3.1 Die Gemeinde mit den Orten Aheim, Bedorf und Celingen plant, zur Belebung des touristischen Angebotes der Region ein Thermalbad zu errichten. Um ein Meinungsbild der Bürgerinnen und Bürger einzuholen, wird eine Umfrage unter den 4400 Wahlberechtigten der Gemeinde durchgeführt.

Von den Befragten wohnen 2533 in Bedorf und 1052 in Celingen. 2877 aller Befragten haben keine Einwände gegen das Vorhaben der Gemeinde, allerdings befinden sich darunter nur 92 Personen aus Aheim, jedoch 901 aus Celingen.

3.1.1 Stellen Sie den Sachverhalt in einer Tabelle („Sechsfeldertafel") dar.

3.1.2 Bestimmen Sie den prozentualen Anteil der Gegner des Thermalbades unter den Befragten aus Aheim bzw. Bedorf bzw. Gelingen.

3.1.3 Aus allen Befragten wird zufällig eine Person ausgewählt.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür,

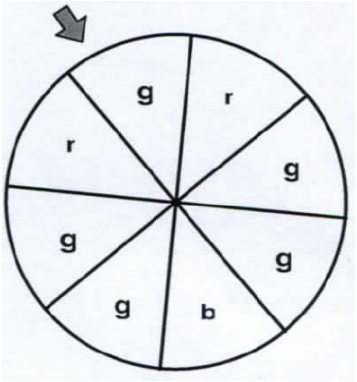
3.1.3.1 ... dass diese Person in Bedorf ansässig ist. (P_1)

3.1.3.2 ... dass die ausgewählte Person in Bedorf wohnt und sich gegen das Thermalbad ausgesprochen hat. (P_2)

3.1.3.3 ... dass die ausgewählte Person in Bedorf wohnt, wenn bekannt ist, dass sie sich gegen das Thermalbad geäußert hat. (P_3)

3.1.4 Die Umfrage wird nach zwei Monaten wiederholt. Begründen Sie, dass sich auch bei dieser Umfrage $P_2 \leq P_3$ ergibt.

3.2 Die Gegner des Thermalbades gründen die Bürgerinitiative „Wir baden's aus" (WBA). Im Rahmen der jährlichen Kirmes in der Gemeinde will die Bürgerinitiative mit einem Glücksrad ihre finanziellen Möglichkeiten verbessern.
Aufgebaut wird ein Glücksrad mit acht gleich großen Sektoren (siehe Abbildung) in den Farben rot (r), grün (g) und blau (b).



3.2.1 Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt das Glücksrad nach einem Drehen auf „grün" zum Stillstand?

3.2.2 Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält ein Kirmesbesucher bei zehnmaligem Drehen des Glücksrades genau dreimal „rot"?

3.2.3 Ein Kirmesbesucher dreht das Glücksrad zehnmal und erhält dabei genau dreimal „rot". Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit diese drei Ergebnisse „rot" unmittelbar nacheinander erzielt worden sind.

3.2.4 Der Bürgermeister will mit der Bürgerinitiative in ein zwangloses Gespräch kommen. Er dreht das Glücksrad zwanzigmal, erhält jedoch kein einziges Mal „blau". Muss er sich Gedanken machen, ob das Glücksrad vorher manipuliert wurde?

3.3 Die Bürgerinitiative WBA führt am Marktplatz eine Unterschriftenaktion durch.
Berechnen Sie, wie hoch der Anteil der Gegner des Thermalbades mindestens sein muss, damit sich unter fünfzehn zufällig angesprochenen Personen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 98 Prozent wenigstens ein Gegner des Thermalbades befindet.

L ö s u n g e n

3.1 Befragung als zweistufiges Zufallsexperiment

3.1.1 Sechsfeldertafel **3,0 Punkte**

A: in Aheim wohnhaft
B: in Bedorf wohnhaft
C: in Celingen wohnhaft
G: gegen den Bau des Thermalbades

	A	B	C	Σ
G	723	649	151	1523
$\overline{G}$	92	1884	901	2877
Σ	815	2533	1052	4400

3.1.2 Prozentuale Anteile der Gegner **3,0 Punkte**

Aheim : $\frac{|G \cap A|}{|A|} = \frac{723}{815} \approx 88{,}7\ \%$

Bedorf : $\frac{|G \cap B|}{|B|} = \frac{649}{2533} \approx 25{,}6\ \%$

Celingen: $\frac{|G \cap C|}{|C|} = \frac{151}{1052} \approx 14{,}4\ \%$

3.1.3 Betrachtung einer zufällig ausgewählten Person

3.1.3.1 $P_1 = P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{2533}{4400} \approx 57{,}6\ \%$ **1,5 Punkte**

3.1.3.2 $P_2 = P(B \cap G) = \frac{|B \cap G|}{|\Omega|} = \frac{649}{4400} \approx 14{,}75\ \%$ **1,5 Punkte**

3.1.3.3 $P_3 = P(B \mid G) = \frac{|B \cap G|}{|G|} = \frac{649}{1523} \approx 42{,}6\ \%$ **2,0 Punkte**

3.1.4 Wiederholung der Umfrage **1,5 Punkte**

P_2 und P_3 sind Brüche mit demselben Zähler $|B \cap G|$.
Der Nenner $|\Omega|$ von P_2 entspricht der Anzahl aller befragten Personen, der Nenner $|G|$ von P_3 aller Gegner; somit ist bei gleichem Zähler der Nenner von P_2 größer gleich dem Nenner von P_3.
Damit ist nachgewiesen, dass $P_2 \le P_3$ gilt.

3.2 Glücksrad

3.2.1 Wahrscheinlichkeit für „grün“ **1,0 Punkte**

Laplace-Modellierung: $P(\text{„grün“}) = \frac{5}{8} = 0{,}625 = 62{,}5\%$

3.2.2 Wahrscheinlichkeit für dreimal „rot“ **1,5 Punkte**

Bernoullikette der Länge $n = 10$ mit Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}25$

$$P(T = 3) = B(10\ ;\ 0{,}25\ ;\ 3) = \binom{10}{3} \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75^7 \approx 25{,}0\%$$

3.2.3 Dreimal „rot“ unmittelbar hintereinander **3,5 Punkte**

Zufallsexperiment: Auswahl von 3 Plätzen aus 10 möglichen Plätzen

$$|\Omega| = \binom{10}{3} = 120$$

Ereignis: Platzierung von drei „rot“ hintereinander

In einer Reihe von 10 Versuchen gibt es 8 Möglichkeiten, die zu drei „rot“ hintereinander platzieren.

$|A| = 8$

Laplace-Wahrscheinlichkeit: $P(A) = \frac{8}{120} \approx 0{,}067 = 6{,}7\%$

3.2.4 Kein einziges Mal „blau“ **2,0 Punkte**

Bernoulli-Kette der Länge $n = 20$ mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 1/8$

$$P(T = 0) = B(20\,;\,\tfrac{1}{8}\,;\,0) = \binom{20}{3} \cdot (\tfrac{1}{8})^0 \cdot (\tfrac{7}{8})^{20} \approx 0{,}069 = 6{,}9\%$$

Die Wahrscheinlichkeit, bei allen 20 Drehungen des Glücksrades kein „blau“ zu erhalten, ist recht gering. Der Bürgermeister darf berechtigte Zweifel an der Seriosität des Ablaufs bei seinem Drehen des Glücksrades haben.

3.3 Bernoulli-Kette mit gesuchtem *p* **4,5 Punkte**

Bernoulli-Kette der Länge $n = 15$

Ansatz über das Gegenereignis $P(T \geq 1) = 1 - P(T = 0)$:

$$\begin{aligned}
& 1 - P(T = 0) \geq 0{,}98 \\
\Leftrightarrow \quad & 1 - 0{,}98 \geq P(T = 0) \\
\Leftrightarrow \quad & 0{,}02 \geq \binom{15}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{15} \\
\Leftrightarrow \quad & 0{,}02 \geq (1-p)^{15} \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt[15]{0{,}02} \geq 1 - p \\
\Leftrightarrow \quad & p \geq 1 - \sqrt[15]{0{,}02} \approx 0{,}23 = 23\%
\end{aligned}$$

Der Anteil der Thermalbadgegner unter den Passanten muss mindestens 23% betragen.

Schriftliche Abiturprüfung 2013

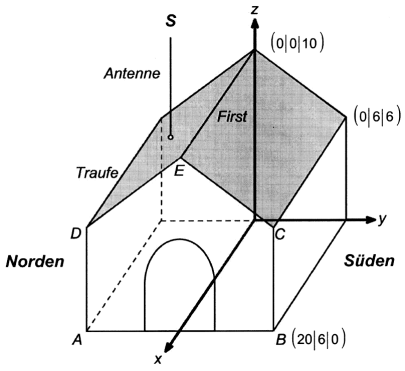
E-Kurs

Nachtermin

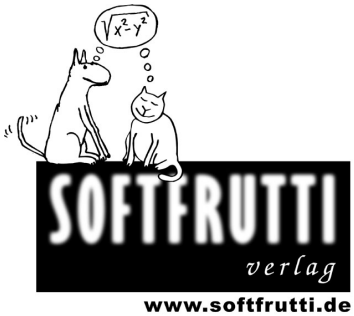
Themenübersicht

- Aufgabe 1: **Analysis**
  - Untersuchung der ln- Funktion $f(x) = 5 \cdot \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}$
  - Übergang zur Scharfunktion $f_a(x) = 5 \cdot \frac{\ln(x^2+a)}{x^2+a}$
  - Zuordnung von Graphen zu Funktionen der Schar
  - Modellierung: Konzentration eines Stoffes in Wasser mithilfe der Funktion $k(t) = 1500 \cdot (e^{-t} - e^{-1,3 \cdot t})$

- Aufgabe 2: **Analytische Geometrie**
  - Winkel zwischen Vektoren
  - Winkel zwischen zwei Geraden
  - Lotfußpunkt bezüglich einer Geraden



- Aufgabe 3: **Stochastik**
  - Kombinatorik
  - Aufstellen und Auswerten einer Vierfeldertafel
  - Bernoulli-Kette



Aufgabe 1
ANALYSIS

1.1 Gegeben ist die Funktion $f: D_{max} \to \mathbb{R}\ ; x \mapsto\ 5 \cdot \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}$.

1.1.1 Untersuchen Sie f auf einfache Symmetrie.

1.1.2 Begründen Sie, dass ...

1.1.2.1 … die Funktion f genau eine Nullstelle besitzt.

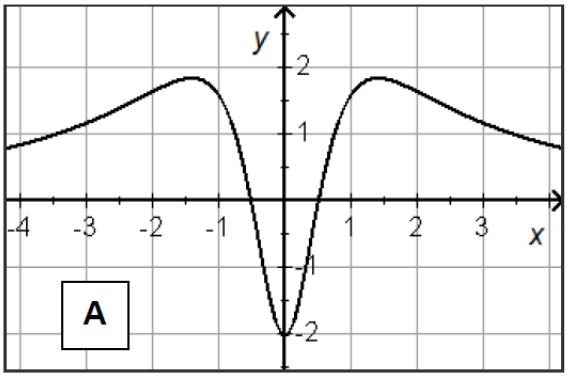
1.1.2.2 … die Funktion f keine negativen Funktionswerte annimmt.

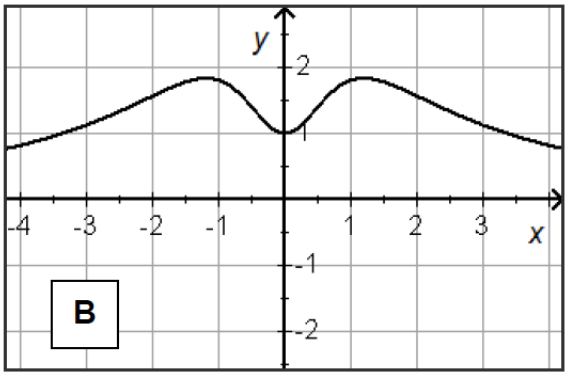
1.1.2.3 … sich der Zählerterm $\ln(x^2 + 1)$ für $x > 0$ in die Form $2 \cdot \ln(x) + \ln(1 + \frac{1}{x^2})$ bringen lässt.

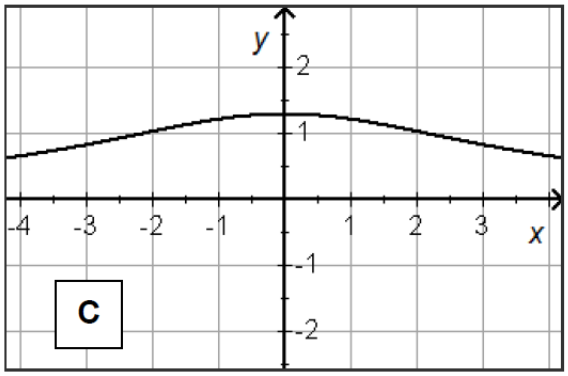
1.1.2.4 … der Funktionswert $f(x)$ für $x \to +\infty$ gegen den Wert 0 strebt.

1.1.3 Skizzieren Sie den Graphen von f und Einbeziehung der Erkenntnisse aus den Aufgabenteilen 1.1.1 und 1.1.2.

1.2 Gegeben ist die durch $f_a: D_{max} \to \mathbb{R}\ ; x \mapsto\ 5 \cdot \frac{\ln(x^2+a)}{x^2+a}$ mit $a > 0$ beschriebene Funktionenschar, die mit $a = 1$ auch die Funktion f aus Aufgabe 1.1 enthält.
Nachstehend sind drei typische Funktionsgraphen der Schar dargestellt.







1.2.1 Erläutern Sie anhand einer charakteristischen Eigenschaft, dass der Graph von f_1 den Übergang der Graphen von f_a zwischen den Typen A und B darstellt.

1.2.2 Begründen Sie, dass alle Funktionen f_a die gleiche maximale Definitionsmenge $\mathbb{R}$ haben.

1.2.3 Weisen Sie durch Ableiten nach, dass $f_a'(x) = 10 \cdot \frac{x \cdot (1 - \ln(x^2 + a))}{(x^2 + a)^2}$ gilt.

1.2.4 Berechnen Sie mit Hilfe des in 1.2.3 angegebenen Ableitungsterms in Abhängigkeit von a alle Stellen, an denen der Graph von f_a eine waagerechte Tangente besitzt.

1.2.5 Zeigen Sie, dass für $a \leq e$ die Funktionswerte von f_a an den Stellen $-\sqrt{e - a}$ und $\sqrt{e - a}$ unabhängig von a sind.

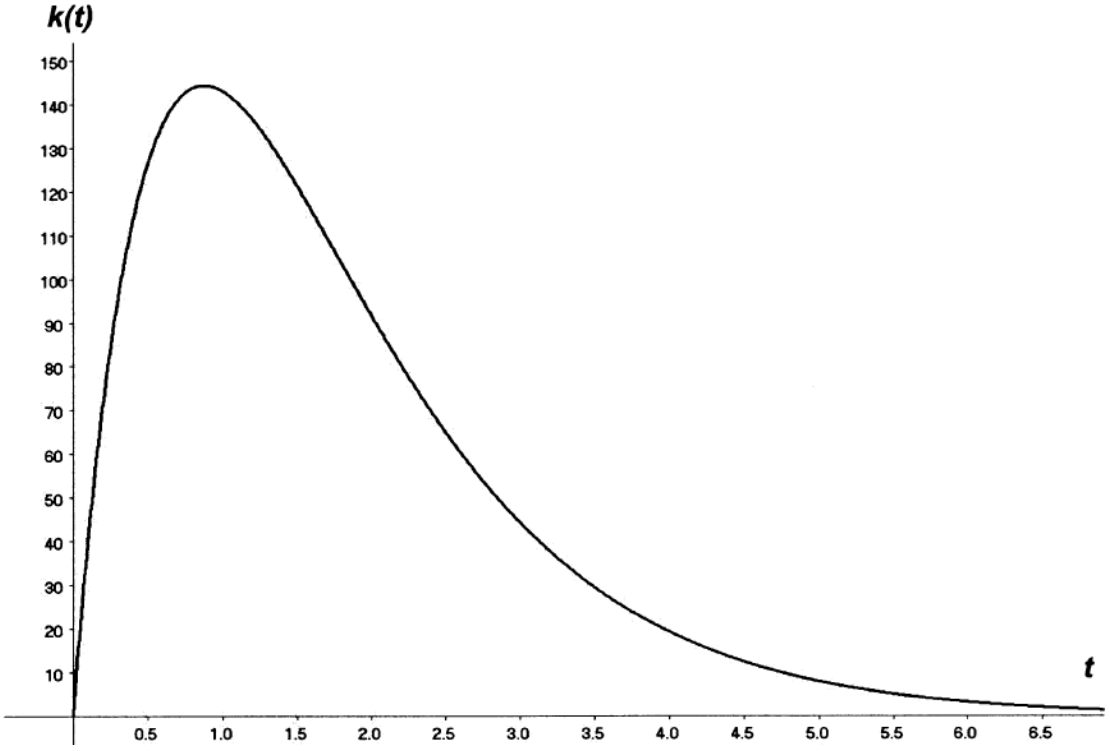
1.2.6 Es gibt genau zwei Geraden, auf denen alle lokalen Extrempunkte der Scharkurven von f_a liegen. Erläutern Sie, inwieweit sich diese Tatsache in den Abbildungen A, B und C widerspiegelt, und geben Sie die Gleichungen der beiden Geraden an.

1.2.7 Begründen Sie, dass $H(0 \mid \frac{5}{e})$ der einzige Hochpunkt der Funktion f_e ist.

1.3 Dem Wasser eines Fischzuchtbeckens wird eine bestimmte Menge eines pulverförmigen Zusatzstoffes zur Verbesserung der Wasserqualität beigefügt. Der Zusatzstoff löst sich im Wasser und wird im Laufe der Zeit durch Mikroorganismen abgebaut.

Die Funktion $k: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$; $t \mapsto 1500 \cdot (e^{-t} - e^{-1,3 \cdot t})$ beschreibt die Konzentration des Zusatzstoffes im Wasser in Abhängigkeit von der Zeit t.

Dabei ist $k(t)$ die Maßzahl der Konzentration in Gramm pro Kubikmeter, t ist die Maßzahl der Zeit in Tagen.



1.3.1 Interpretieren Sie den abgebildeten Graphen von $k(t)$ in Hinblick auf die Entwicklung der Konzentration des Zusatzstoffs im Wasser.

1.3.2 Berechnen Sie die mittlere Konzentration des Zusatzstoffs im Wasser während der ersten vier Tage nach der Beigabe ins Fischzuchtbecken.

[zur Kontrolle: $k_{\text{mittel}} \approx 81{,}3$]

1.3.3 Lesen Sie am Graphen ab, in welchem Zeitraum die Konzentration $k(t)$ größer als die mittlere Konzentration in den ersten vier Tagen ist.

Lesen Sie am Graphen ab, zu welchem Zeitpunkt die Konzentration des Zusatzstoffes im Wasser am stärksten abnimmt. Was zeichnet diesen Zeitpunkt mathematisch aus?

1.3.4 Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem sich die größte Menge des Zusatzstoffs gelöst im Wasser befindet, und bestimmen Sie den Wert dieser Konzentration.
[zur Kontrolle: $k_{max} \approx 144{,}4$]

1.3.5 Berechnen Sie, auf wie viel Prozent des maximalen Wertes sich die Konzentration des Zusatzstoffs im Wasser vier Tage nach der Beigabe verringert hat?

L ö s u n g e n

1.1 Eigenschaften einer gebrochenen Funktion mit ln-Term

Gegeben ist die Funktion $f: D_{max} \to \mathbb{R}$ mit $5 \cdot \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}$.

1.1.1 Symmetrie des Graphen **2,5 Punkte**

- Die Definitionsmenge $D_{max} = \mathbb{R}$ ist symmetrisch zum Ursprung O.
- Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$: $f(-x) = 5 \cdot \frac{\ln((-x)^2+1)}{(-x)^2+1} = 5 \cdot \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1} = f(x)$.

Somit ist der Graph symmetrisch zur *y*-Achse.

1.1.2.1 Nullstellen **1,5 Punkte**

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (doppelt)

1.1.2.2 Keine negative Funktionswerte **2,0 Punkte**

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 \geq 0$ und damit $x^2 + 1 \geq 1$.
Wegen der Monotonie der ln-Funktion folgt dann: $\ln(x^2 + 1) \geq \ln(1) = 0$.
Da für den Nennerterm $x^2 + 1 > 0$ gilt, folgt insgesamt: $f(x) = 5 \cdot \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1} \geq 0$.

1.1.2.3 Umformung des Zählerterms **3,0 Punkte**

$$2 \cdot \ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \ln(x^2) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{(3. Logarithmengesetz)}$$

$$= \ln\left(x^2 \cdot \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right) \quad \text{(1. Logarithmengesetz)}$$

$$= \ln(x^2 + 1) \quad \text{(Ausmultiplizieren)}$$

1.1.2.4 Grenzwert **2,5 Punkte**

Argumentation über eine Zerlegung in ein Produkt

$$\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(5 \cdot \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}\right) = 5 \cdot \lim_{x\to+\infty} \left(\ln(x^2+1) \cdot \frac{1}{x^2+1}\right) = 0^+$$

$$\ln(x^2+1) \to +\infty, \quad \frac{1}{x^2+1} \to 0^+$$

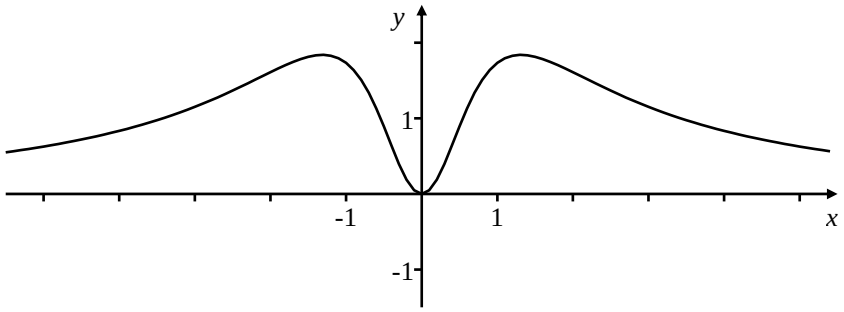
(Der rationale Term (zweiter Faktor) dominiert über den ln-Term (erster Faktor).)

Alternative: Argumentation über die Zerlegung gemäß 1.1.2.3

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 5 \cdot \left(\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2\ln(x)}{x^2+1}\right) + \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2+1}\right) \right)$$

- Der erste Summand strebt gegen Null.
  Zähler und Nenner streben gegen +∞, der ganzrationale Nennerterm dominiert aber den logarithmischen Zählerterm.
- Auch der zweite Summand strebt gegen Null.
  Der Zählerterm strebt gegen ln(1) = 0, der Nennerterm nimmt dabei beliebig große Werte an.

1.1.3 Graph der Funktion *f* **2,5 Punkte**



1.2 Funktionenschar f_a

Gegeben ist die Funktionenschar $f_a : D_{max} \to \mathbb{R}$ mit $5 \cdot \frac{\ln(x^2+a)}{x^2+a}$ mit a > 0 .

1.2.1 Übergang zwischen den Typen A und B **1,5 Punkte**

Es liegt ein Übergang von zwei Nullstellen bei Graphen vom Typ A über genau eine Nullstelle bei f_1 hin zu keiner Nullstelle bei Graphen vom Typ B vor.

Alternative: Der Tiefpunkt wechselt seine Lage von unterhalb zur *x*-Achse über die *x*-Achse nach oberhalb der *x*-Achse

1.2.2 Gleiche maximale Definitionsmenge **2,0 Punkte**

Für $a > 0$ ist die Gleichung $x^2 + a = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ unerfüllbar; der Nenner kann also den Wert 0 nicht annehmen.

Für $a > 0$ gilt $x^2 + a > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, der Term $\ln(x^2 + a)$ also stets definiert.

Insgesamt folgt für alle Funktionen f_a: $D_{max} = \mathbb{R}$.

1.2.3 Erste Ableitung **5,0 Punkte**

$$f_a'(x) = 5 \cdot \frac{(x^2+a)\cdot\frac{2x}{x^2+a} - \ln(x^2+a)\cdot 2x}{(x^2+a)^2} = 5 \cdot \frac{2x - 2x\cdot\ln(x^2+a)}{(x^2+a)^2} = 5 \cdot \frac{2x\cdot(1-\ln(x^2+a))}{(x^2+a)^2}$$

1.2.4 Waagerechte Tangenten **4,5 Punkte**

$$\begin{aligned} f_a'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2x \cdot (1 - \ln(x^2 + a)) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \vee \quad 1 - \ln(x^2 + a) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \vee \quad \ln(x^2 + a) = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \vee \quad x^2 + a = e \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \vee \quad x^2 = e - a \end{aligned}$$

- Die Lösung $x = 0$ ergibt sich unabhängig vom Parameter *a* aus dem ersten Faktor des Ableitungsterms.
- Für $a = e$ liefert auch der zweite Term die Lösung $x = 0$.
- Für $e - a > 0$ oder $a < e$ ergeben sich zwei weitere Lösungen, nämlich $\pm\sqrt{e-a}$.

1.2.5 Funktionswerte an den Stellen $\pm\sqrt{e-a}$ unabhängig von *a* **1,5 Punkte**

$$f(\pm\sqrt{e-a}) = 5 \cdot \frac{\ln((\pm\sqrt{e-a})^2+a)}{(\pm\sqrt{e-a})^2+a} = 5 \cdot \frac{\ln(e)}{e} = \frac{5}{e} \approx 1{,}839 \text{ (unabhängig von } a)$$

1.2.6 Geraden, auf denen alle Extrempunkte liegen **2,0 Punkte**

Lage der möglichen Extrempunkte:

- Stellen $x = \pm\sqrt{e - a}$: $f(\pm\sqrt{e - a}) = \frac{5}{e}$ (gemäß 1.2.5)

  Alle zugehörigen Punkte liegen auf der Gerade $y = \frac{5}{e}$ (einer Parallelen zur x-Achse).

- Stelle $x = 0$: $f(0) = 5 \cdot \frac{\ln(0 + a)}{0 + a} = 5 \cdot \frac{\ln(a)}{a}$

  Alle zugehörigen Punkte liegen auf der Gerade $x = 0$ (der y-Achse).

Bezug zu den Abbildungen A, B und C:

- Abbildung A: zwei Hochpunkte auf der Geraden $y = \frac{5}{e}$, Tiefpunkt mit $y = -2$
- Abbildung B: zwei Hochpunkte auf der Geraden $y = \frac{5}{e}$, Tiefpunkt mit $y = 1$
- Abbildung C: es gibt nur einen Hochpunkt auf der Geraden $y \approx 1{,}25$
  (der Graph gehört zu einem Parameterwert $a > e$)

1.2.7 Einziger Hochpunkt von f_e **2,5 Punkte**

Für die erste Ableitung gilt: $f_e'(x) = \frac{2x \cdot (1 - \ln(x^2 + e))}{(x^2 + e)^2}$ (vgl. 1.2.3 mit $a = e$)

- *Notwendige Bedingung*: Gemäß 1.2.4 ergibt sich: $f_e'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 0$
  Es kann nur an der Stelle 0 ein Extremum geben.

- *Hinreichende Bedingung*:

Vorzeichentabelle:

x		0	
$f_e'(x)$	+	0	–
		HP	

$f_e'(1) \approx -0{,}045 < 0$

$f_e'(-1) \approx +0{,}045 > 0$

- *Funktionswert*: Gemäß 1.2.6 gilt für $a = e$: $f(0) = 5 \cdot \frac{\ln(e)}{e} = 5 \cdot \frac{1}{e} = \frac{5}{e}$

Insgesamt folgt, dass es nur den Hochpunkt $H(0 \mid \frac{5}{e})$ gibt.

1.3 Lösen und Abbau eines Zusatzstoffes in einem Wasserbecken

Gegeben ist die Funktion $k : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} ; x \mapsto 1500 \cdot (e^{-t} - e^{-1{,}3 \cdot t})$.

1.3.1 Interpretation des Graphen **2,5 Punkte**

- Zunächst steigt durch den Lösungsprozess die Konzentration des Zusatzstoffs im Wasser steil an.
- Nach ca. 21 h erreicht sie ihren höchsten Wert von ca. 145 g/m^3.
- Anschließend nimmt die Konzentration in Folge des Abbaus durch die Mikroorganismen ab.
- Nach 6 Tagen ist der Zusatzstoff quasi vollständig abgebaut.

1.3.2 Mittelwert in den ersten vier Tagen **5,0 Punkte**

$$\overline{\mu} = \frac{1}{4}\int_0^4 f(t)\,dt = \frac{1}{4}\int_0^4 1500\cdot(e^{-t} - e^{-1{,}3\cdot t})\,dt$$

$$= 375 \cdot \left[-e^{-t} + \tfrac{1}{1{,}3}e^{-1{,}3\cdot t}\right]_0^4 \approx 375 \cdot 0{,}2167 \approx 81$$

In den ersten vier Tagen nach der Zugabe zum Wasser beträgt die Konzentration des Zusatzstoffes im Mittel ca. 81 g/m^3.

1.3.3 Konzentration $k(t)$ größer als die mittlere Konzentration **2,5 Punkte**

Etwa zwischen 6 h und 54 h nach der Beigabe zum Wasser ist die Konzentration größer als der Mittelwert der ersten vier Tage.
(*Anmerkung*: Als richtig zu werten sind auch Zeitpunktangaben ± 6 h.)

Die stärkste Abnahme der Konzentration des Zusatzstoffs erfolgt etwa 42 h nach der Einbringung ins Wasser (an der Wendestelle).
(*Anmerkung*: Als richtig zu werten sind auch Zeitpunktangaben ± 6 h)

1.3.4 Zeitpunkt, zu dem die größte Menge des Zusatzstoffs gelöst ist **5,0 Punkte**

Ableitung: $k'(t) = 1500 \cdot (-e^{-t} + 1{,}3 \cdot e^{-1{,}3\cdot t})$.

$$\begin{aligned}
k'(t) = 0 &\Leftrightarrow -e^{-t} + 1{,}3 \cdot e^{-1{,}3\cdot t} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 1{,}3 \cdot e^{-1{,}3\cdot t} = e^{-t} \qquad | \ln \\
&\Leftrightarrow \quad \ln(1{,}3) + (-1{,}3 \cdot t) = -t \\
&\Leftrightarrow \quad \ln(1{,}3) = 0{,}3 \cdot t \\
&\Leftrightarrow \quad t = \ln(1{,}3) / 0{,}3 \approx 0{,}875 \quad \text{(Tage)}
\end{aligned}$$

Da dies eine einfache Nullstelle der ersten Ableitung ist (mit Vorzeichenwechsel), liegt eine Extremstelle vor. Vergleicht man mit dem Graphen, so ist t die gesuchte Maximumsstelle.
Die maximale Konzentration $k(0{,}875) \approx 144{,}4$ g/m^3 ist nach 0,875 Tagen oder ca. 21 Stunden erreicht.

1.3.5 Prozentsatz des maximalen Werts nach vier Tagen **1,5 Punkte**

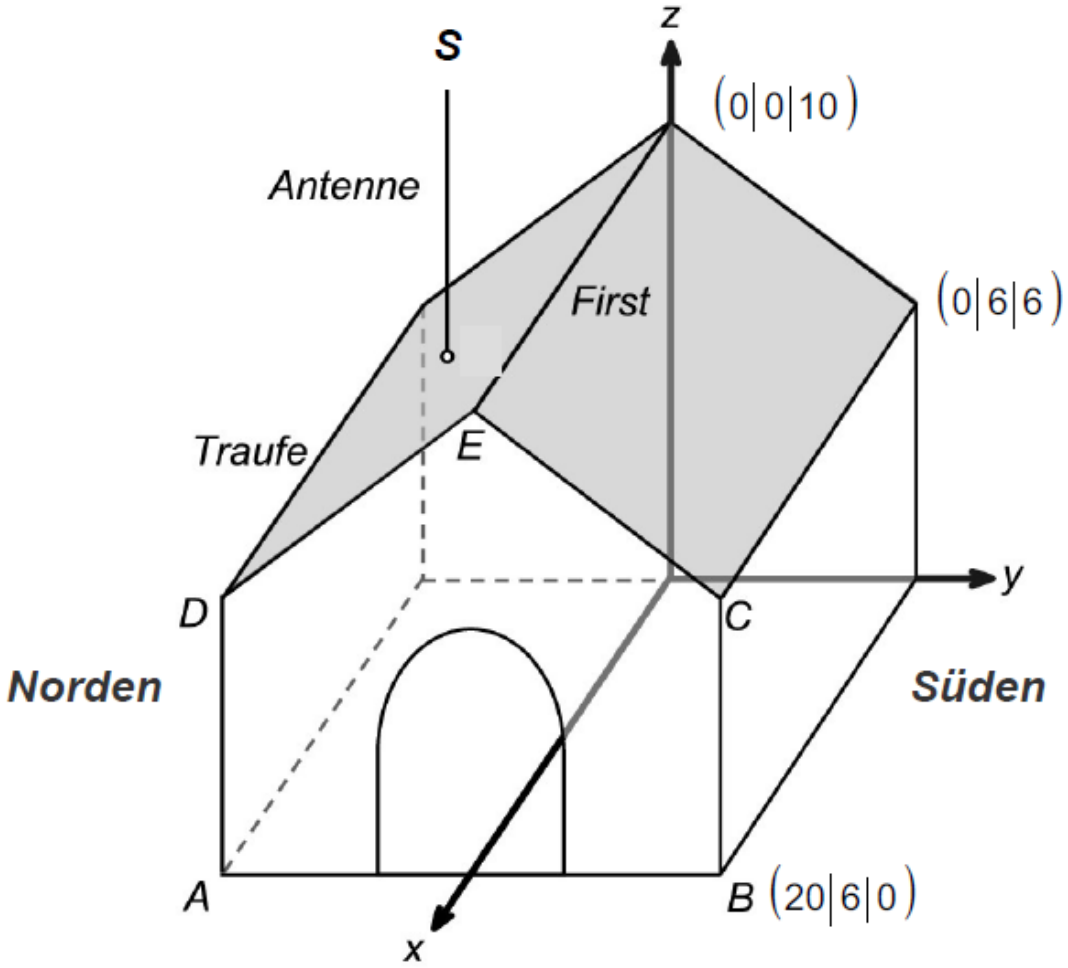
Es gilt: $k(4) \approx 19{,}2$.

Dies sind $\frac{19{,}2}{144{,}4} \approx 0{,}133 = 13{,}3\%$ des Maximums.

Aufgabe 2
ANALYTISCHE GEOMETRIE

Die Abbildung zeigt die Scheune von Bauer Jansen. Deren rechteckige Grundfläche ist 20 m lang und 12 m breit. Der Dachfirst verläuft in einer Höhe von 10 m, die beiden Dachtraufen jeweils in einer Höhe von 6 m über der Grundfläche der Scheune. Das große Tor der Scheune zeigt nach Westen.

Das Koordinatensystem wird so gewählt, dass die Grundfläche der Scheune in der *x*-*y*-Ebene liegt, die Koordinatenachsen parallel zu den Grundseiten verlaufen und der Ursprung mit dem Mittelpunkt der hinteren Grundseite übereinstimmt. (1 LE $\hat{=}$ 1 m)



2.1 Zunächst werden einige Gebäudeteile der Scheune betrachtet.

2.1.1 Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte *A*, *C*, *D* und *E* der vorderen Giebelfläche an und berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Giebelfläche *ABCED*.

2.1.2 Erstellen Sie eine Normalengleichung der nördlichen Dachebene e_N, in der die Punkte *D* und *E* liegen.

[zur Kontrolle: $e_N: \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 30 = 0$]

2.1.3 Berechnen Sie das Maß ε des Innenwinkels der Giebelfläche am Punkt *E*.

2.2 Auf der Dachfläche, die nach Süden ausgerichtet ist, möchte Bauer Jansen eine Photovoltaikanlage installieren lassen. Die Solarmodule haben die Abmessungen von jeweils 1,60 m × 1,00 m. Die Solarmodule können nicht geteilt werden. Bei deren Verlegung auf der Dachfläche muss ein Abstand von mindestens 30 cm zum Dachflächenrand eingehalten werden.

2.2.1 Entscheiden Sie, ob die Solarmodule bei der Montage auf der Dachfläche entweder alle längs oder alle quer liegend angeordnet werden sollen, um so die Dachfläche möglichst weit zu belegen. Begründen Sie Ihre Antwort.

2.2.2 Am 23. Mai 2013 scheint die Sonne um die Mittagszeit genau aus südlicher Richtung unter einem Winkel von 61° auf den waagerechten Erdboden.

Bestimmen Sie den Winkel, unter dem die Sonnenstrahlen zu diesem Zeitpunkt auf die Flächen der Solarmodule fallen.

2.3 Um sein Einkommen weiter aufzubessern, schließt Bauer Jansen mit einem Mobilfunkbetreiber einen Vertrag ab, der die Errichtung eines Antennenmastes auf dem nördlichen Scheunendach zum Gegenstand hat. Die Spitze des Antennenmastes befindet sich nach der Montage im Punkt $S(11 \mid -3 \mid 14)$.

2.3.1 Bestimmen Sie die Länge des Maststücks, das über die Dachfläche hinausragt.

2.3.2 Prüfen Sie durch geeignete Rechnung, ob das Lot von S aus auf die Gerade DE seinen Lotfußpunkt L auf der Strecke $\overline{DE}$ hat.

2.4 Zum Schutz des Scheuneneingangs vor Regen befestigt Bauer Jansen in den Punkten C und E des vorderen Giebels sowie in einem Punkt P, der in der x-y-Ebene liegt, eine Plane in Form eines gleichschenkligen Dreiecks.

2.4.1 Beschreiben Sie die Lage aller Punkte des Anschauungsraumes, die von den Punkten C und E denselben Abstand haben.

2.4.2 Begründen Sie, dass alle Punkte der x-y-Ebene, die von den Punkten C und E denselben Abstand haben, die gleiche y-Koordinate besitzen.

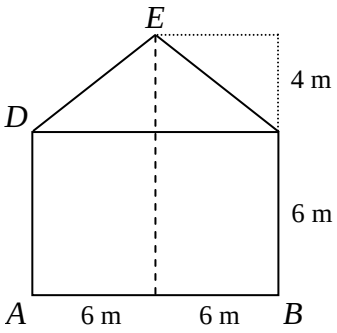
L ö s u n g e n

2.1 Berechnung von Gebäudeteilen

2.1.2 Koordinaten und Flächeninhalt der Giebelfläche **4,5 Punkte**

Aus Text und Zeichnung: $A(20 \mid -6 \mid 0)$; $C(20 \mid 6 \mid 6)$; $D(20 \mid -6 \mid 6)$ und $E(20 \mid 0 \mid 10)$

Die Giebelfläche lässt in ein Rechteck und ein aufgesetztes Dreieck zerlegen.



- Flächeninhalt des Rechtecks
  Es gilt: $\mu(A_1) = 12 \cdot 6 = 72 \ \ (m^2)$
- Flächeninhalt des Dreiecks (elementargeometrisch)
  Die beiden Teildreiecke lassen sich aus Symmetriegründen zu einem Rechteck zusammensetzen.
  Daher gilt: $\mu(A_2) = 6 \cdot 4 = 24 \ \ (m^2)$

Die Giebelfläche hat also den Inhalt: $\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2) = 96 \ \ (m^2)$

Alternative: Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks mithilfe des Vektorprodukts

$$\mu(A_2) = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2 \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right|$$

$$= 12 \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 12 \cdot 2 = 24$$

2.1.2 Normalengleichung der nördlichen Dachebene **2,0 Punkte**

- Richtungsvektoren: $\overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$; wähle $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ ; \ \text{wähle } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Normalenvektor: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$; wähle $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

- Punktnormalengleichung:

$$e_N: \ \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{e}) = 0 \ \Leftrightarrow \ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \right] = 0$$

- Allgemeine Normalengleichung: $e_N: \ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 30 = 0$

2.1.3 Winkelberechnung **2,0 Punkte**

Der gesuchte Innenwinkel der Giebelfläche kann z. B. berechnet werden als Winkel zwischen den Vektoren

$$\overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ mit } |\overrightarrow{EC}| = \sqrt{0^2+6^2+(-4)^2} = \sqrt{52}$$

$$\overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ mit } |\overrightarrow{ED}| = \sqrt{0^2+(-6)^2+(-4)^2} = \sqrt{52}$$

$$\cos(\varepsilon) = \frac{\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{ED}}{\left|\overrightarrow{EC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{ED}\right|} = \frac{0-36+16}{\sqrt{52} \cdot \sqrt{52}} = \frac{-20}{52} \approx -0{,}385 \text{, also } \varepsilon \approx 112{,}6°$$

Alternative: Elementargeometrische Berechnung über $\tan(\frac{\varepsilon}{2}) = \frac{6}{4}$.

2.2 Solarmodule auf der südlichen Dachfläche

2.2.1 Solarmodule alle längs oder quer anordnen **4,0 Punkte**

Die Dachfläche ist ein Rechteck mit der Länge $a = 20$ und

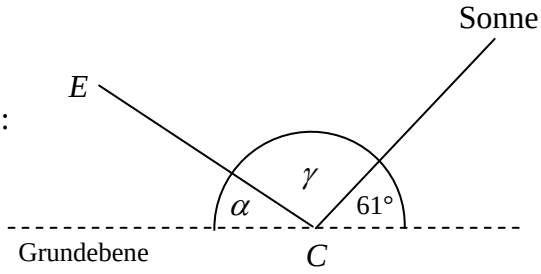
der Breite $b = |\overrightarrow{EC}| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{52} \approx 7{,}2$

- Module längs montiert
  (20,0 – 0,6) : 1,6 = 12 (mit Rest) ; (7,2 – 0,6) : 1,0 = 6 (mit Rest)
  Anzahl der Module in diesem Fall: 12 · 6 = 72
- Module quer montiert
  (20,0 – 0,6) : 1,0 = 19 (mit Rest) ; (7,2 – 0,6) : 1,6 = 4 (mit Rest)
  Anzahl der Module in diesem Fall: 19 · 4 = 76

Legt man die Module längs, so passen 72 Module auf die Dachfläche, legt man sie quer, so reicht die Dachfläche für 76 Module. Also sollte man die Module quer montieren.

2.2.2 Winkel, unter dem die Sonnenstrahlen auf die Flächen der Solarmodule fallen **3,5 Punkte**

Berechnet werden soll zunächst der Winkel α zwischen der südlichen Dachebene und der Grundebene.



- Normalenvektor der südlichen Dachfläche:

$$\overrightarrow{EC} \times \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -80 \\ -120 \end{pmatrix}$$

Wähle $\vec{n}_S = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $|\vec{n}_S| = \sqrt{0^2+2^2+3^2} = \sqrt{13}$

- Normalenvektor der Grundebene (parallel zur *x*-*y*-Ebene)

  Wähle $\vec{n}_{xy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $|\vec{n}_{xy}| = 1$

Für den Winkel α folgt dann:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{n}_S \cdot \vec{n}_{xy}}{\left|\vec{n}_S\right| \cdot \left|\vec{n}_{xy}\right|} = \frac{3}{\sqrt{13} \cdot 1} = \frac{3}{\sqrt{13}} \approx 0{,}832 \quad , \text{ also } \alpha \approx 33{,}7°$$

Für den Winkel γ zwischen der Dachfläche und dem Sonnenstrahl folgt dann:

$\gamma = 180° - (33{,}7° + 61{,}0°) = 85{,}3°$

2.3 Mobilfunkantenne auf der nördlichen Dachfläche

2.3.1 Länge des Maststücks **2,5 Punkte**

Betrachtet wird die Gerade *g* durch *S* (11 | –3 | 14) senkrecht zur *x*-*y*-Ebene:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ 14 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Schnitt dieser Geraden *g* mit der nördlichen Dachebene e_N ergibt den Punkt *Q*:

$$e_N \cap g: \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ 14 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] - 30 = 0 \Leftrightarrow 48 + \lambda \cdot 3 - 30 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -6$$

Einsetzen: $\vec{q} = \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ 14 \end{pmatrix} + (-6) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$; also $Q(11 \mid -3 \mid 8)$

Der Unterschied der *z*-Koordinaten der Punkte *S* und *Q* ergibt die gesuchte Länge.

Der Mast ragt also 14 m – 8m = 6 m aus der Dachfläche heraus.

2.3.2 Lotfußpunkt auf der Strecke $\overline{DE}$ **3,5 Punkte**

Gesucht ist der Lotfußpunkt *L* von *S* zur Geraden durch *D* und *E*.

Gerade *h* durch *D* und *E*: $\vec{x} = \vec{d} + \lambda \cdot \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 20 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

- *Berechnung des Lotfußpunktes*:

  Hilfsebene durch *S* senkrecht zur Gerade durch *D* und *E*:

$$e_H: \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ 14 \end{pmatrix} \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 38 = 0$$

Einsetzen von h in e_H:

$$\begin{pmatrix}0\\6\\4\end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix}20\\-6\\6\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}0\\6\\4\end{pmatrix} \right] - 38 = 0 \Leftrightarrow -12 + 52\lambda - 38 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{50}{52}$$

- *Überprüfung bezüglich der Strecke* $\overline{DE}$:

  Wegen $0 < \frac{50}{52} < 1$ liegt der Lotfußpunkt L auf der Strecke $\overline{DE}$.

2.4 Plane vor dem westlichen Giebel

2.4.1 Punkte mit gleichem Abstand von den Punkte *C* und *E* **1,0 Punkte**

Die zu beschreibende Punktmenge ist die Ebene mit dem Normalenvektor $\overrightarrow{CE}$, welche durch den Mittelpunkt der Strecke $\overrightarrow{CE}$ verläuft.

2.4.2 Gleiche *y*-Koordinaten **2,0 Punkte**

Die Menge aller Punkte der Grundebene, die von C und E denselben Abstand haben, ist die Schnittgerade der Mittelebene der Strecke $\overline{CE}$ mit der x-y-Ebene.

Beide Ebenen haben den Vektor $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ als Richtungsvektor.

Deshalb ist dies auch ein Richtungsvektor der Schnittgeraden der beiden Ebenen.

Dieser Richtungsvektor lässt gemäß der Parametergleichung der Schnittgerade die y-Koordinate (und die z-Koordinate) unverändert.

Aufgabe 3

WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

In der Saison 2011/12 gewannen die Spieler der Miami Heat den Meistertitel in der amerikanischen Basketball-Profi-Liga.

3.1 Zum Kader der Miami Heat zählten sechs Guards (Aufbauspieler), vier Centers (zentrale Spieler unter dem Korb) und sieben Forwards (Flügelspieler).

3.1.1 Geben Sie die Anzahl der Möglichkeiten an, alle Spieler des Kaders zur Präsentation nacheinander auf das Spielfeld zu rufen.

3.1.2 Beim Basketball sind beim Start stets genau fünf Spieler („Starting Five") jeder der beiden Mannschaften auf dem Feld. Berechnen Sie die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten des Trainers der Miami Heat, seine Gruppe der „Starting Five" zu bilden.

3.1.3 Üblicherweise besteht die Startaufstellung aus zwei Guards, einem Center und zwei Forwards.
Berechnen Sie die Anzahl der Möglichkeiten für eine solche 2-1-2-Aufstellung.

3.2 Ein Foulspiel wird im Basketball mit Freiwürfen geahndet. Im Folgenden wird ein so genannter Doppelfreiwurf betrachtet, bei dem ein Spieler zweimal nacheinander in Richtung Korb wirft. Die Ereignisse, beim ersten bzw. beim zweiten Wurf in den Korb zu treffen, sind dabei abhängig, was sich leicht mithilfe der Sportpsychologie erklären lässt.

LeBron James, der Starspieler der Miami Heat, traf in der vergangenen Saison bei einem Doppelfreiwurf mit der Wahrscheinlichkeit 75 Prozent beim ersten Wurf in den Korb. Die Trefferwahrscheinlichkeit beim zweiten Wurf betrug ebenfalls 75 Prozent. Die Wahrscheinlichkeit für zwei Treffer nacheinander lag jedoch nur bei 60 Prozent.

3.2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass LeBron James auch beim zweiten Freiwurf trifft, wenn er bereits beim ersten Freiwurf getroffen hat.
[zur Kontrolle: 80 Prozent]

3.2.3 Legen Sie für Wurf 1 und Wurf 2 eine vollständig beschriftete Vierfeldertafel an oder zeichnen Sie ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm.

3.2.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass LeBron James ...

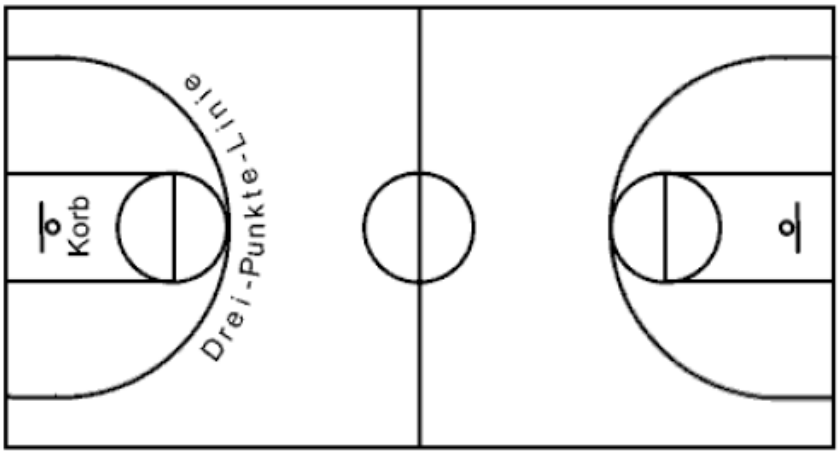
3.2.3.1 ... bei einem Doppelfreiwurf mindestens einmal trifft.

3.2.3.2 ... bei einem Doppelfreiwurf genau einmal trifft.

3.2.3.3 ... beim zweiten Wurf trifft, wenn er beim ersten Wurf nicht trifft.

3.3 Ein Spieler erzielt drei Punkte, wenn er beim Wurf oder beim Absprung weiter vom Korb entfernt ist als die am Boden markierte Drei-Punkte-Linie und der Ball im Korb landet.

Chris Bosh hatte in der Saison 2011/2012 mit 54 Prozent die höchste Trefferquote bei Drei-Punkte-Würfen im Team der Miami Heat.



3.3.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der Chris Bosh genau acht von zehn Drei-Punkte-Würfen verwandelt.

3.3.2 Ermitteln Sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass Chris Bosh bei zehn Drei-Punkte-Würfen höchstens siebenmal den Korb trifft.

3.3.2 Bestimmen Sie, wie viele Drei-Punkte-Würfe Chris Bosh benötigt, um mit mindestens 99%-iger Sicherheit wenigstens einmal den Korb zu treffen.

3.4 Im NBA-Finale spielen die zwei aus den Ausscheidungsspielen („Playoffs“) qualifizierten Mannschaften so oft gegeneinander, bis eine der beiden Mannschaften vier Spiele für sich entschieden hat; ein Unentschieden ist dabei nicht möglich („Best-of-seven“).

Im Folgenden werden die beiden im Finale stehenden Mannschaften als gleich stark eingeschätzt.

3.4.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Finale aus vier Spielen besteht.

3.4.2 Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Finale nach fünf Spielen zu Ende?

L ö s u n g e n

3.1 Kombinatorik

3.1.1 Alle Spieler des Kaders kommen nacheinander auf das Spielfeld. **1,0 Punkte**

$17! \approx 356 \cdot 10^{12}$

3.1.2 Bildung der Gruppe „Starting Five“ **1,0 Punkte**

$\binom{17}{5} = 6\,188$ (Auswahl: 5 aus 17)

3.1.3 Möglichkeiten für eine 2-1-2-Aufstellung **2,0 Punkte**

$\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{7}{2} = 1\,260$

(Guards: 2 aus 6
Center: 1 aus 4
Forwards: 2 aus 7)

3.2 Zweistufige Zufallsexperiment

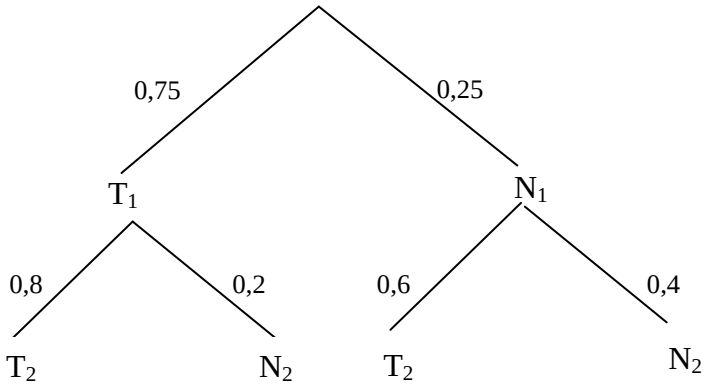
T_1 : Treffer beim ersten Wurf
T_2 : Treffer beim zweiten Wurf
N_1 : kein Treffer beim ersten Wurf
N_2 : kein Treffer beim zweiten Wurf

3.2.1 LeBron James triff auch beim 2.Wurf, wenn er schon beim 1. Wurf getroffen hat **1,5 Punkte**

$$P_{T_1}(T_2) = \frac{P(T_2 \cap T_1)}{P(T_1)} = \frac{0{,}60}{0{,}75} = 0{,}8 = 80\ \%$$

3.2.2 Vierfeldertafel oder Baumdiagramm **3,0 Punkte**

	T_1	N_1	$\sum$
T_2	0,60	0,15	0,75
N_2	0,15	0,1	0,25
$\sum$	0,75	0,25	1



3.2.3 LeBron James

3.2.3.1 Beim Doppelfreiwurf mindestens ein Treffer **1,5 Punkte**

Hier ist die Betrachtung des Gegenereignisses günstiger.

$P(T_1 \cup T_2) = 1 - P(\overline{T_1 \cup T_2}) = 1 - P(\overline{T_1} \cap \overline{T_2}) = 1 - 0{,}25 \cdot 0{,}4 = 0{,}9 = 90\%$

3.2.3.2 Beim Doppelwurf genau ein Treffer **1,5 Punkte**

$P(T_1 \cap N_2) + P(T_2 \cap N_1) = 0{,}75 \cdot 0{,}2 + 0{,}25 \cdot 0{,}6 = 0{,}15 + 0{,}15 = 0{,}3 = 30\%$

3.2.3.3 Treffer beim 2. Wurf, wenn er beim 1. Wurf nicht getroffen hat **2,0 Punkte**

$$P_{N_1}(T_2) = \frac{P(T_2 \cap N_1)}{P(N_1)} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}6}{0{,}25} = 0{,}6 = 60\ \%$$

3.3 Chris Bosch

Es liegt eine Bernoulli-Kette mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}54$ vor.

3.3.1 Genau 8 Treffer bei 10 Würfen ($n = 10$) **1,5 Punkte**

$$P(\mathrm{T} = 8) = \binom{10}{8} \cdot 0{,}54^8 \cdot 0{,}46^2 \approx 0{,}069 = 6{,}9\%$$

3.3.2 Höchstens 7 Treffer bei 10 Würfen ($n = 10$) **2,0 Punkte**

$$P(\mathrm{T} \le 7) = 1 - P(\mathrm{T} \ge 8)$$

$$= 1 - \left(\binom{10}{8} \cdot 0{,}54^8 \cdot 0{,}46^2 + \binom{10}{9} \cdot 0{,}54^9 \cdot 0{,}46^1 + \binom{10}{10} \cdot 0{,}54^{10} \cdot 0{,}46^0 \right)$$

$$= 1 - (0{,}069 + 0{,}018 + 0{,}002) = 1 - 0{,}0089 = 0{,}911 = 91{,}1\%$$

3.3.3 Berechnung der Kettenlänge **3,5 Punkte**

$$P(T \ge 1) > 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - P(T = 0) > 0{,}99$$

$$\Leftrightarrow 1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}54^0 \cdot 0{,}46^n > 0{,}99$$

$$\Leftrightarrow 1 - 0{,}46^n > 0{,}99$$

$$\Leftrightarrow 0{,}76^n < 0{,}01$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}46)} \approx 5{,}93$$

Der Spieler Chris Bosh benötigt mindestens 6 Drei-Punkte-Würfe.

3.4 NBA-Finale

A: Mannschaft A gewinnt das Spiel
B: Mannschaft B gewinnt das Spiel

3.4.1 Finale mit genau 4 Spielen **2,0 Punkte**

$$P(\text{Spieleanzahl 4}) = P(\textit{Eine Mannschaft gewinnt die ersten 4 Spiele})$$
$$= P((A,A,A,A)) + P((B,B,B,B))$$
$$= 0{,}5^4 + 0{,}5^4 = 0{,}125 = 12{,}5\%$$

3.4.2 Finale mit genau 5 Spielen **2,5 Punkte**

$$P(\text{Spieleanzahl 5}) = P((B,A,A,A,A)) + P((A,B,A,A,A)) + P((A,A,B,A,A))$$
$$+ P((A,A,A,B,A)) + P((A,B,B,B,B)) + P((B,A,B,B,B))$$
$$+ P((B,B,A,B,B)) + P((B,B,B,A,B))$$
$$= 0{,}5^5 \cdot 8 = 0{,}25 = 25{,}0\%$$

Schriftliche Abiturprüfung 2010

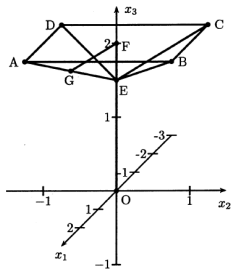
G-Kurs

Haupttermin

Themenübersicht

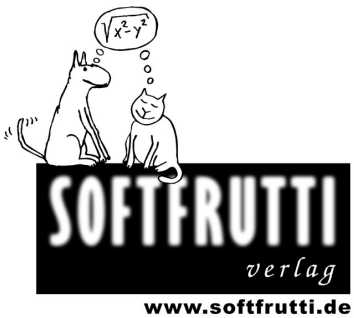
- Aufgabe 1: **Analysis**
  - Betrachtung der Funktionen $f(x) = (4 - 4x) \cdot e^x$ und $g(x) = \frac{6 - 6x}{x^2 + 3}$
  - Modellierung: Maske aus Pappe
  - Beschreibung eines Bakterienwachstums mithilfe der ganzrationalen Funktion $b(x) = \frac{1}{27}\ (6x^3 - x^4)$

- Aufgabe 2: **Analytische Geometrie**



  - Modellierung: Wäschespinne
  - Mittelpunkt einer Strecke
  - Winkel zwischen zwei Vektoren
  - Fußpunkt des Lotes auf eine Strecke

- Aufgabe 3: **Stochastik**
  - Berechnung von Wahrscheinlichkeiten
  - Aufstellen und Auswerten eines Baumdiagramms
  - Bedingte Wahrscheinlichkeit
  - Bernoulli-Kette



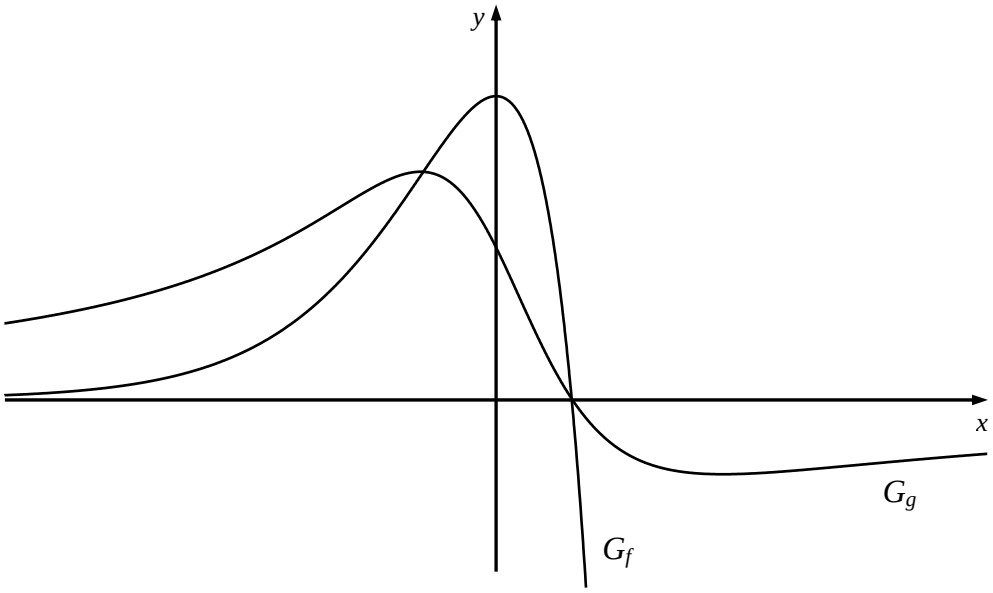
Aufgabe 1

ANALYSIS

1. Gegeben sind die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = (4 - 4x) \cdot e^x \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{6 - 6x}{x^2 + 3} .$$

In der Skizze sind die Schaubilder G_f und G_g dieser beiden Funktionen dargestellt.



1.1 Berechnen Sie die Nullstelle, die Grenzwerte für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ (mit Begründung) und den Wendepunkt der Funktion *f*.

[Zur Kontrolle: $f'(x) = -4x \cdot e^x$ und $f''(x) = (-4 - 4x) \cdot e^x$]

1.2 Berechnen Sie die Nullstelle, die Asymptote (mit Begründung) und die Extrempunkte der Funktion *g*.

[Zur Kontrolle: $g'(x) = 6 \cdot \frac{x^2 - 2x - 3}{(x^2 + 3)^2}$

ohne Nachweis benützen: $g''(x) = -12 \cdot \frac{x^3 - 3x^2 - 9x + 3}{(x^2 + 3)^3}$]

1.3 Betrachtet man die Skizze, so scheint der Wendepunkt der Funktion *f* mit dem Hochpunkt der Funktion *g* zusammenzufallen.

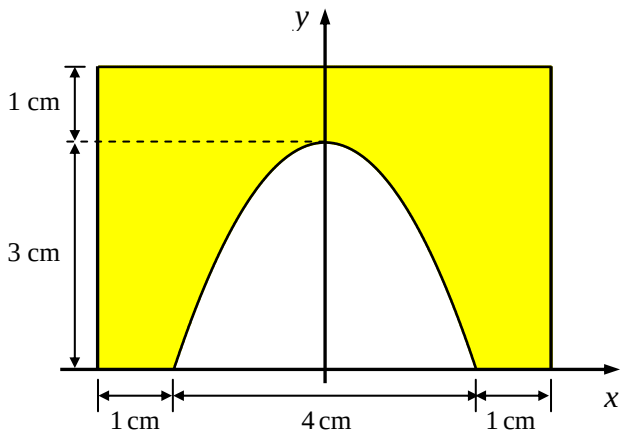
Entscheiden und begründen Sie, ob diese Vermutung zutrifft.

2. Bestimmen Sie den Inhalt der abgebildeten grauen Fläche mit Hilfe der Integralrechnung. Ein Teil des Randes der gesuchten Fläche wird durch die Parabel mit der Gleichung

$$f(x) = 3 - \frac{3}{4}x^2$$

beschrieben (1 Längeneinheit entspricht 1 cm).

Skizze (nicht maßstabsgetreu):



3. Die Anzahl der Bakterien einer neu angesetzten Kultur kann unter bestimmten Bedingungen (z. B. begrenztes Nahrungsangebot, begrenzter Platz) näherungsweise mit folgender Funktionsgleichung beschrieben werden:

$$b(x) = \frac{1}{27} \cdot (6x^3 - x^4)$$

x: Zeit in Tagen ; $x > 0$

b: Anzahl der Bakterien in Millionen

3.1 Nach wie vielen Tagen sind alle Bakterien abgestorben?

3.2 Wann ist die Anzahl der Bakterien am höchsten und wie viele Bakterien sind es dann?

3.3 Skizzieren Sie die Anzahl der Bakterien in Abhängigkeit von der Zeit in ein geeignetes Koordinatensystem.

3.4 Die Wachstumsrate der Funktion b wird durch ihre erste Ableitung beschrieben.

Erläutern Sie im Zusammenhang mit der in dieser Aufgabe beschriebenen Situation den Begriff „Wachstumsrate“ und bestimmen Sie, wann die Wachstumsrate am höchsten ist.

L ö s u n g e n

1. Untersuchung einer ganz- und einer gebrochenrationalen Funktion

Betrachtet werden die Funktionen $f(x) = (4-4x)\cdot e^x$ und $g(x) = \frac{6-6x}{x^2+3}$.

1.1 Untersuchung der Funktion *f* auf Nullstellen, Grenzwerte und Wendepunkte 7,5 Punkte

Nullstelle von f (1,0 P)

$(4-4x)\cdot e^x = 0 \Leftrightarrow 4-4x = 0 \Leftrightarrow -4x = -4 \Leftrightarrow x = 1$ ($e^x \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$)

- *Grenzwerte* (2,0 P)
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\underbrace{(4-4x)}_{\downarrow +\infty} \cdot \underbrace{e^x}_{\downarrow 0^+}) = 0^+$ (Die e-Funktion dominiert.)
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\underbrace{(4-4x)}_{\downarrow -\infty} \cdot \underbrace{e^x}_{\downarrow +\infty}) = -\infty$
- *Wendepunkt* (4,5 P)
  - Ableitungen: $f'(x) = (4-4x)\cdot e^x + (-4)\cdot e^x = -4x\cdot e^x$

    $f''(x) = -4x\cdot e^x + (-4)\cdot e^x = (-4-4x)\cdot e^x$
  - Notwendige Bedingung

    $f''(x) = 0 \Leftrightarrow (-4-4x)\cdot e^x = 0 \Leftrightarrow -4-4x = 0 \Leftrightarrow -4x = 4 \Leftrightarrow x = -1$
  - Hinreichende Bedingung

    Es liegt eine Nullstelle von f'' mit Vorzeichenwechsel und damit eine Wendestelle vor.
  - Angabe des Wendepunkts

    Mit $f(-1) = 8\cdot e^{-1} \approx 2{,}943$ ergibt sich der Wendepunkt $W(-1 \mid 8e^{-1})$.

1.2 Untersuchung der Funktion *g* auf Nullstellen, Asymptote, Extrempunkte 7,5 Punkte

Nullstelle von g (1,0 P)

$6 - 6x = 0 \Leftrightarrow -6x = -6 \Leftrightarrow x = 1$

Asymptote von g (2,0 P)

Es liegt eine echt gebrochenrationale Funktion vor (Zählergrad < Nennergrad).
Die *x*-Achse ist daher Asymptote

Extrempunkte von g (4,5 P)

- Ableitung: $g'(x) = \frac{(x^2+3)\cdot(-6) - (6-6x)\cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{-6x^2-18-12x+12x^2}{(x^2+3)^2}$

  $= \frac{6x^2-12x-18}{(x^2+3)^2} = 6\cdot\frac{x^2-2x-3}{(x^2+3)^2}$
- Notwendige Bedingung

  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$

– Hinreichende Bedingung

Wegen $g''(-1) = -\frac{3}{2} < 0$, ist –1 eine Maximumstelle.

Wegen $g''(3) = \frac{1}{6} > 0$, ist 3 eine Minimumstelle

– Angabe der Extrempunkte

Mit $g(-1) = 3$ ergibt sich der Hochpunkt $H(-1 \mid 3)$.
Mit $g(3) = -1$ ergibt sich der Tiefpunkt $T(3 \mid -1)$.

1.3 Zusammenfall von Wendepunkt von G_f und Hochpunkt von G_g **1,0 Punkte**

Es gilt $f(-1) \approx 2{,}943$ und $g(-1) = 3$. Damit gilt $f(-1) \neq g(-1)$.
Der Wendepunkt von G_f und der Hochpunkt von G_g fallen somit nicht zusammen.

2. Flächeninhalt der grau dargestellten Fläche **4,0 Punkte**

- *Flächeninhalt des Rechtecks* (0,5 P)
  $\mu(A_1) = 6 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = 24 \text{ cm}^2$
- *Inhalt der Parabelfläche unter Ausnützen der Achsensymmetrie* (3,0 P)
  $\mu(A_2) = 2 \cdot \int_0^2 f(x)\,dx = 2 \cdot \int_0^2 (-\frac{3}{4}x^2 + 3)dx = 2 \cdot \left[-\frac{1}{4}x^3 + 3x\right]_0^2 = 2 \cdot (-2 + 6) = 8$
- *Gesuchter Flächeninhalt* (0,5 P)
  $\mu(A) = \mu(A_1) - \mu(A_2) = 24 \text{ cm}^2 - 8 \text{ cm}^2 = 16 \text{ cm}^2$

3. Anzahl der Bakterien einer neu angesetzten Kultur

Betrachtet wird für $x > 0$ die Funktion mit der Gleichung $b(x) = \frac{1}{27} \cdot (6x^3 - x^4)$.

3.1 Zahl der Tage **2,0 Punkte**

Gesucht ist die Zeit, nach der der Bakterienzahl 0 beträgt.

$$b(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{27} \cdot (6x^3 - x^4) = 0 \Leftrightarrow x^3 \cdot (6 - x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x = 0}_{0 \notin D} \vee x = 6$$

Nach 6 Tagen sind alle Bakterien abgestorben.

3.2 Anzahl der Bakterien am höchsten **4,0 Punkte**

Extremwertbestimmung:

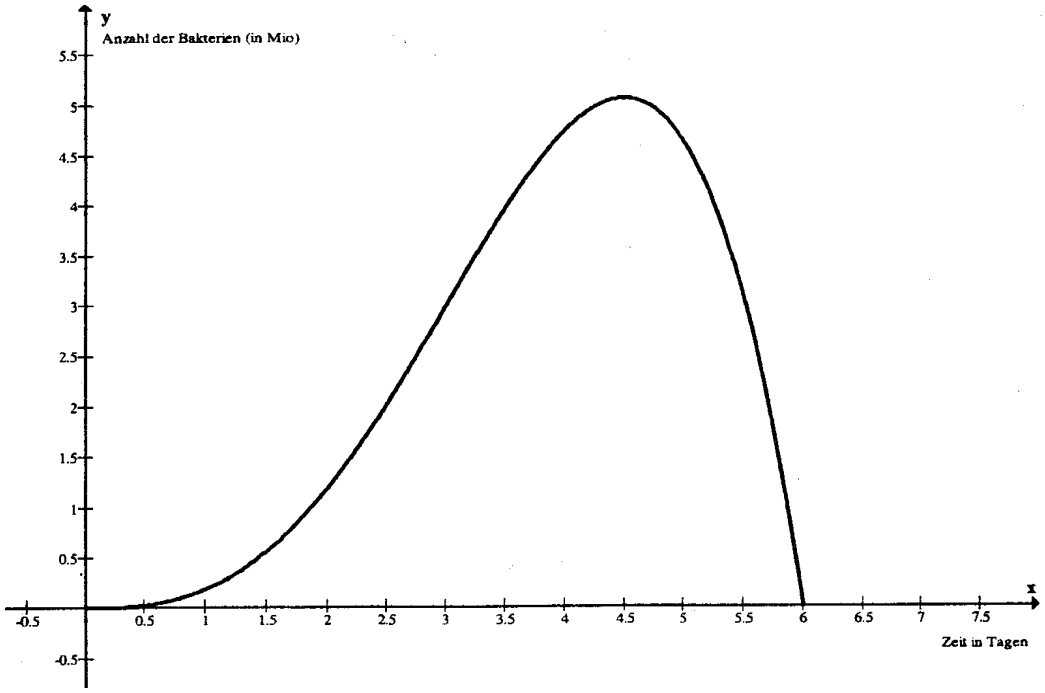
- Ableitung: $b'(x) = \frac{1}{27} \cdot (18x^2 - 4x^3)$
- Notwendige Bedingung: $b'(x) = 0 \Leftrightarrow 18x^2 - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 \cdot (9 - 2x) = 0$
  $\Leftrightarrow \underbrace{x = 0}_{0 \notin D} \vee x = 4{,}5$
- Hinreichende Bedingung:
  Man erhält folgende Vorzeichentabelle:

x	1	4,5	5
$b'(x)$	+	0	–

Bei 4,5 liegt eine lokale Maximumstelle vor.

Es gilt: $b(4{,}5) \approx 5{,}0625$, d.h. es liegen 5 062 500 Bakterien vor.
Nach 4,5 Tagen ist die Anzahl der Bakterien am höchsten, sie beträgt etwa 5 Millionen.

3.3 Skizze des Graphen **2,0 Punkte**



3.4 Erläuterung des Begriffs Wachstumsrate **2,0 Punkte**

Wachstumsrate: Änderung der Bakterienzahl pro Zeiteinheit

Gesucht ist die Maximumstelle von b' (entspricht einer Wendestelle der Funktion b).

$$b''(x) = \frac{1}{27} \cdot (36x - 12x^2) = \frac{1}{27} \cdot 12x \cdot (3 - x)$$

$$b''(x) \Leftrightarrow \underbrace{x = 0}_{0 \notin D} \vee x = 3$$

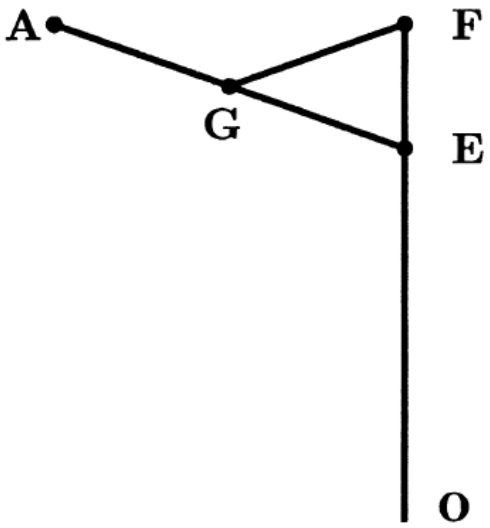
3 ist eine Nullstelle von b'' mit Vorzeichenwechsel der Form + 0 – und damit eine Maximumstelle von b'.

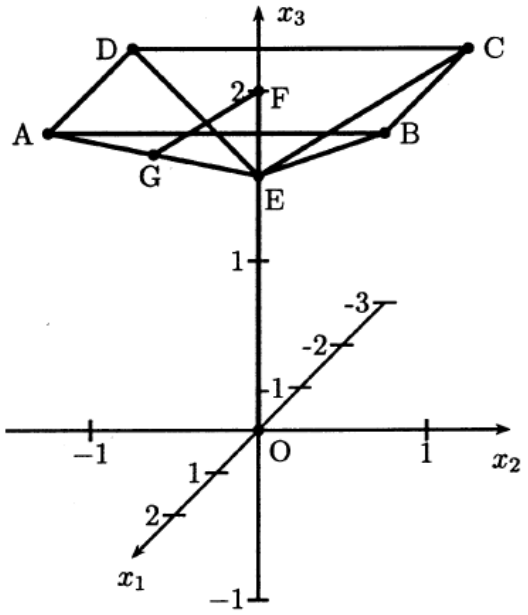
Nach 3 Tagen ist die Wachstumsrate am höchsten.

Aufgabe 2
ANALYTISCHE GEOMETRIE

Eine Wäschespinne besteht aus einem Pfosten, an dem vier Ausleger symmetrisch zueinander im Punkt E befestigt sind. Die Endpunkte A, B, C und D der Ausleger bilden ein Quadrat und sind durch Leinen miteinander verbunden, an denen die Wäsche zum Trocknen aufgehängt wird. Gemäß den angegebenen Abbildungen sind folgende Punkte des Pfostens und der Ausleger gegeben (1 Längeneinheit entspricht l m):

A(1 | –1 | 2) , B(1 | 1 | 2) , E(0 | 0 | 1,5) , F(0 | 0 | 2).





1. Geben Sie die Koordinaten der Punkte C und D an.

2. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden, die entlang des Auslegers $\overline{EA}$ verläuft.

3. Stellen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene *e* auf, in der die Ausleger $\overline{EA}$ und $\overline{EB}$ liegen.

4. Bestimmen Sie für den Ausleger $\overline{EA}$ die Koordinaten seines Mittelpunktes.

5. Zur Stabilisierung des Auslegers $\overline{EA}$ wird vom Endpunkt F des Pfostens eine Strebe zum Punkt G(0,5 | –0,5 | 1,75) des Auslegers eingebaut. Welche Länge besitzt diese Strebe?

6. Berechnen Sie das Maß des spitzen Winkels, den die Strebe $\overline{GF}$ mit dem Ausleger $\overline{EA}$ einschließt.

7. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes G' auf dem Ausleger $\overline{EA}$, wenn die Strebe $\overline{G'F}$ senkrecht auf dem Ausleger $\overline{EA}$ stehen soll.

8. Über der Wäscheleine von A nach B hängt ein Betttuch. Bestimmen Sie den Abstand des Wäschestücks vom Pfosten $\overline{OF}$.

L ö s u n g e n

1. Koordinaten der Punkte C und D **1,0 Punkte**

Das Quadrat ABCD hat die Seitenlänge 2.

Gesuchte Punkte: C(–1 | 1 | 2) (–2 in x_1- Richtung im Vergleich zu B)

D(–1 | –1 | 2) (–2 in x_1- Richtung im Vergleich zu A)

2. Gleichung der Geraden, die entlang des Auslegers $\overline{\text{EA}}$ verläuft **1,0 Punkte**

– Verbindungsvektor von A und E: $\overrightarrow{\text{EA}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$

– Gesuchte Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$

3. Koordinatengleichung der Ebene *e*, in der die Ausleger $\overline{\text{EA}}$ und $\overline{\text{EB}}$ liegen **3,5 Punkte**

– Zweiter Richtungsvektor: $\overrightarrow{\text{EB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$

– Normalenvektor: $\overrightarrow{\text{EA}} \times \overrightarrow{\text{EB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{n}$

– Normalengleichungen:

Punktnormalengleichung: $e_2: \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,5 \end{pmatrix} \right] = 0$

Allgemeine Normalengleichung: $e_2: \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 3 = 0$

Koordinatengleichung: $e_2: -x_1 + 2x_3 - 3 = 0$

4. Koordinaten des Mittelpunktes für den Ausleger $\overline{\text{EA}}$ **1,0 Punkte**

Ortsvektor: $\overrightarrow{m} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{e} + \vec{a}) = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3,5 \end{pmatrix}$

Mittelpunkt M(0,5 | –0,5 | 1,75)

5. Länge der Strebe vom Endpunkt F des Pfostens zum Punkt G(0,5 | –0,5 | 1,75) des Auslegers **1,5 Punkte**

Verbindungsvektor: $\overrightarrow{GF} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0,5\\-0,5\\1,75\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0,5\\0,5\\0,25\end{pmatrix}$

Länge: $|\overrightarrow{GF}| = \sqrt{0,25+0,25+0,0625} = \sqrt{0,5625} = 0,75$ (Meter)

6. Maß des spitzen Winkels, den die Strebe $\overline{GF}$ mit dem Ausleger $\overline{EA}$ einschließt **2,5 Punkte**

Es gilt: $\overrightarrow{GF} = \begin{pmatrix}-0,5\\0,5\\0,25\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{GE} = \begin{pmatrix}0\\0\\1,5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0,5\\-0,5\\1,75\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0,5\\0,5\\-0,25\end{pmatrix}$

Betrachtet wird der Winkel zwischen $\overrightarrow{GF}$ und $\overrightarrow{GE}$.

Winkelformel: $\cos(\gamma) = \left|\frac{\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{GE}}{|\overrightarrow{GF}|\cdot|\overrightarrow{GE}|}\right| = \left|\frac{0,25+0,25-0,0625}{0,75\cdot 0,75}\right| = \frac{0,4375}{0,5625} = 0,7778$

Es folgt: $\gamma \approx 38,9°$

7. Koordinaten des Punktes G' auf dem Ausleger $\overline{EA}$, wenn die Strebe $\overline{G'F}$ senkrecht auf dem Ausleger $\overline{EA}$ stehen soll **2,5 Punkte**

Berechnet wird der Fußpunkt des Lotes von F auf $\overline{EA}$**:**

- Hilfsebene e_1 durch F senkrecht zu EA: $\begin{pmatrix}1\\-1\\0,5\end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 1 = 0$
- Gerade g = EA: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1,5\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\0,5\end{pmatrix}$
- Schnitt der Geraden g der Ebene e_1:

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0,5\end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix}0\\0\\1,5\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0,5\end{pmatrix}\right] - 1 = 0 \Leftrightarrow 0,75 + 2,25\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{9}$$

- Einsetzen dieses Werts in die Gleichung von g ergibt den Punkt G'$(\frac{1}{9} \mid -\frac{1}{9} \mid \frac{14}{9})$.

8. Abstand des Wäschestücks vom Pfosten $\overline{OF}$ **2,0 Punkte**

Die Gerade g durch die Punkte A und B verläuft parallel zur x_2-x_3-Ebene im Abstand 1.

Die durch das Betttuch vorgegebene Ebene hat vom Pfosten den Abstand 1m.

Aufgabe 3

WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

In einer Urne befinden sich sechs Kugeln: zwei rote, eine weiße und drei schwarze.

1. Bei einem ersten Glücksspiel zieht man eine Kugel aus dieser Urne und stellt die Farbe der Kugel fest. Gegeben sind die folgenden Ereignisse:

R: Es wird eine rote Kugel gezogen.

W: Es wird eine weiße Kugel gezogen.

S: Es wird eine schwarze Kugel gezogen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(S)$, $P(\overline{W})$, $P(S \cup W)$ und $P(\overline{R} \cap \overline{S})$.

2. Bei einem zweiten Glücksspiel wird zunächst eine Kugel aus der Urne gezogen und anschließend an einem von drei farbigen Glücksrädern gedreht. Die Farbe der Kugel entscheidet, an welchem Glücksrad man anschließend um einen Gewinn spielt:

- Zieht man eine rote Kugel, wird das rote Glücksrad gedreht.
- Zieht man eine weiße Kugel, wird das weiße Glücksrad gedreht.
- Zieht man eine schwarze Kugel, wird das schwarze Glücksrad gedreht.

Bei dem roten Glücksrad beträgt die Gewinnchance 50%, bei dem weißen 75% und bei dem schwarzen 25%.

2.1 Zeichnen Sie ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm zu folgendem zweistufigen Zufallsexperiment: Ziehen einer Kugel aus der Urne und anschließendes Drehen des Glücksrades der entsprechenden Farbe.

2.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: Man gewinnt am roten Glücksrad.

B: Man verliert am weißen Glücksrad.

C: Man gewinnt. [Zur Kontrolle: $P(C) = \frac{5}{12}$]

D: Man verliert.

2.3 Man hat gewonnen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man an dem schwarzen Glücksrad gespielt hat?

2.4 Peter spielt das Glücksspiel zehnmal. Die Gewinnwahrscheinlichkeit bei einem Spiel beträgt $\frac{5}{12}$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: Peter gewinnt genau fünfmal.

B: Peter gewinnt höchstens einmal.

C: Peter gewinnt mindestens einmal.

L ö s u n g e n

Betrachtet wird eine Urne mit zwei roten, einer weißen und drei schwarzen Kugeln.

1.1 Berechnung von Wahrscheinlichkeiten gegebener Ereignisse **3,0 Punkte**

$P(\mathrm{S}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (0,5 P)

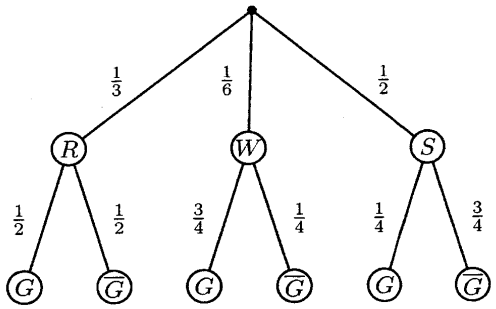
$P(\overline{\mathrm{W}}) = \frac{5}{6}$ (0,5 P)

$P(\mathrm{S} \cup \mathrm{W}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (1,0 P)

$P(\overline{\mathrm{R}} \cap \overline{\mathrm{S}}) = P(\mathrm{W}) = \frac{1}{6}$ (1,0 P)

2. Zweites Glückspiel mit Ziehung aus einer Urne und Drehen am Glücksrad

2.1 Baumdiagramm **2,0 Punkte**



2.2 Berechnung von Wahrscheinlichkeiten gegebener Ereignisse **3,5 Punkte**

$P(\mathrm{A}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ (UND-Ereignis, 1 Pfad im Baum) (0,5 P)

$P(\mathrm{B}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$ (UND-Ereignis, 1 Pfad im Baum) (0,5 P)

$P(\mathrm{C}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$ (3 Pfade) (1,5 P)

$P(\mathrm{D}) = 1 - P(\mathrm{C}) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$ (Gegenereignisregel günstig) (1,0 P)

2.3 Wahrscheinlichkeiten, dass man am schwarzen Glücksrad gewonnen hat **2,0 Punkte**

Es handelt sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit.

Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit gesucht ist: *S* (Spiel am schwarzen Glücksrad)

Bedingung: *G* (Man hat gewonnen.)

Damit ergibt sich:

$$P_G(S) = P(S \mid G) = \frac{P(\mathrm{S} \cap \mathrm{G})}{P(\mathrm{G})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{5}{12}} = \frac{3}{10}$$

2.4 Zehnmalige Teilnahme am Glücksspiel

Interpretation: Bernoulli-Kette der Länge $n = 20$

Treffer T: „Gewinn beim Spiel“ mit $p = \frac{5}{12}$

A: „Genau fünf Gewinne.“ **1,0 Punkte**

$$P(\text{A}) = P(T = 5) = \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^5 \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^5 \approx 0{,}214 = 21{,}4\%$$

B: „Höchstens ein Gewinn.“ **2,0 Punkte**

$$P(\text{B}) = P(T \le 1) = P(T = 0) + P(T = 1)$$

$$= \binom{10}{0} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^0 \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^{10} + \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^1 \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^9$$

$$\approx 0{,}0046 + 0{,}0326 = 0{,}0372 = 3{,}72\%$$

C: „Höchstens ein Gewinn.“ **1,5 Punkte**

$$P(\text{C}) = P(T \ge 1) = 1 - P(T = 0) = 1 - \binom{10}{0} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^0 \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^{10}$$

$$\approx 1 - 0{,}0046 = 0{,}9954 = 99{,}54\ \%$$

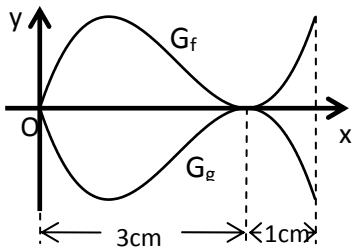
Schriftliche Abiturprüfung 2010

G-Kurs

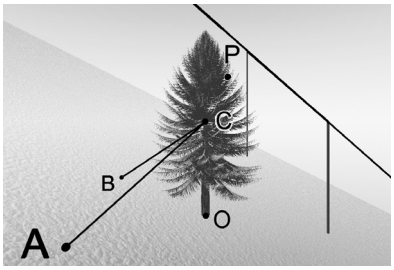
Nachtermin

Themenübersicht

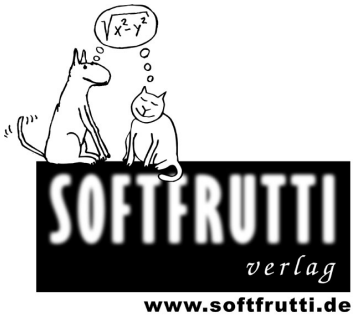
- Aufgabe 1: **Analysis**
  - Betrachtung der ganzrationalen Funktionen $f(x)=\frac{1}{3}x\cdot(x-3)^2$
  - Modellierung: Fischlogo
  - Betrachtung der e-Funktion $f(x) = \left(x^2-3\right)\cdot e^{-x}+1{,}5$.



- Aufgabe 2: **Analytische Geometrie**
  - Modellierung: Hang mit Tannenbaum
  - Winkel zwischen Gerade und Ebene
  - Flächeninhalt
  - Abstand Punkt-Ebene
  - Abstand Punkt-Gerade



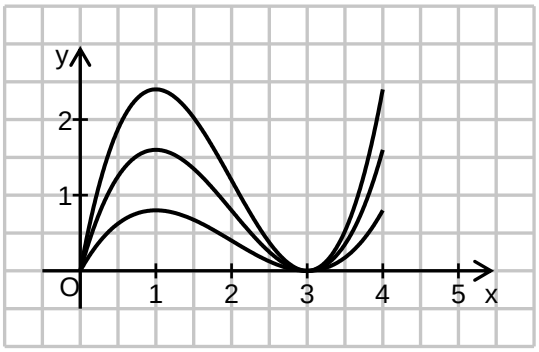
- Aufgabe 3: **Stochastik**
  - Aufstellen und Auswerten einer Vierfeldertafel
  - Bernoulli-Kette
  - Bedingte Wahrscheinlichkeit



Aufgabe 1

ANALYSIS

1.



Bei der Kreation eines „Fisch“-Logos für einen Angelshop soll eine ganzrationale Funktion verwendet werden. Der Graph dieser Funktion soll die gleichen charakteristischen Eigenschaften wie die drei oben dargestellten Funktionsgraphen besitzen.

1.1 Begründen Sie, dass die gewünschte ganzrationale Funktion folgende Form hat:

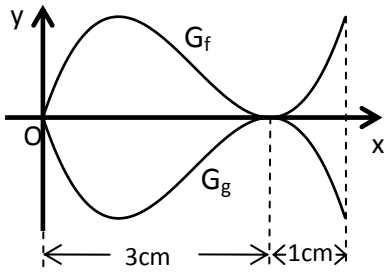
$$f_a : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} \quad ; \quad x \mapsto a \cdot x \cdot (x-3)^2 \quad (\text{mit } a > 0) .$$

1.2 Für das Logo soll die Funktion so angepasst werden, dass die Steigung an der Stelle 0 den Wert 3 hat. Berechnen Sie den entsprechenden Wert für den Parameter *a*.

1.3 Nehmen Sie im Folgenden an, dass das Logo mit Hilfe der Funktion

$$f : [0\,;\,4] \to \mathbb{R} \quad ; \quad x \mapsto \tfrac{1}{3} x \cdot (x-3)^2 \qquad (\text{also } a = \tfrac{1}{3})$$

gebildet wird. Dabei entspricht 1 LE im Koordinatensystem 1 cm in der Realität.



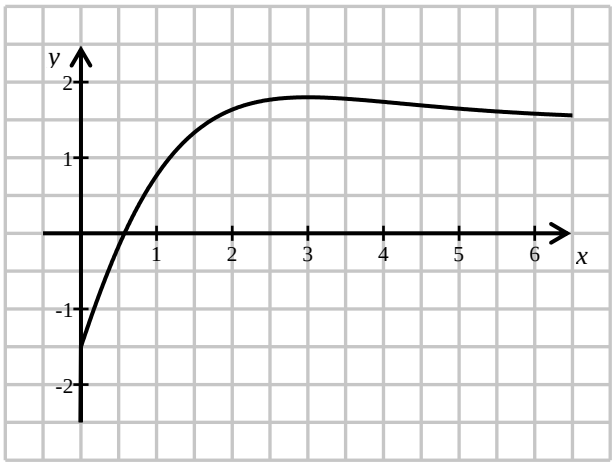
Der Graph G_f bildet zusammen mit seiner Spiegelung an der *x*-Achse (dem Graphen G_g) das gewünschte Fischlogo.

1.3.1 Geben Sie für die Funktion g die zugehörige Funktionsgleichung an.

1.3.2 Die Länge des Logos beträgt 4 cm. Bestimmen Sie rechnerisch, wo die breiteste Stelle des Logos ist und wie breit es an dieser Stelle wird.

1.3.3 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Logos, das durch die beiden Funktionen *f* und *g* sowie die Gerade mit der Gleichung *x* = 4 begrenzt wird.

2. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \left(x^2 - 3\right) \cdot e^{-x} + 1{,}5$.
In der Abbildung ist der Graph von f für $x \geq 0$ gezeichnet:



2.1 Berechnen Sie die Grenzwerte von f für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$.

2.2 Bestimmen Sie die Extrempunkte.
[Zur Kontrolle: $f'(x) = e^{-x}(-x^2 + 2x + 3)$]

2.3 Begründen Sie, dass die Funktion eine weitere Nullstelle für $x \leq 0$ besitzt.

2.4 Skizzieren Sie mit den Ergebnissen aus 2.1 bis 2.3 den Graphen der Funktion f für $x \leq 0$.

2.5 Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(x) = \left(-x^2 - 2x + 1\right) \cdot e^{-x} + 1{,}5x$ eine Stammfunktion zu f darstellt.

2.6 Bestimmen Sie den Mittelwert der Funktionswerte im Intervall $[0\,;\,6]$.

L ö s u n g e n

1. „Fisch“-Logo als Graph einer ganzrationale Funktion

1.1 Begründung der Funktionsgleichung **2,0 Punkte**

- 0 ist einfache Nullstelle.
- 3 ist doppelte Nullstelle und Extremstelle.
- Es gilt $a > 0$, da $f(x) > 0$ für alle $x \in D$ ist.

1.2 Berechnung eines Parameterwertes **3,0 Punkte**

Mit der Produktregel folgt: $f'(x) = a(x-3)^2 + ax \cdot 2 \cdot (x-3) = a(x-3)^2 + 2ax \cdot (x-3)$.

Bedingung: $f'(0) = 3 \;\Leftrightarrow\; a \cdot (0-3)^2 + 0 = 3 \;\Leftrightarrow\; 9a = 3 \;\Leftrightarrow\; a = \frac{1}{3}$

1.3 Logo aus vorgegebener Funktion

Betrachtet wird die Funktion mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{3}x(x-3)^2$

1.3.1 Gleichung der Funktion *g* **1,0 Punkte**

Spiegelung an der *x*-Achse: $g(x) = -f(x) = -\frac{1}{3}x(x-3)^2$

1.3.2 Breiteste Stelle des Logos **4,5 Punkte**

- *Ableitung* (1,0 P)

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x-3)^2 + \frac{1}{3}x \cdot 2 \cdot (x-3) = \frac{1}{3}(x-3)(x-3+2x)$$
$$= \frac{1}{3}(x-3)(3x-3) = (x-3)(x-1)$$

- *Extremwertbestimmung* (3,5 P)
  - Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 3 \;\vee\; x = 1$
  - Hinreichende Bedingung: Vorzeichentabelle

x		1		3	
$f'(x)$	+	0	–	0	+

Für die Stelle 1 ergibt sich der Hochpunkt $H(1 \mid \frac{4}{3})$.

  - Vergleich mit den Rändern von *D*: $f(0) = 0$ und $f(4) = \frac{4}{3}$.

Die Breite des Logos beträgt $2 \cdot \frac{4}{3}$ cm $= \frac{8}{3}$ cm.

1.3.3 Flächeninhalt des Logos **4,0 Punkte**

Es gilt $f(x) = \frac{1}{3}x(x-3)^2 = \frac{1}{3}x(x^2-6x+9) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$.

Unter Ausnützung der Symmetrie erhält man:

$$\mu(A) = 2 \cdot \int_0^4 f(x)\,dx = 2 \cdot \left[\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^4$$
$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{12} \cdot 4^4 - \frac{2}{3} \cdot 4^3 + \frac{3}{2} \cdot 4^2\right) - 0 = 5\frac{1}{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

2. Untersuchung einer Exponentialfunktion

Betrachtet wird die Funktion mit der Gleichung $f(x) = \left(x^2 - 3\right) \cdot \mathrm{e}^{-x} + 1{,}5$.

2.1 Bestimmung der Grenzwerte **2,5 Punkte**

Grenzwerte:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (\underbrace{(x^2 - 3)}_{\downarrow\ +\infty} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-x}}_{\downarrow\ +\infty} + 1{,}5) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\underbrace{(x^2 - 3)}_{\downarrow\ +\infty} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-x}}_{\downarrow\ 0^+} + 1{,}5) = 0 + 1{,}5 = 1{,}5$

2.2 Bestimmung der Extrempunkte **4,0 Punkte**

- *Ableitung* (1,5 P)

  $f'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} + (x^2 - 1) \cdot \mathrm{e}^{-x} \cdot (-1) = (2x - x^2 + 3) \cdot \mathrm{e}^{-x} = -(x^2 - 2x - 3) \cdot \mathrm{e}^{-x}$

- *Extremwertbestimmung* (2,5 P)
  - Notwendige Bedingung für Extrema

    $f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x^2 - 2x - 3 = 0 \ \Leftrightarrow\ (x - 3) \cdot (x + 1) \ \Leftrightarrow\ x = 3 \ \vee\ x = -1$

    (Zu beachten ist, dass $\mathrm{e}^{-x} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt).
  - Hinreichende Bedingung: Vorzeichentabelle

x		-1		3	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

  - Angabe der Extrempunkte

    Funktionswerte: $f(-1) = -2\mathrm{e} + 1{,}5 \approx -3{,}94$

    $f(3) = \frac{6}{\mathrm{e}^3} + 1{,}5 \approx 1{,}80$

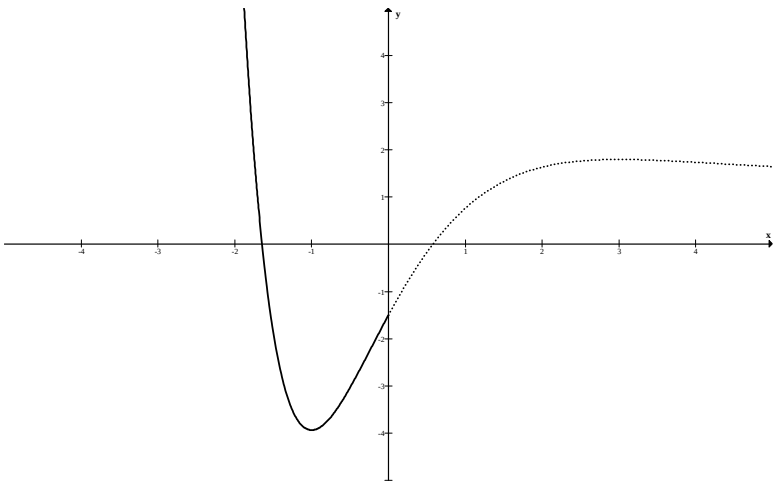
    Damit ergeben sich der Tiefpunkt $T(-1 \mid -3{,}94)$ und der Hochpunkt $H(3 \mid 1{,}80)$.

2.3 Weitere Nullstelle für $x \leq 0$ **2,5 Punkte**

Es gilt $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ und beispielsweise $f(-1) < 0$.

Die Funktion f ist stetig, der Graph ist eine zusammenhängende Linie. Daher muss es einen Schnittpunkt mit der x-Achse geben.

2.4 Graph **2,0 Punkte**



2.5 Nachweis der Stammfunktionseigenschaft **2,0 Punkte**

Durch Ableiten von $F(x) = \left(-x^2 - 2x + 1\right) \cdot \mathrm{e}^{-x} + 1{,}5x$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} F'(x) &= (-2x - 2)\mathrm{e}^{-x} + (-x^2 - 2x + 1)\mathrm{e}^{-x} \cdot (-1) + 1{,}5 \\ &= (-2x - 2 + x^2 + 2x - 1)\mathrm{e}^{-x} + 1{,}5 \\ &= (x^2 - 3)\mathrm{e}^{-x} + 1{,}5 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

2.6 Mittelwert **2,5 Punkte**

Nach der Formel für den Mittelwert ergibt sich:

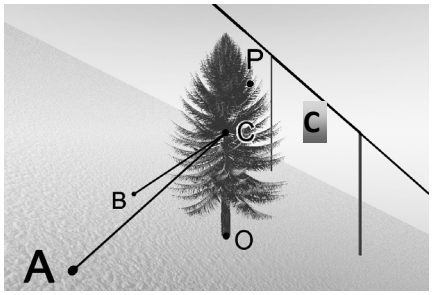
$$\begin{aligned} \overline{m} &= \frac{1}{6-0} \int_0^6 f(x)\, dx \\ &= \frac{1}{6} \left[\left(-x^2 - 2x + 1\right) \cdot \mathrm{e}^{-x} + 1{,}5x\right]_0^6 \\ &= \frac{1}{6} \left[\left((-36 - 12 + 1)\mathrm{e}^{-6} + 9 \right) - (1 \cdot \mathrm{e}^{-0} + 1{,}5 \cdot 0) \right] \\ &= \frac{1}{6} \left(-47\mathrm{e}^{-6} + 9 - 1\right) \approx 1{,}31 \end{aligned}$$

Aufgabe 2
ANALYTISCHE GEOMETRIE

An einem gleichmäßig geneigten Hang wird ein Tannenbaum mit Seilen gesichert, die in den Punkten A und B des Hangs befestigt werden.

In einem passenden Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 m) steht der Fuß des Baums im Ursprung.

Die Koordinaten der Punkte A und B lauten: A(–1 | –4 | 1) und B(–2 | –3 | 2). Die Seile werden in 5 m Höhe im Punkt C am Baum befestigt.



1. Zeigen Sie, dass eine Koordinatengleichung der Ebene e, in der der Hang liegt, die Form e: $x_1 + x_3 = 0$ hat.

2. Stellen Sie Gleichung der Geraden auf, längs der das Seil $\overline{AC}$ gespannt ist.

3. Berechnen Sie den Winkel, den das durch A gespannte Seil mit der Hangebene bildet.

4. Zwischen den Seilen wird ein Tuch gespannt, das genau das Dreieck ABC bedeckt.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Tuches.

5. Im Punkt P(1 | 1 | 7) wird ein Nistkasten befestigt.
Wie groß ist seine kürzeste Entfernung zum Hang?

6. Eine Stromleitung, die in 8 m Höhe parallel zur Hangebene verläuft, ist in der Nähe des Baums an zwei Masten befestigt, welche in den Punkten $F_1(4 \mid 4 \mid -4)$ und $F_2(-4 \mid 0 \mid 4)$ im Boden verankert sind. Berechnen Sie den Abstand des Punktes P von der Stromleitung.

L ö s u n g e n

1. Koordinatengleichung der Ebene *e*, in der der Hang liegt **3,0 Punkte**

– Richtungsvektoren: $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

– Normalenvektor: Es gilt $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$; wähle $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

– Punktnormalengleichung: $e: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$

– Allgemeine Normalengleichung: $e: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 0$

– Koordinatengleichung: $e: x_1 + x_3 = 0$

2. Gleichung der Geraden auf, längs der das Seil gespannt ist. **2,0 Punkte**

Es gilt C(0 | 0 | 5) und damit $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

Damit folgt: $g_{AC}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

3. Winkel zwischen Seil und der Hangebene **2,0 Punkte**

Es gilt $|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ und $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{33}$.

Mithilfe der Winkelformel folgt:

$$\sin(\delta) = \left| \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} \right| = \frac{1 + 0 + 4}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{33}} = \frac{5}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{33}} \approx 0{,}615 .$$

Damit ergibt sich $\delta \approx 38°$.

4. Flächeninhalt des Tuches **2,0 Punkte**

$$\mu(A) = \frac{1}{2} \cdot |\ \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}\ | = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{50} \ \ (\text{cm}^2)$$

5. Entfernung des Nistkastens zum Hang **2,0 Punkte**

Gesucht ist der Abstand des Punkt $P(1 \mid 1 \mid 7)$ von der Ebene $e: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 0$.

Nach der Abstandsformel Punkt - Ebene gilt (Nullpunkt O als Punkt der Ebene gewählt):

$$d(P\,;e) = |\ \vec{n}^0 \cdot \overrightarrow{OP}\ |$$

$$= |\ \tfrac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} \cdot \vec{p}\ |$$

$$= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \right| = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \ \ \text{(m)}$$

6. Abstand des Punktes P von der Stromleitung **4,0 Punkte**

Obere Befestigungspunkte: $H_1(4 \mid 4 \mid 4)$ und $H_2(-4 \mid 0 \mid 12)$,

Gerade durch die Punkte H_1 und H_2: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Mithilfe der Abstandsformel Punkt - Gerade ergibt sich:

$$d(P\,;g) = |\ \vec{u}^0 \times (\vec{p} - \vec{a})\ | = \left| \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2} \ \ \text{(m)}$$

Aufgabe 3

WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

1. Gegeben ist ein Zufallsexperiment mit der Ergebnismenge Ω und dem Wahrscheinlichkeitsmaß *P*. Für die Ereignisse A und B gilt:

$$P(\mathrm{A}) = 0,4 \;\; , \;\; P(\overline{\mathrm{B}}) = 0,7 \;\text{ und }\; P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0,2 \,.$$

1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse

$$P(\mathrm{B}) \,,\; P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \;\text{ und }\; P\left(\overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}\right).$$

1.2 Prüfen Sie rechnerisch nach, ob die Ereignisse A und B unabhängig sind.

2. Die Schülerin Sabine ist eine begeisterte Leichtathletin. Da das Training montags um 16 Uhr beginnt, holt sie der Vater pünktlich um 15.30 Uhr von der Schule ab. Für die Fahrt zur Sporthalle benötigen sie 30 Minuten, falls sie nicht in einen Stau geraten. Auf dem Weg zur Sporthalle müssen sie an zwei Straßenbaustellen vorbei.

Ein Verkehrsstau an der Baustelle „Brücke“ besteht mit einer Wahrscheinlichkeit von 15%, ein Verkehrsstau an der Baustelle „Kreisel“ mit 10%. Die Wahrscheinlichkeit, an beiden Baustellen im Stau zu stehen, beträgt nur 1%.
Jeder Stau verlängert die Fahrzeit um 10 Minuten.

Es gelten folgende Bezeichnungen für die Ereignisse:

B: „Stau an der Brücke“
K: „Stau am Kreisel“.

2.1 Beschreiben Sie die folgenden Ereignisse in Worten:

2.1.1 $\mathrm{B} \cup \mathrm{K}$

2.1.2 $\overline{\mathrm{B}} \cap \mathrm{K}$

2.2 Stellen Sie eine zur Situation passende Vierfeldertafel auf.

2.3.1 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sabine pünktlich zum Training kommt?

2.3.2 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sabine genau 10 Minuten zu spät kommt? (Zur Kontrolle: 0,23)

2.3.3 Leider ist Sabine 10 Minuten zu spät zum Training gekommen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Stau an der Brücke daran schuld ist?

2.4 Im Laufe des Sommers wird der Vater Sabine 15-mal zur Sporthalle fahren. Die Wahrscheinlichkeit, dass sie bei einer Fahrt pünktlich sind, betrage 76%.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

A_1: Sabine und ihr Vater kommen genau 11-mal pünktlich an.

A_2: Sie kommen mindestens 14-mal pünktlich an.

A_3: Sie kommen höchstens 14-mal pünktlich an.

L ö s u n g e n

1. Zufallsexperiment mit Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse A und B

$P(\mathrm{A}) = 0,4$, $P(\overline{\mathrm{B}}) = 0,7$ und $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0,2$.

Mit diesen Angaben lässt sich auch die folgende Vierfeldertafel erstellen:

	A	$\overline{\mathrm{A}}$	
B	**0,2**	*0,1*	*0,3*
$\overline{\mathrm{B}}$	*0,2*	*0,5*	**0,7**
	0,4	*0,6*	**1**

1.1 Berechnung von Wahrscheinlichkeiten gegebener Ereignisse

$P(\mathrm{B}) = 1 - P(\overline{\mathrm{B}}) = 1 - 0,7 = 0,3$ **0,5 Punkte**

Alternative: direktes Ablesen aus der Tafel

$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0,4 + 0,3 - 0,2 = 0,5$ **1,0 Punkte**

Alternative: $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0,2 + 0,1 + 0,2 = 0,5$ (3 Felder der Tafel)

$P(\overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}) = P(\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}}) = 1 - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 1 - 0,2 = 0,8$ **1,0 Punkte**

Alternative: $P(\overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}) = 0,1 + 0,2 + 0,5 = 0,8$ (3 Felder der Tafel)

1.2 Überprüfung auf Unabhängigkeit **1,0 Punkte**

Es gilt: $P(\mathrm{A}) \cdot P(\mathrm{B}) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12 \neq 0,2 = P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$

(Wahrscheinlichkeiten aus Tafel)

Daher sind die Ereignisse A und B abhängig.

2. Fahrt zum Training über Baustelle „Brücke“

2.1 Verbale Beschreibung von Ereignissen

2.1.1 $\mathrm{B} \cup \mathrm{K}$: Sabine und ihr Vater stehen im Stau an der Brücke oder auch im Stau am Kreisel. **0,5 Punkte**

2.1.2 $\overline{\mathrm{B}} \cap \mathrm{K}$: Sabine und ihr Vater stehen nur im Stau am Kreisel (und nicht auch im Stau an der Brücke). **0,5 Punkte**

2.2 Vierfeldertafel **2,5 Punkte**

	K	$\overline{\mathrm{K}}$	
B	**0,01**	*0,14*	**0,15**
$\overline{\mathrm{B}}$	*0,09*	*0,76*	*0,85*
	0,10	*0,90*	**1**

2.3 Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

2.3.1 Wahrscheinlichkeit, dass Sabine pünktlich zum Training kommt **0,5 Punkte**

$P(\overline{B} \cap \overline{K}) = 0{,}76$ (UND-Ereignis, 1 Feld in der Tafel)

2.3.2 Wahrscheinlichkeit, dass Sabine genau 10 Minuten zu spät kommt **1,0 Punkte**

$P\left((B \cap \overline{K}) \cup (\overline{B} \cap K)\right) = P(B \cap \overline{K}) + P(\overline{B} \cap K) = 0{,}14 + 0{,}09 = 0{,}23$ (2 Felder in Tafel)

2.3.3 Wahrscheinlichkeit, dass der Stau an der Brücke schuld ist **2,0 Punkte**

Es gilt: $P(A) = P(\text{„10 min zu spät“}) = P\left((B \cap \overline{K}) \cup (\overline{B} \cap K)\right) = 0{,}23$

Zu berechnen ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit.
Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit gesucht ist: B (Stau an der Brücke)
Bedingung: A (10 min zu spät.)

Damit ergibt sich:

$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B \cap \overline{K})}{P(A)} = \frac{0{,}14}{0{,}23} \approx 0{,}609 \approx 61\,\%$$

(Anmerkung: Es gilt dabei: $B \cap A = B \cap \overline{K}$)

2.4 15 Fahrten zur Sporthalle im Verlauf des Sommers

Interpretation: Bernoulli-Kette der Länge $n = 15$
Treffer T: „Bei einer Fahrt pünktlich“ mit $p = 0{,}7$

$P(A_1) = P(T = 11) = \binom{15}{11} \cdot 0{,}76^{11} \cdot 0{,}24^4 = 1365 \cdot 0{,}0489 \cdot 0{,}0033$ **1,0 Punkte**

$\approx 0{,}2213 \approx 22\,\%$

$P(A_2) = P(T \geq 14) = P(T = 14) + P(T = 15)$ **2,0 Punkte**

$= \binom{15}{14} \cdot 0{,}76^{14} \cdot 0{,}24^1 + \binom{15}{15} \cdot 0{,}76^{15} \cdot 0{,}24^0$

$\approx 15 \cdot 0{,}0214 \cdot 0{,}24 + 0{,}0163$

$\approx 0{,}0770 + 0{,}0163$

$\approx 0{,}0933 = 9{,}33\,\%$

$P(A_3) = P(T \leq 14) = 1 - P(T = 15)$ **1,5 Punkte**

$\approx 1 - 0{,}0163 = 0{,}9837 = 98{,}37\,\%$ ($P(T = 15)$ bei A_2 berechnet)

Schriftliche Abiturprüfung 2011

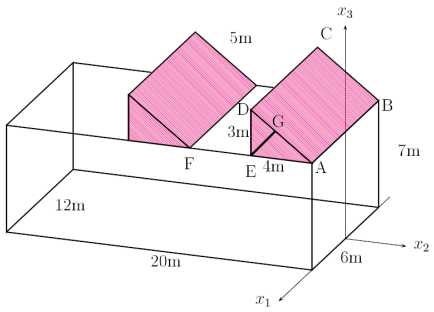
G-Kurs

Haupttermin

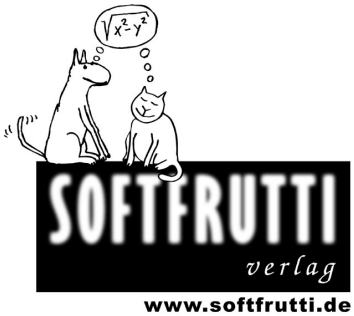
Themenübersicht

- Aufgabe 1: **Analysis**
  - Untersuchung der ln-Funktion $f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 - 2 \cdot \ln(x) + 2$
  - Modellierung: Maske aus Pappe
  - Ablesen von Eigenschaften am Graphen einer Ableitungsfunktion

- Aufgabe 2: **Analytische Geometrie**
  - Modellierung: Fabrikhalle
  - Diagonalenschnittpunkt
  - Fußpunkt des Lotes auf eine Gerade
  - Winkel zwischen Gerade und Ebene
  - Schnittpunkt Punkt-Ebene



- Aufgabe 3: **Stochastik**
  - Aufstellen und Auswerten eines Baumdiagramms
  - Bernoullikette
  - Verbale Beschreibung eines Ereignisses



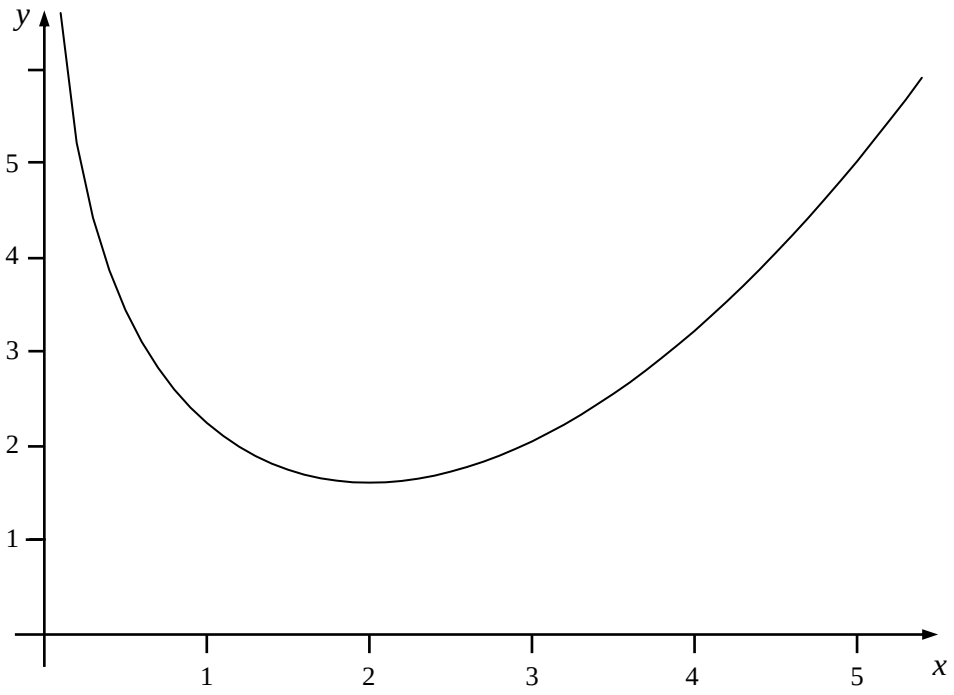
Aufgabe 1

ANALYSIS

1. Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \quad \text{mit } x \mapsto \tfrac{1}{4} \cdot x^2 - 2 \cdot \ln(x) + 2 \ .$$

Sie wird durch folgenden Graphen dargestellt:



1.1 Berechnen Sie den Extrempunkt und weisen Sie die Art des Extrempunktes nach.

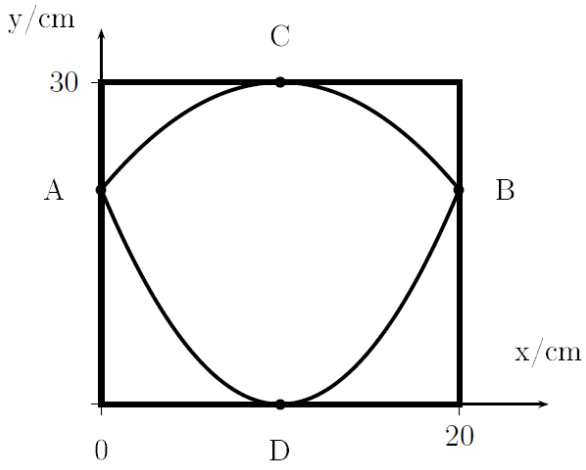
1.2 Untersuchen Sie rechnerisch das Krümmungsverhalten.

1.3 Begründen Sie mit Hilfe des Funktionsterms das Grenzwertverhalten der Funktion für $x \to 0^+$ und $x \to +\infty$.

1.4 Zeigen Sie:
Die Gerade mit $y = -\tfrac{3}{2} \cdot x + \tfrac{15}{4}$ ist eine Tangente an den Graphen von f.

1.5 Der Graph der Funktion f wird für $x \to 0^+$ durch den Graphen der Funktion g mit der Gleichung $g(x) = -2 \cdot \ln(x) + 2$ angenähert.
Beschreiben Sie, wie man den Graphen der Funktion g aus dem Graphen der ln-Funktion $y = \ln(x)$ erhält.
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion g in einem eigenen Koordinatensystem.

2.



Aus einem rechteckigen Stück Pappe soll eine Maske geschnitten werden (siehe nebenstehende Abbildung).

Die Ränder der Maske werden in dem angegebenen Koordinatensystem mit Hilfe von zwei Parabeln über dem Intervall [0 ; 20] beschrieben.

Die Funktionsgleichungen der Parabeln lauten:

$$f(x) = -\frac{1}{10} \cdot x^2 + 2 \cdot x + 20$$

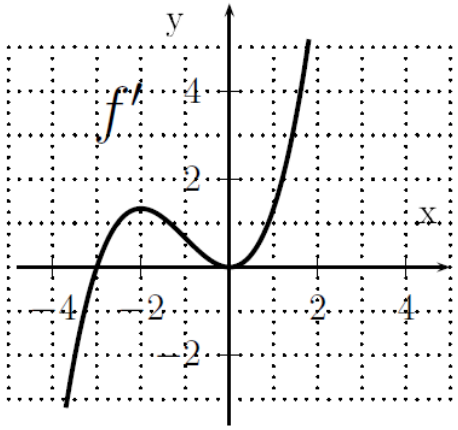
$$g(x) = \frac{1}{5} \cdot x^2 - 4 \cdot x + 20 \,.$$

2.1 Berechnen Sie mit Hilfe der Funktionsterme die Scheitelpunkte *C* und *D* der Parabeln.

2.2 Berechnen Sie die Punkte *A* und *B*, die beide Parabeln gemeinsam haben.

2.3 Ermitteln Sie den Flächeninhalt der Maske. Welcher Bruchteil der Pappe entsteht als Abfall?

3. Die Abbildung zeigt den Graphen der Ableitung f' einer ganzrationalen Funktion f:



3.1 Prüfen Sie ob folgende Aussagen wahr (w) oder falsch (f) sind. Begründen Sie Ihre Aussagen.

3.1.1 Der Graph von f hat an der Stelle −3 einen Tiefpunkt.

3.1.2 Die Funktion f hat an der Stelle −2 ein Maximum.

3.1.3 Der Graph der Funktion f besitzt an der Stelle 0 einen Sattelpunkt.

3.2 Skizzieren Sie unter Berücksichtigung der Ergebnisse aus 3.1 einen möglichen Graphen der Funktion *f*.

L ö s u n g e n

1. Untersuchung einer Funktion mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 - 2 \cdot \ln(x) + 2$

1.1 Berechnung des Extrempunkts **4,0 Punkte**

- *Ableitungen* (1,5 P)

$$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot 2x - 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \cdot x - \frac{2}{x} \quad , \quad f''(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{x^2}$$

- *Notwendige Bedingung* (1,0 P)

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot x = \frac{2}{x} \quad | \cdot 2x \neq 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 4$$
$$\underset{D}{\Leftrightarrow} x = 2$$

- *Hinreichende Bedingung* (1,0 P)

Es gilt $f''(2) = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1 > 0$, d.h. es liegt eine Minimumstelle vor.

- *Abgabe des Extrempunkts* (0,5 P)
Mit $f(2) = 3 - 2 \cdot \ln(2) \approx 1{,}6$ ergibt sich der Tiefpunkt $T(2 \mid 1{,}6)$.

Alternative: Als hinreichende Bedingung kann auch eine Vorzeichentabelle für $f'(x)$ erstellt werden.

x	0	1	2	
$f'(x)$	‖	−	0 (mit)	+

Testwert: $f'(1) = \frac{1}{2} - 2 < 0$

1.2 Untersuchung des Krümmungsverhaltens **2,0 Punkte**

Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt $f''(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{x^2} > 0$.

Daher ist der Graph in der gesamten Definitionsmenge linksgekrümmt.

1.3 Grenzwertverhalten für $x \to 0^+$ und $x \to \infty^+$ **2,0 Punkte**

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (\underbrace{\frac{1}{4}x^2}_{\to 0} \underbrace{- 2 \cdot \ln(x) + 2}_{\to +\infty}) = 0 + \infty = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\underbrace{\frac{1}{4}x^2}_{\to +\infty} \underbrace{- 2 \cdot \ln(x) + 2}_{\to -\infty}) = +\infty$ (Der quadratische Term dominiert über den ln-Term.)

1.4 Tangente an den Graphen von f **3,0 Punkte**

- *Bestimmung der Berührstelle*:

$$f'(x) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot x - \frac{2}{x} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x - \frac{4}{x} = -3 \Leftrightarrow x^2 - 4 = -3x$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1) \cdot (x+4) = 0 \underset{D}{\Leftrightarrow} x = 1$$

- *Funktions- und Steigungswert*: $f(1) = \frac{9}{4}$ und $f'(1) = -\frac{3}{2}$.

Gemäß der allgemeinen Tangentengleichung $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ ergibt sich:

$$t: y = f'(1) \cdot (x - 1) + f(1) = -\frac{3}{2} \cdot (x - 1) + \frac{9}{4} = -\frac{3}{2} \cdot x + \frac{15}{4}$$

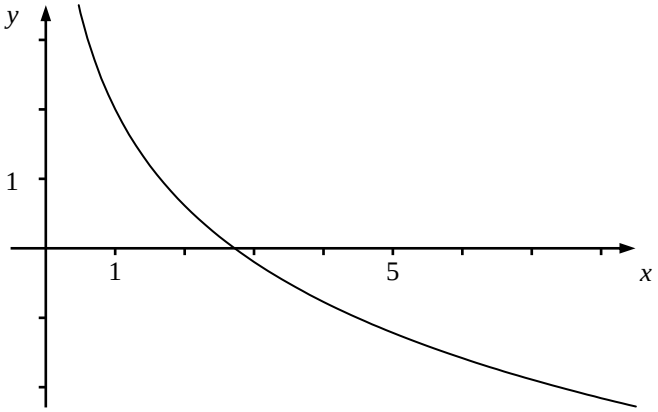
1.5 Entstehung des Graphen von *g* aus dem Graphen der ln-Funktion **3,0 Punkte**

Der Graph der Funktion *g* entsteht aus dem Graphen der ln-Funktion durch eine

– Spiegelung an der *x*-Achse,

– Streckung in *y*-Richtung mit dem Faktor 2 und

– Verschiebung in *y*-Richtung um +2.



2. Maske aus rechteckigem Karton

Gegeben sind $f(x) = -\frac{1}{10} \cdot x^2 + 2 \cdot x + 20$ und $g(x) = \frac{1}{5} \cdot x^2 - 4 \cdot x + 20$.

2.1 Scheitelpunkt *C* und *D* der Parabeln **2,0 Punkte**

Ableitungen: $f'(x) = -\frac{1}{5} \cdot x + 2 = 0$ und $g'(x) = \frac{2}{5} \cdot x - 4 = 0$

Es gilt: $f'(x) = -\frac{1}{5} \cdot x + 2 = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{5} \cdot x = -2 \Leftrightarrow x = 10$ (mit Vzw.)

Wegen des Vorzeichenwechsels von f' an der Stelle 10 und wegen $f(10) = 30$ ist der Punkt $C(10 \mid 30)$ der Scheitelpunkt der Parabel zu *f*.

Es gilt: $g'(x) = \frac{2}{5} \cdot x - 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{5} \cdot x = 4 \Leftrightarrow x = 10$ (mit Vzw.)

Wegen des Vorzeichenwechsels von g' an der Stelle 10 und wegen $g(10) = 0$ ist der Punkt $D(10 \mid 0)$ der Scheitelpunkt der Parabel zu *g*.

2.2 Schnittpunkte der Parabeln **2,0 Punkte**

Schnittstellen von *f* und *g*

$$-\frac{1}{10} \cdot x^2 + 2 \cdot x + 20 = \frac{1}{5} \cdot x^2 - 4 \cdot x + 20$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{3}{10} \cdot x^2 + 6 \cdot x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 20 \cdot x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x \cdot (x - 20) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = 20$$

Es gilt: $f(0) = g(0) = 20$ und $f(20) = g(20) = 20$.

Daher sind die Punkte $A(0 \mid 20)$ und $B(20 \mid 20)$ die gemeinsamen Punkte.

2.3 Berechnung des Flächeninhalts der Maske in cm² **4,0 Punkte**

Gesucht ist das Maß einer Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen.

$$A = \int_0^{20} (f(x) - g(x))\,dx = \int_0^{20} (-\frac{3}{10} \cdot x^2 + 6 \cdot x)\,dx \quad \text{(vgl. Rechnung in 2.2)}$$

$$= \left[-\frac{1}{10} \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 \right]_0^{20} = (-\frac{1}{10} \cdot 20^3 + 3 \cdot 20^2) - (-0 + 0)$$

$$= -800 + 1200 = 400 \ (\text{cm}^2)$$

Abfall: $600\text{cm}^2 - 400\text{cm}^2 = 200\text{cm}^2$; Bruchteil: $\frac{1}{3}$

3. Graph der Ableitung f' einer ganzrationalen Funktion f

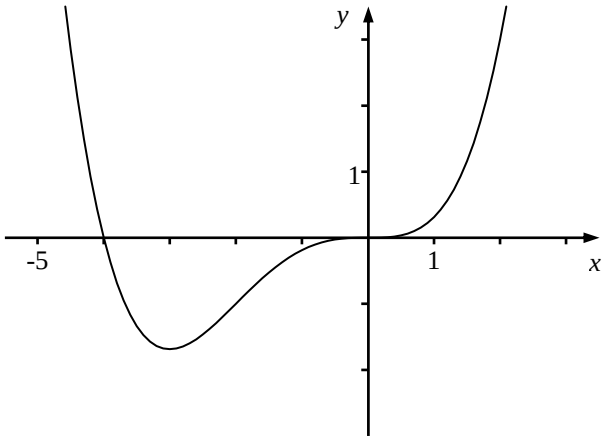
3.1 Überprüfung des Wahrheitswertes von Aussagen **5,0 Punkte**

Es kann hilfreich sein, die Informationen aus dem gegebenen Graphen von f' in eine Vorzeichentabelle zu übertragen.

x		-3		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
		mit		ohne	

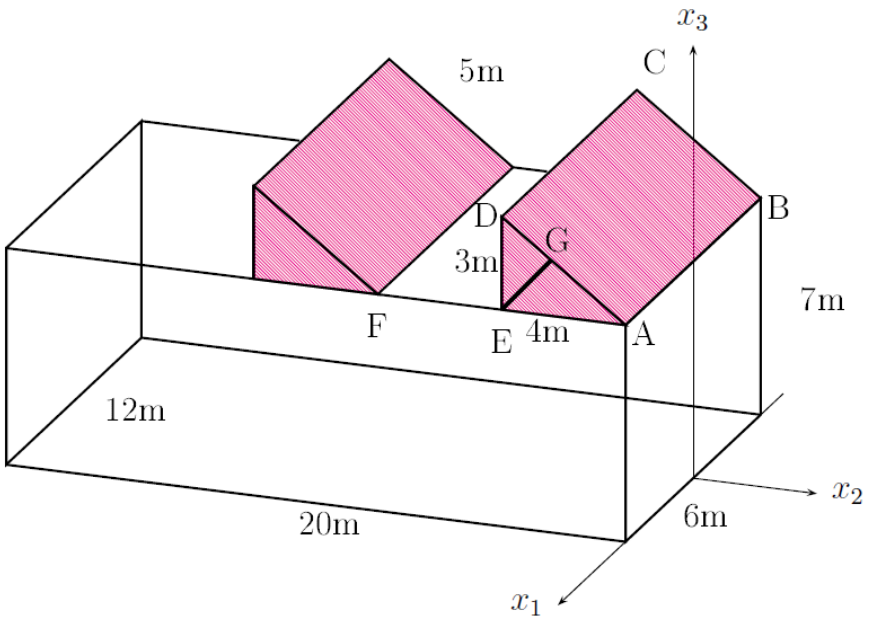
1. Die Aussage ist wahr, weil die Ableitung an der Stelle –3 einen Vorzeichenwechsel von – nach + hat. (2,0 P)
2. Die Aussage ist falsch, weil die Ableitung an dieser inneren Stelle von *D*' nicht Null ist. (1,0 P)
3. Die Aussage ist wahr, weil die Ableitung an der Stelle 0 einen Extrempunkt mit der *y*-Koordinate Null hat. (2,0 P)

3.2 Möglicher Funktionsgraph **2,0 Punkte**



Aufgabe 2
ANALYTISCHE GEOMETRIE

Eine quaderförmige Fabrikhalle ist zwanzig Meter lang, zwölf Meter breit und sieben Meter hoch. Auf ihrem Dach sind zwei rechteckige Solarmodule befestigt, deren Länge jeweils zwölf Meter und deren Breite jeweils fünf Meter beträgt (siehe Abbildung). Das Modul mit den Eckpunkten *A*, *B*, *C* und *D* ist so geneigt, dass die Strecken $\overline{DE}$ und $\overline{AE}$ die Längen drei Meter bzw. vier Meter haben. Beide Module sind parallel zueinander montiert.



1. Geben Sie die Koordinaten der Punkte *A*, *B*, *C* und *D* an.

2. Im Schnittpunkt *M* der Diagonalen des Rechtecks *ABCD* sind die elektrischen Leitungen zusammengeführt. Berechnen Sie die Koordinaten von *M*.

3. Die Ebene e_1 enthält die Dachfläche der Fabrikhalle, die Ebene e_2 enthält das Modul *ABCD*. Stellen Sie jeweils eine Koordinatengleichung dieser Ebenen auf.

4. Berechnen Sie den Neigungswinkel der Module gegenüber der Dachfläche.

5. Aus Stabilitätsgründen wurden senkrecht zu den Modulen Streben eingebaut. Berechnen Sie die Koordinaten des Endpunktes *G* der Strebe $\overline{EG}$.

6. Im Sommer fällt zu einem bestimmten Zeitpunkt Sonnenlicht parallel zu dem Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ auf die Module.

6.1 Berechnen Sie den Einfallswinkel, unter dem die Sonnenstrahlen auf die Module treffen.

6.2 Die Modulkante $\overline{DC}$ wirft eine Schattenlinie auf das Hallendach. Bestätigen Sie rechnerisch, dass das zweite Modul mit dem Eckpunkt $F(6 \mid -8 \mid 7)$ außerhalb des Schattens liegt.

L ö s u n g e n

1. Koordinaten der Punkte *A, B, C* und *D* **2,0 Punkte**

Die Eckpunkte sind: $A(6 \mid 0 \mid 7)$, $B(-6 \mid 0 \mid 7)$, $C(-6 \mid -4 \mid 10)$, $D(6 \mid -4 \mid 10)$.

2. Schnittpunkt *M* der Diagonalen des Rechtecks *ABCD* **1,0 Punkte**

M ist z.B. die Mitte der Diagonale $\overline{AC}$:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 8,5 \end{pmatrix}$$, also $M(0 \mid -2 \mid 8,5)$.

3. Koordinatengleichungen **3,0 Punkte**

- *Ebene* e_1 (1,0 P)
  Parallelebene zur x_1- x_2-Ebene im Abstand 7
  Koordinatengleichung e_1: $x_3 = 7$
- Ebene e_2 (2,0 P)
  - Richtungsvektoren:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \text{wähle} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{v}$$

  - Normalenvektor: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{n}$
  - Normalengleichungen:

Punktnormalengleichung: $e_2: \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot (\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}) = 0$

Allgemeine Normalengleichung: $e_2: \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 28 = 0$

Koordinatengleichung: $e_2: 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 - 28 = 0$

4. Neigungswinkel der Module gegenüber der Dachfläche **2,0 Punkte**

Gesucht ist der Winkel zwischen den Ebenen

– e_1 mit dem Normalenvektor $\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $|\vec{n_1}| = 1$ und

– e_2 mit dem Normalenvektor $\vec{n_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $|\vec{n_2}| = 5$

Es gilt: $\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{\left|\vec{n_1}\right| \cdot \left|\vec{n_2}\right|} = \dfrac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right|} = \dfrac{4}{1 \cdot 5} = 0{,}8$.

Damit folgt $\alpha \approx 36{,}9°$.

Alternative: Im rechtwinkligen Dreieck *ADE* gilt: $\tan(\alpha) = \frac{3}{4}$. Es folgt $\alpha \approx 36{,}9°$.

5. Koordinaten des Endpunktes *G* der Strebe $\overline{EG}$ **3,0 Punkte**

Gesucht ist der Fußpunkt *G* des Lotes von *E* auf die Strecke $\overline{AD}$.

- Hilfsebene durch *E* senkrecht zu $\overline{AD}$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 37 = 0$$

- Der Punkt *G* ist der Schnittpunkt dieser Hilfsebene mit der Geraden durch *A* und *D*:

$$g_{AD}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

- Das Einsetzen in die Ebenengleichung:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right] - 37 = 0 \Leftrightarrow 21 + 25\lambda - 37 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{16}{25} = 0{,}64$$

- Einsetzen von $\lambda = 0{,}64$ in die Gleichung von *g* ergibt den Punkt *G*(6 | –2,56 | 8,92).

6. Sonnenlicht auf die Module

6.1 Einfallswinkel der Sonnenstrahlen auf die Module **2,0 Punkte**

Gesucht ist der Winkel zwischen

- der Richtung der Sonnenstrahlen (gegeben durch den Vektor $\vec{u}$) und
- der Ebene e_2 (gegeben durch den Normalenvektor $\overrightarrow{n_2}$).

Nach der Winkelformel gilt:

$$\sin(\alpha) = \frac{\vec{u} \cdot \overrightarrow{n_2}}{\left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{n}_2\right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right|} = \frac{18}{5 \cdot \sqrt{13}} \approx 0{,}9985 \; .$$

Es folgt $\alpha \approx 86{,}8°$.

6.2 Zweites Modul außerhalb des Schattens **2,0 Punkte**

Für die Gerade durch D parallel zum Sonnenlicht gilt:

$$g: \; \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Gesucht ist der Schnittpunkt dieser Geraden g mit der Ebene e_1 mit der Gleichung $x_3 = 7$:

$$x_3 = 7 \;\Leftrightarrow\; 10 - 3 \cdot \lambda = 7 \;\Leftrightarrow\; \lambda = 1$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in die Gleichung von g ergibt sich als Schattenpunkt von D der Punkt $D'(6 \mid -6 \mid 7)$.

Der Punkt $F(6 \mid -8 \mid 7)$ und damit die auf dem Dach liegende Seite des zweiten Moduls befinden sich 2 m außerhalb des Schattens.

Aufgabe 3

WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

1. Der TUS Springdorf hat 90 männliche und 60 weibliche aktive Mitglieder. Seiner erfolgreichen Leichtathletikabteilung gehören die Hälfte der männlichen Mitglieder und 42 weibliche Mitglieder an.

1.1 Ein zufällig ausgewähltes aktives Vereinsmitglied wird gefragt, ob es Leichtathlet ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses.

1.2 Während einer Sportveranstaltung, bei der sich der gesamte Verein engagiert, spricht das ehemalige Mitglied Heinz Laufer ein aktives Mitglied an.

1.2.1 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dieses aktive Mitglied männlich ist und bei den Leichtathleten trainiert. Zeichnen Sie dazu zunächst ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm (mit Angabe aller Wahrscheinlichkeiten).

1.2.2 Prüfen Sie rechnerisch, ob die Ereignisse

M: „"Das aktive Vereinsmitglied ist männlich" und

L: "Das aktive Vereinsmitglied ist Leichtathlet"

unabhängig sind.

1.2.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(\overline{M} \cup L)$ (siehe Teil 1.2.2) und beschreiben Sie das Ereignis $\overline{M} \cup L$ verbal.

2. Im Jahr 2009 gab es laut Statistik 40,2 Millionen Erwachsene, von denen 16,0 Millionen in Einpersonenhaushalten lebten.

2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte erwachsene Person in einem Einpersonenhaushalt lebt. Runden Sie diese Wahrscheinlichkeit auf 3 Dezimalstellen.

2.2 Eine Gruppe von 10 Erwachsenen wird zufällig ausgewählt.

2.2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau die Hälfte dieser Gruppe in Einpersonenhaushalten lebt.

2.2.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens eine Person der Gruppe in einem Einpersonenhaushalt lebt.

2.2.3 Ein Ereignis *A* hat die Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0{,}398^0 \cdot 0{,}602^{10}.$$

Geben Sie eine mögliche Beschreibung für ein solches Ereignis *A* im gegebenen Sachzusammenhang in Worten wieder.

L ö s u n g e n

1. TUS Springdorf mit 90 männlichen und 60 weiblichen aktiven Mitglieder

1.1 Zufälliges ausgewähltes Mitglied als Leichtathlet **2,0 Punkte**

Die Zahl der Leichtathleten beträgt: 45 + 42 = 87.

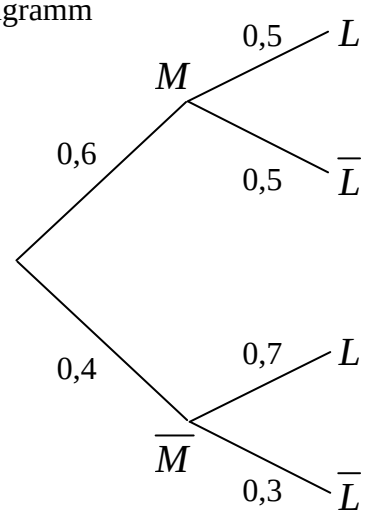
Es bedeute L: Das ausgewählte Vereinsmitglied ist Leichtathlet.

Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit: $P(L) = \frac{87}{150} = 0,58$

1.2 Sportveranstaltung, bei der sich der gesamte Verein engagiert

1.2.1 Wahrscheinlichkeit, dass die Person männlich und Leichtathlet ist. **3,0 Punkte**

Baumdiagramm



Gesucht die die Wahrscheinlichkeit eines UND-Ereignisses.

Aus dem Baumdiagramm ergibt sich: $P(M \cap L) = 0,6 \cdot 0,5 = 0,3$ (Pfad im Baum)

1.2.2 Prüfung auf Unabhängigkeit **2,0 Punkte**

Es gilt: $P(M) \cdot P(L) = 0,6 \cdot 0,58 = 0,348$.

Dieser Wert ist verschieden von $P(M \cap L) = 0,3$.

Daher sind die Ereignisse abhängig.

1.2.3 Berechnung der Wahrscheinlichkeit und verbale Beschreibung des Ereignisses **3,0 Punkte**

Wahrscheinlichkeit:

$$P(\overline{M} \cup L) = 1 - P(M \cap \overline{L}) = 1 - 0,6 \cdot 0,5 = 0,7$$

(mögliche Überlegung: $\overline{M} \cup L$ entsprechen in einer Vierfeldertafel drei Felder. Zu $M \cap \overline{L}$ gehört das vierte Feld.)

Verbale Beschreibung:

$\overline{M} \cup L$: Das aktive Mitglied ist weiblich oder Leichtathlet.

2. Statistik zu Einpersonenhaushalten

2.1 Wahrscheinlichkeit, dass eine Person in einem Einpersonenhaushalt lebt **1,0 Punkte**

Nach der Laplace-Annahme gilt: $p = \frac{16}{40{,}2} = 0{,}398$.

2.2 Auswahl einer Gruppe von 10 Erwachsenen

Interpretation als Bernoullikette der Länge $n = 10$
Treffer T: „Leben in Einpersonenhaushalten“ mit $p = 0{,}398$ (vgl. 2.1)

2.2.1 Die Hälfte der Gruppe lebt in einem Einpersonenhaushalt **1,0 Punkte**

Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit gilt:

$$P(T = 5) = B(10\ ;\ 0{,}398\ ;\ 5) = \binom{10}{5} \cdot 0{,}398^5 \cdot 0{,}602^5 \approx 0{,}199$$

2.2.2 Höchstens eine Person der Gruppe in einem Einpersonenhaushalt **2,0 Punkte**

Die Wahrscheinlichkeit ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten der unvereinbaren Ereignisse „Keine Person lebt in einem Einpersonenhaushalt“ und „Genau eine Person lebt in einem Einpersonenhaushalt“:

$$\begin{aligned} P(T \le 1) &= P(T = 0) + P(T = 1) \\ &= B(10\ ;\ 0{,}398\ ;\ 0) + B(10\ ;\ 0{,}398\ ;\ 1) \\ &= \binom{10}{0} \cdot 0{,}398^0 \cdot 0{,}602^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0{,}398^1 \cdot 0{,}602^9 \\ &\approx 0{,}006 + 0{,}041 \\ &= 0{,}047 \end{aligned}$$

2.2.3 Beschreibung des Ereignisses A **1,0 Punkte**

A: Wenigstens eine Person der Gruppe lebt in einem Einpersonenhaushalt.

Schriftliche Abiturprüfung 2011

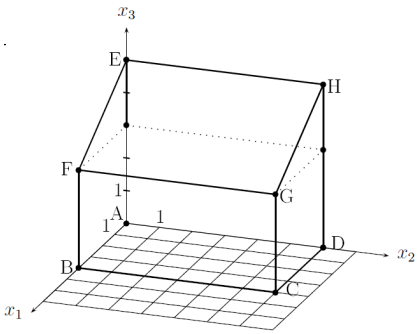
G-Kurs

Nachtermin

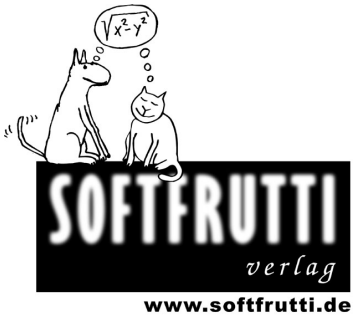
Themenübersicht

- Aufgabe 1: **Analysis**
  - Untersuchung der e-Funktion $f(x) = x \cdot e^{2-x^2}$
  - Zuordnen von Graphen
  - Abnahme der Helligkeit beschrieben durch $f(x) = 100 \cdot e^{-0{,}07 \cdot x}$

- Aufgabe 2: **Analytische Geometrie**
  - Modellierung: Neubau Vereinshaus
  - Winkel zwischen Vektoren
  - Abstand Punkt-Gerade
  - Winkel zwischen Gerade und Ebene
  - Schnittpunkt Punkt-Ebene



- Aufgabe 3: **Stochastik**
  - Aufstellen und Auswerten eines Baumdiagramms
  - Bernoulli Kette
  - Abgrenzung unvereinbar - unabhängig



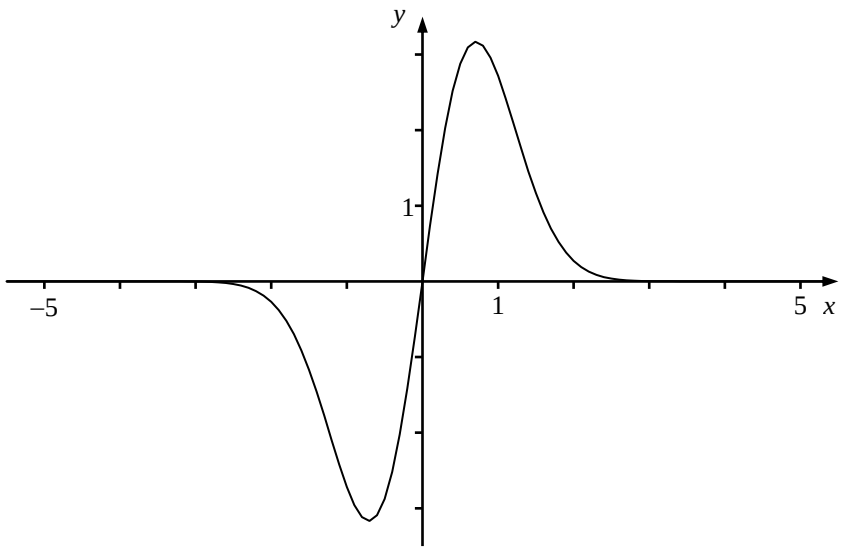
Aufgabe 1

ANALYSIS

1. Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit } x \mapsto x \cdot e^{2-x^2} .$$

Sie wird durch folgenden Graphen dargestellt:



1.1 Begründen Sie mit Hilfe des Funktionsterms das Grenzwertverhalten der Funktion für $x \to +\infty$ bzw. für $x \to -\infty$.

1.2 Untersuchen Sie rechnerisch das Symmetrieverhalten der Funktion.

1.3 Weisen Sie nach, dass die Funktion an den Stellen $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ lokale Extrema hat.

1.4 Untersuchen Sie, ob die ins Unendliche reichende Fläche zwischen dem Graphen der Funktion *f* und der positiven *x*-Achse ein endliches Flächenmaß hat.

Berechnen Sie gegebenenfalls das Maß.

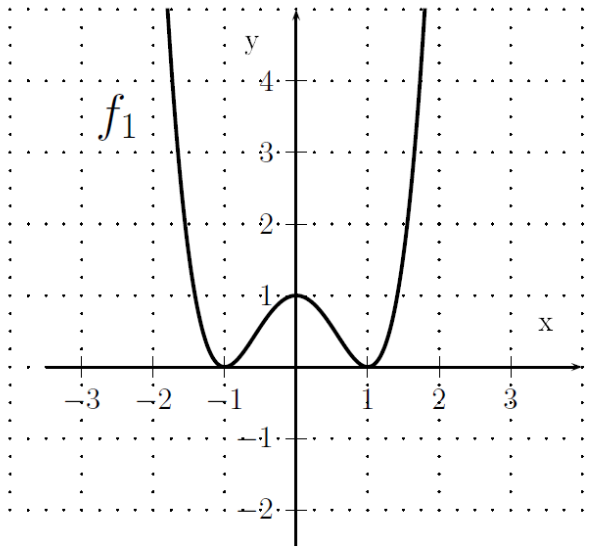
(Ohne Nachweis benutzen:

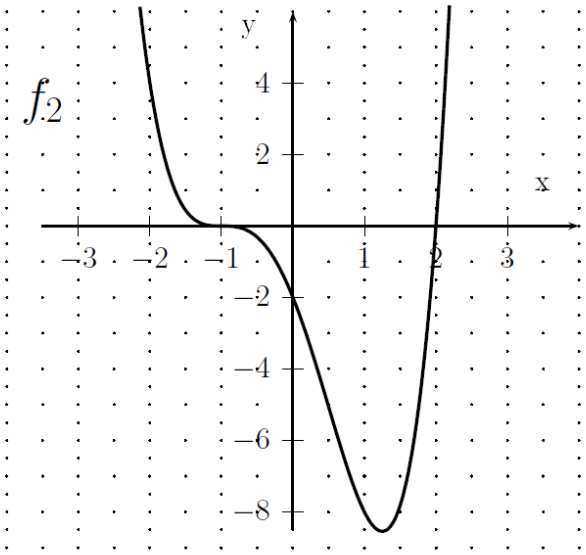
$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = -\frac{1}{2} \cdot e^{2-x^2}$ ist eine Stammfunktion von *f* .)

2.1 Gegeben ist die ganzrationale Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^3 - 3 \cdot x^2$. Bestimmen Sie die Nullstellen von f und die Grenzwerte von f für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$.

Skizzieren Sie unter Beachtung der Ergebnisse den Graphen von f.

2.2 Im Folgenden sind die Graphen zweier ganzrationaler Funktionen f_1 und f_2 dargestellt. Geben Sie jeweils einen möglichst einfachen Funktionsterm der Funktionen an.





3. Der Bodensee ist einer der größten Seen Europas. Seine Ufer liegen in Deutschland, Österreich und der Schweiz. Er hat eine mittlere Tiefe von 90 m.

Die Abnahme der Helligkeit beim Tauchen im See an einem Sommertag kann durch folgenden Funktionsterm beschrieben werden:

$$f(x) = 100 \cdot e^{-0{,}07 \cdot x}.$$

Die Funktion f gibt die Abhängigkeit der Helligkeit in der Einheit 1000 Lux von der Tauchtiefe x in Meter wieder.

3.1 Stellen Sie die Abnahme der Helligkeit von der Tauchtiefe in einem Koordinatensystem graphisch dar. Berücksichtigen Sie dabei die mittlere Tiefe des Bodensees.

3.2 Ermitteln Sie zeichnerisch und rechnerisch die Tiefe, in der die Helligkeit halb so groß wie an der Wasseroberfläche ist.

3.3 Begründen Sie:

Pro Meter Tauchtiefe nimmt die Helligkeit um den gleichen Prozentsatz der jeweiligen Helligkeit ab. Berechnen Sie diesen Prozentsatz.

L ö s u n g e n

1. Funktionsuntersuchung

Betrachtet wird $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x \cdot e^{2-x^2}$.

1.1 Grenzwertverhalten **2,0 Punkte**

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(\underbrace{x}_{\downarrow +\infty} \cdot \underbrace{e^{2-x^2}}_{\downarrow 0^+}) = 0^+$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(\underbrace{x}_{\downarrow -\infty} \cdot \underbrace{e^{2-x^2}}_{\downarrow 0^+}) = 0^-$

(In beiden Fällen dominiert der e-Funktionsterm über den Potenzfunktionsterm).

1.2 Untersuchung auf Symmetrie **2,0 Punkte**

Der Graph ist symmetrisch zum Ursprung, weil die Definitionsmenge $\mathbb{R}$ symmetrisch ist und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(-x) = (-x)\cdot e^{2-(-x)^2} = -x \cdot e^{2-x^2} = -f(x) \ .$$

1.3 Nachweis lokaler Extrema **5,0 Punkte**

- *Ableitung* (2,0 P)

  $f'(x) = e^{2-x^2} - 2\cdot x^2 e^{2-x^2} = (1-2\cdot x^2)\cdot e^{2-x^2}$

- *Notwendige Bedingung* (2,0 P)

  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2}$

  $\Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{1}{2}} \vee x = \sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \vee x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

- *Hinreichende Bedingung* (1,0 P)

  Es handelt sich um einfache Nullstellen von f'. Es liegt somit jeweils ein Vorzeichenwechsel vor. Beide Stellen sind daher lokale Extremstellen.

  (Die Art der Extrema war gemäß der Aufgabenstellung nicht gefragt.)

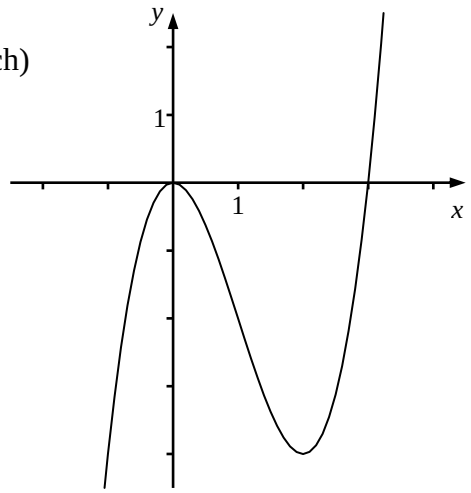
1.4 Fläche, die ins Unendliche reicht **3,0 Punkte**

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{z\to\infty}\int_0^z f(x)\,dx = \lim_{z\to\infty}\left[-\frac{1}{2}\cdot e^{2-x^2}\right]_0^z = \lim_{z\to\infty}\left(\underbrace{-\frac{1}{2}\cdot e^{2-z^2}}_{\to 0} + \frac{1}{2}\cdot e^2\right) = \frac{1}{2}\cdot e^2 \approx 3{,}7$$

2. Untersuchung einer ganzrationalen Funktionen

2.1 Bestimmung der Nullstellen, der Grenzwerte und Skizze des Graphen **4,0 Punkte**

- *Nullstellen*: $x^2 \cdot (x - 3) = 0$
  $\Leftrightarrow$ $x = 0$ (doppelt) $\vee$ $x = 3$ (einfach)
- *Grenzwerte*: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (x^3) = \pm\infty$
- *Graph*:



2.2 Angabe von Funktionstermen **4,0 Punkte**

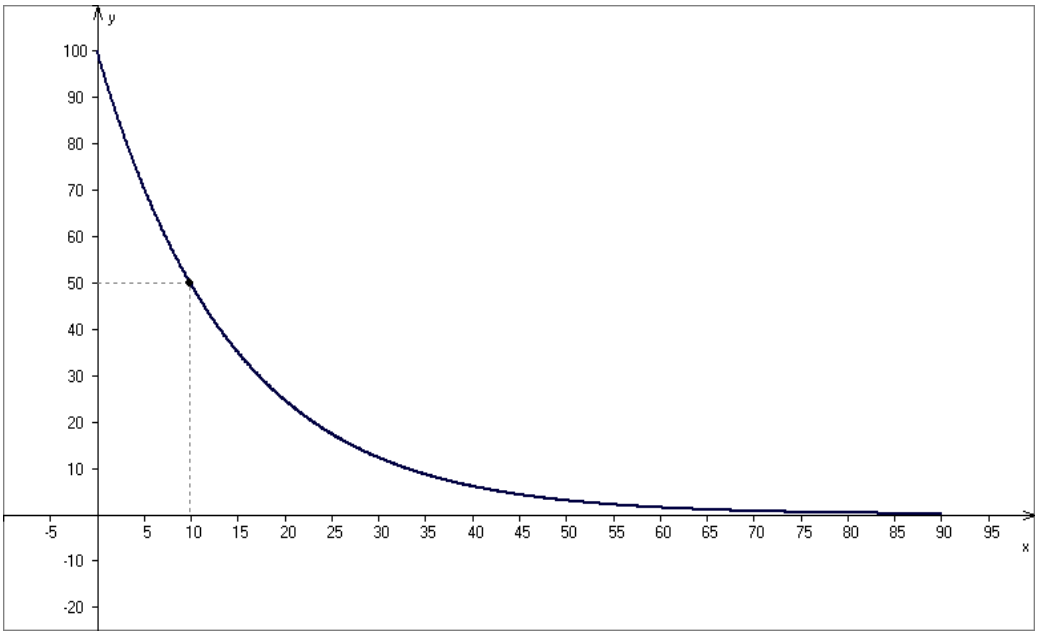
Funktion f_1: $f_1(x) = (x + 1)^2 \cdot (x - 1)^2 = (x^2 - 1)^2$
(doppelte Nullstellen bei –1 und bei +1)

Funktion f_2: $f_2(x) = (x + 1)^3 \cdot (x - 2)$
(dreifache Nullstelle bei –1 und einfache Nullstelle bei +2)

3. Abnahmefunktion der Helligkeit beim Tauchen im Bodensee

Betrachtet wird die Funktion mit der Gleichung $f(x) = 100 \cdot e^{-0,07 \cdot x}$.

3.1 Graph **3,0 Punkte**



Auf der *y*-Achse ist die Helligkeit in der Einheit 1000 Lux dargestellt, auf der *x*-Achse die Tiefe in der Einheit Meter.

3.2 Halbwertstiefe **4,0 Punkte**

zeichnerisch (siehe 3.1): $x_H \approx 10$ m

rechnerisch: $f(x_H) = 50 \Leftrightarrow 100 \cdot e^{-0,07 \cdot x_H} = 50$

$$\Leftrightarrow e^{-0,07 \cdot x_H} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_H = \frac{\ln(2)}{0,07} \approx 9,9 \text{ (Meter)}$$

3.3 Abnahme um den gleichen Prozentsatz **3,0 Punkte**

Es werden die Helligkeiten in den Tiefen $x + 1$ und x verglichen.

Es gilt: $f(x + 1) = 100 \cdot e^{-0,07 \cdot (x + 1)}$

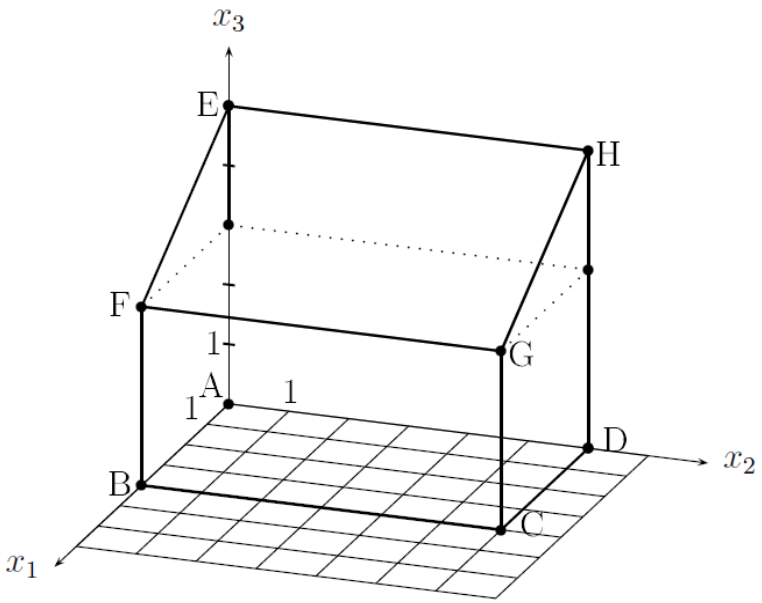
$$= 100 \cdot e^{-0,07 \cdot x} \cdot e^{-0,07}$$

$$= f(x) \cdot e^{-0,07}$$

$$\approx 0,932 \cdot f(x)$$

Es sind noch 93,2% Helligkeit vorhanden. Die Helligkeit nimmt jeweils um rund 6,8 % pro Meter Tauchtiefe ab.

Aufgabe 2
ANALYTISCHE GEOMETRIE



Der Plan für den Neubau des Vereinshauses eines Amateurfunkclubs sieht die Form eines Quaders mit aufgesetztem Schrägdach vor (siehe Abbildung). Der Eckpunkt *A* liegt im Ursprung des angegebenen Koordinatensystems. Die Längeneinheit entspricht 1 Meter.

1. Die Punkte *A*, *B*, *C* und *D* sind die Eckpunkte der Grundfläche des Hauses; die Punkte *E*(0 | 0 | 5), *F*(4 | 0 | 3), *G*(4 | 6 | 3) und *H* bilden die Eckpunkte der Dachfläche. Geben Sie die Koordinaten des Punktes *H* an.

2. Gemäß den Bauvorschriften muss die Dachfläche einen Neigungswinkel von mindestens 20° gegenüber dem Dachboden haben, der sich in einer Höhe von drei Meter oberhalb der Grundfläche befindet. Überprüfen Sie durch eine Rechnung, ob diese Vorschrift erfüllt ist.

3. Stellen Sie eine Parametergleichung der Ebene auf, in der die Dachfläche liegt. Schränken Sie die Parameter so ein, dass die Gleichung die Dachfläche beschreibt.

4. Berechnen Sie den Inhalt der Dachfläche.

5. Im Punkt *P*(1 | 5 | 3) des Dachbodens soll eine vier Meter hohe Funkantenne befestigt werden. Diese senkrecht zum Boden aufgestellte Antenne durchstößt die Dachfläche im Punkt *Q*. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes *Q*.

(Zur Kontrolle:
Die Ebene, in der die Dachfläche liegt, hat z.B. die Gleichung $x_1 + 2x_3 - 10 = 0$.)

6. In der Nähe des Bauplatzes steht im Punkt *T*(220 | 180 | 0) senkrecht zum Boden der Sendemast eines Rundfunksenders, der höher als die Funkantenne ist. Die Richtung des Mastes ist durch den Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ festgelegt.

Berechnen Sie den Abstand der Spitze *S*(1 | 5 | 7) der Funkantenne vom Sendemast.

L ö s u n g e n

1. Koordinaten des Punktes *H* **1,0 Punkte**

Gesuchter Punkt: $H(0 \mid 6 \mid 5)$ (x_1- und x_3-Koordinate wie E, x_2- Koordinate wie G)

Alternative: $\vec{h} = \vec{g} + \overrightarrow{FE} = \vec{g} + (\vec{e} - \vec{f})$

2. Neigungswinkel der Dachfläche gegenüber dem Dachboden **2,0 Punkte**

Der gesuchte Winkel kann berechnet werden als Winkel zwischen den Vektoren und $\overrightarrow{GI}$ mit $I(0 \mid 6 \mid 3)$ (I Punkt senkrecht über D in der Höhe 3) und $\overrightarrow{GH}$:

$$\overrightarrow{GI} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Mit der Winkelformel ergibt sich:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{GI} \cdot \overrightarrow{GH}|}{|\overrightarrow{GI}| \cdot |\overrightarrow{GH}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right|}{4 \cdot \sqrt{20}} = \frac{16}{4 \cdot \sqrt{20}} \approx 0{,}8944 \,.$$

Hieraus folgt $\alpha \approx 26{,}6°$.

Alternative: $\tan(\alpha) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Auch hiermit folgt $\alpha \approx 26{,}6°$.

3. Parametergleichung der Ebene auf, in der die Dachfläche liegt, und Einschränkung **2,0 Punkte**

Parametergleichung der Ebene, in der die Rechteckfläche liegt:

$$\vec{x} = \vec{g} + \lambda \cdot \overrightarrow{GH} + \mu \cdot \overrightarrow{GF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \overrightarrow{GF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Parameterbedingungen für die Rechteckfläche $FGHE$: $0 \le \lambda \le 1 \ \wedge \ 0 \le \mu \le 1$.

4. Inhalt der Dachfläche **4,0 Punkte**

Flächeninhalt Rechteckfläche: $A = |\overrightarrow{GH}| \cdot |\overrightarrow{GF}| = \sqrt{20} \cdot 6 \approx 26{,}8$ (in der Einheit m^2)

5. Koordinaten des Punktes *Q* **4,0 Punkte**

- Gleichung der Ebene, in die die Dachfläche liegt:

  Es gilt: $\overrightarrow{GF} \times \overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ -24 \end{pmatrix}$; wähle als Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

  Koordinatengleichung: e: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}) = 0 \ \Leftrightarrow \ x_1 + 2 \cdot x_3 - 10 = 0$

- Gerade, auf der die Antenne liegt:

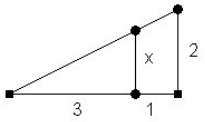
$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\ (\lambda \in \mathrm{IR})$$

Das Schneiden der Geraden g mit der Ebene e ergibt:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right] - 10 = 0 \ \Leftrightarrow\ 7 + 2\lambda - 10 = 0 \ \Leftrightarrow\ \lambda = 1{,}5$$

Damit folgt für den Durchstoßpunkt: $Q(1 \mid 5 \mid 4{,}5)$

Alternative: elementargeometrisch



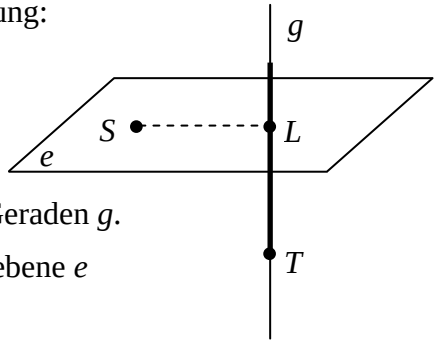
Strahlensatz bzw. Ähnlichkeit: $\frac{x}{3} = \frac{2}{4} \ \Leftrightarrow\ x = 1{,}5$

Damit ergibt sich der Punkt $Q(1 \mid 5 \mid 4{,}5)$.

6. Abstand der Spitze *S* der Funkantenne vom Sendemast **4,0 Punkte**

Die Gerade, auf der der Sendemast liegt, hat die Gleichung:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}220\\180\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\ (\lambda \in \mathrm{IR})$$



Gesucht ist der Abstand des Punkts $S(1 \mid 5 \mid 7)$ von der Geraden g.

1. Möglichkeit: Abstandsberechnung mithilfe der Hilfsebene e durch S senkrecht zu g

$$\text{Hilfsebene: } \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\5\\7\end{pmatrix}\right) = 0 \ \Leftrightarrow\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 7 = 0 \ \Leftrightarrow\ x_3 = 7$$

Schnittpunkt der Gerade g mit der Ebene e:

$x_3 = 7 \ \Leftrightarrow\ 0 + \lambda \cdot 1 = 7 \ \Leftrightarrow\ \lambda = 7$

Damit ergibt sich für den Lotfußpunkt L:

$$\vec{l} = \begin{pmatrix}220\\180\\0\end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}220\\180\\7\end{pmatrix}$$

Abstand:

$$|\overrightarrow{SL}| = \left| \begin{pmatrix}220\\180\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\5\\7\end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix}219\\175\\0\end{pmatrix} \right| = \sqrt{219^2 + 175^2 + 0^2}$$

$$= \sqrt{78586} \approx 280{,}3$$

2. Möglichkeit: Verwendung der Abstandsformel

Ansatz: $d(S, g) = |\ \vec{u}^0 \times \overrightarrow{TS}\ | = \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot |\ \vec{u} \times \overrightarrow{TS}\ |$

Dabei gilt: $|\ \vec{u}\ | = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = 1$.

$$\overrightarrow{TS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 220 \\ 180 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -219 \\ -175 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d(S, g) = 1 \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -219 \\ -175 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 175 \\ -219 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{219^2 + 175^2 + 0^2} \approx 280{,}3$$

Der Abstand des Punktes *S* vom Sendemast beträgt etwa 280 Meter.

Aufgabe 3

WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

1. Der Fischer Petri möchte in seinem Urlaub am Bodensee angeln. Von den gefangenen Fischen behält er nur Forellen, die eine bestimmte Mindestlänge haben. Aus langjähriger Erfahrung weiß man, dass dreißig Prozent der gefangenen Fische Forellen sind. Zwei Drittel der Forellen haben nicht die gewünschte Fanggröße, während drei Siebtel der gefangenen Fische, die keine Forellen sind, die erforderliche Größe besitzen.

1.1 Zeichnen Sie ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm (mit Angabe aller Wahrscheinlichkeiten).

1.2 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein gefangener Fisch eine Forelle mit der gewünschten Länge ist.

1.3 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein geangelter Fisch mit der erforderlichen Länge eine Forelle ist.

1.4 Zu seiner Enttäuschung ist der im Urlaub zuerst gefangene Fisch weder eine Forelle noch hat er die gewünschte Größe. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses.

1.5 Formulieren Sie das Gegenereignis zum Ereignis in 1.4 und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses.

2. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein von Petri gefangener Fisch eine Forelle mit der gewünschten Länge ist, beträgt zehn Prozent.

2.1 Innerhalb einer Stunde an einem Vormittag hat Petri insgesamt fünf Fische gefangen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass darunter

2.1.1 genau zwei Forellen mit Mindestgröße sind,

2.1.2 wenigstens eine Forelle mit Mindestgröße ist.

2.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von den fünf gefangenen Fischen nur die beiden zuerst gefangenen Fische Forellen mit Mindestgröße sind.

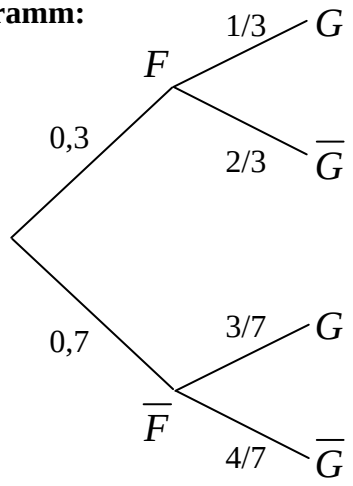
3. Gegeben sind zwei Ereignisse A, B mit $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$. Begründen Sie, dass für diese Ereignisse gilt:

Wenn A und B unvereinbar sind, dann sind sie nicht unabhängig.

L ö s u n g e n

1. Fischen von Forellen

1.1 Baumdiagramm: 3,0 Punkte



F: Der gefangene Fisch ist eine Forelle.
G: Der gefangene Fisch hat die Mindestgröße.

1.2 Wahrscheinlichkeit, dass ein gefangener Fisch eine Forelle mit gewünschter Länge ist 1,0 Punkte

Aus dem Baumdiagramm folgt: $P(F \cap G) = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10} = 0{,}1$ (ein Pfad im Baum)

1.3 Wahrscheinlichkeit, dass ein geangelter Fisch mit erforderlicher Länge eine Forelle 2,5 Punkte

Gesucht ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit.
Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit gesucht ist: *G* (Fisch ist Forelle)
Bedingung: *G* (Mindestgröße)

Damit ergibt sich:

$$P_G(F) = \frac{P(F \cap G)}{P(G)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

1.4 Wahrscheinlichkeit für weder eine Forelle noch die gewünschte Größe 1,0 Punkte

Aus dem Baumdiagramm folgt: $P(\overline{F} \cap \overline{G}) = \frac{7}{10} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{10}$ (ein Pfad im Baum)

1.4 Formulierung des Gegenereignisse und Berechnung der Wahrscheinlichkeit 1,5 Punkte

Das Gegenereignis zu $\overline{F} \cap \overline{G}$ ist:

$F \cup G$: „Der Fisch ist eine Forelle oder er hat die gewünschte Größe."

$P(F \cup G) = 1 - P(\overline{F \cup G}) = 1 - P(\overline{F} \cap \overline{G}) = 1 - \frac{4}{10} = \frac{6}{10}$

(weitere mögliche Überlegung: $F \cup G$ entsprechen in einer Vierfeldertafel drei Felder.
Das vierte Feld gehört zu $\overline{F} \cap \overline{G}$.)

2. Fischen einer Forellen mit Wahrscheinlichkeit 10%

2.1 Fang von 5 Fischen in einer Stunde

Interpretation: Bernoullikette der Länge $n = 5$ **1,0 Punkte**

Treffer T: „Forelle mit Mindestgröße“ mit $p = 0{,}1$

2.1.1 Genau zwei Forellen mit Mindestgröße: **1,0 Punkte**

$$P(T = 2) = \binom{5}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^3 \approx 0{,}0729 \approx 7{,}3\%$$

2.1.2 Wenigstens eine Forelle mit Mindestgröße: **1,0 Punkte**

$$P(T \geq 1) = 1 - P(T = 0) = 1 - \binom{5}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^5 \approx 0{,}4095 \approx 41{,}0\%$$

2.2 Wahrscheinlichkeit, dass nur die beiden zuerst gefangenen Fische Forellen mit Mindestgröße sind **1,0 Punkte**

Ereignis A: „nur die beiden zuerst gefangenen Fische sind Forellen mit Mindestgröße.“

$P(A) = 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^3 = 0{,}73\%$

3. Begründung für: Wenn *A* und *B* unvereinbar sind, dann sind sie nicht unabhängig. **2,0 Punkte**

Für unvereinbare Ereignisse gilt: Das Eintreten eines der Ereignisse verhindert das Eintreten des anderen; also sind die Ereignisse nicht unabhängig.

Formal:

Für unvereinbare Ereignisse gilt: $P(A \cap B) = 0$

Wegen $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$ gilt auch $P(A) \cdot P(B) > 0$.

Es gilt somit $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$. Daher sind die Ereignisse nicht unabhängig.

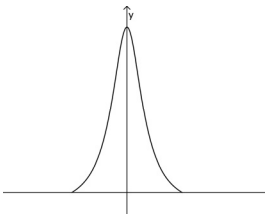
Schriftliche Abiturprüfung 2012

G-Kurs

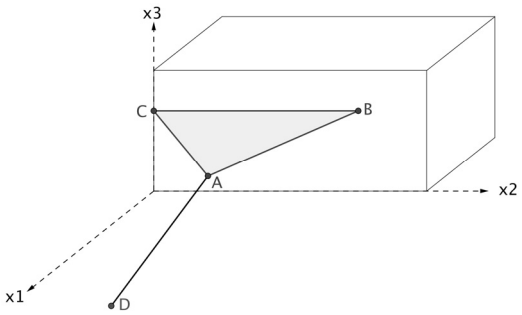
Haupttermin

Themenübersicht

- Aufgabe 1: **Analysis**
  - Untersuchung der gebrochenrationalen Funktion $f(x)=\frac{-x^2+9}{x^2+1}$
  - Modellierung: Kletterhalle
  - Untersuchungen zur Funktion $f(x)=x^3-4x$
  - Zuordnung von Graphen



- Aufgabe 2: **Analytische Geometrie**
  - Modellierung: Sonnensegel
  - Flächeninhalt Dreieck
  - Schnitt einer Ebene mit einer Geraden
  - Winkel zwischen Gerade und Ebene
  - Punktprobe in Ebene
  - Abstand Punkt-Gerade



- Aufgabe 3: **Stochastik**
  - Aufstellen und Auswerten einer Vierfeldertafel (mit absoluten Werten)
  - Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit
  - Aufstellen und Auswerten eines Baumdiagramms
  - Bernoulli-Kette

SOFTFRUTTI verlag
www.softfrutti.de

Aufgabe 1

ANALYSIS

1. Gegeben ist die Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{-x^2+9}{x^2+1}$.

1.1 Untersuchen Sie die Funktion auf Symmetrie und Polstellen. Bestimmen Sie die Gleichung der Asymptote.

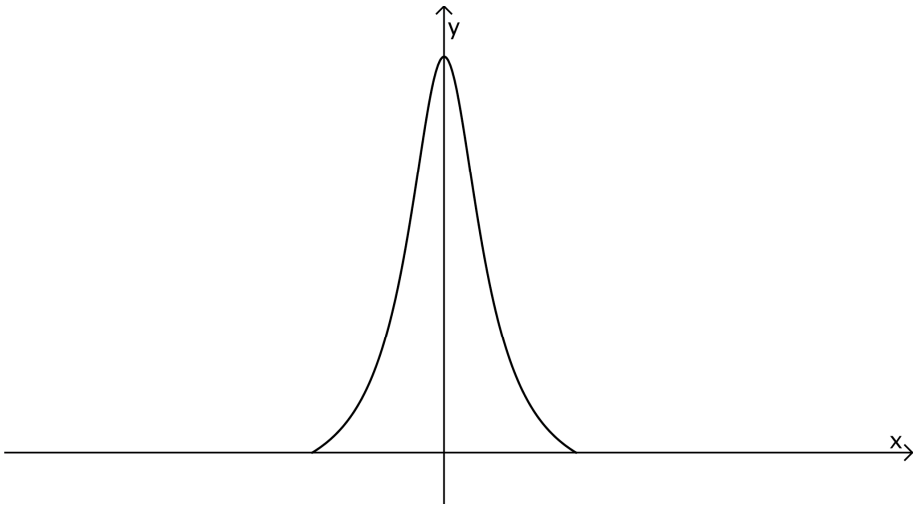
1.2 Bestimmen Sie die Gleichung der ersten Ableitung von f.

Zur Kontrolle und weiteren Verwendung: $f'(x) = \frac{-20x}{(x^2+1)^2}$

Zur weiteren Verwendung (ohne Nachweis!): $f''(x) = \frac{60x^2-20}{(x^2+1)^3}$

1.3 Untersuchen Sie f auf Extrempunkte.

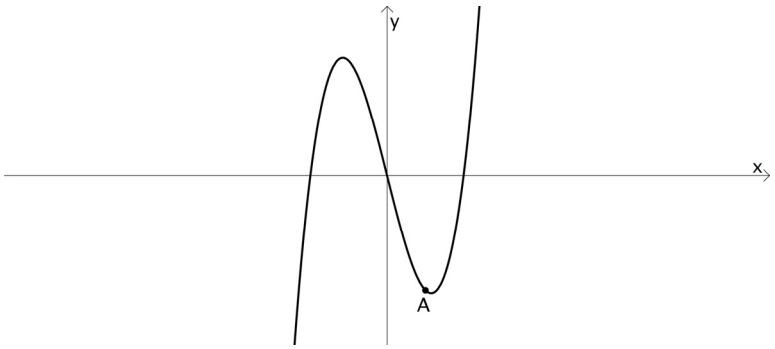
1.4 In einer Kletterhalle wird ein künstlicher Berg geschaffen, dessen Querschnitt durch den in der Abbildung dargestellten Teil des Graphen der Funktion f modelliert werden kann. Dabei stellt die x-Achse den Hallenboden dar.



1.4.1 Bestimmen Sie die Breite des Bergquerschnitts am Boden (1 Längeneinheit = 1 m).

1.4.2 Beantworten Sie die folgende Frage durch eine Rechnung:
Wie hoch über dem Hallenboden liegen die Punkte, in denen der Berg im dargestellten Querschnitt am steilsten ist?

2. Die folgende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^3 - 4x$.



2.1 Berechnen Sie die Nullstellen von f und bestimmen Sie das Symmetrieverhalten von f .

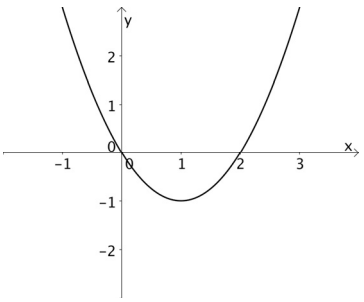
2.2 Erläutern Sie anhand des Graphen, dass gilt: $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 0$.

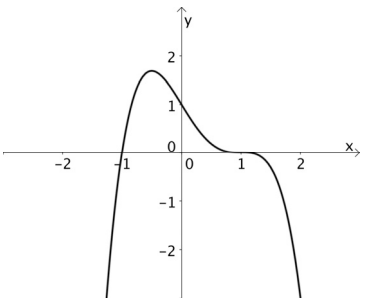
2.3 Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x -Achse einschließt.

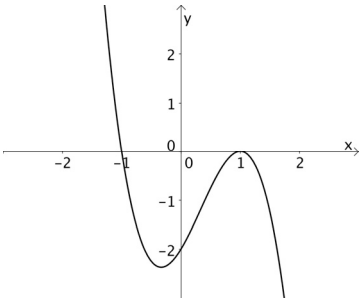
2.4 Der Punkt A in obiger Abbildung hat die x-Koordinate 1. Weisen Sie rechnerisch nach: Die Tangente an den Graphen von f im Punkt A schneidet den Graphen an einer Nullstelle.

3. Die Abbildungen I, II und III zeigen Graphen von ganzrationalen Funktionen höchstens vierten Grades.

Abbildung I : Abbildung II : Abbildung III :







Begründen Sie in den folgenden Aufgabenteilen Ihre Auswahl jeweils mit einer Eigenschaft des Funktionsgraphen.

3.1 In welchen der Abbildungen gilt für die dargestellte Funktion: $f'(0) < 0$?

3.2 In welchen der Abbildungen gilt für die dargestellte Funktion: $f'(1) = 0$ und $f''(1) < 0$?

3.3 In welchen der Abbildungen gilt für die dargestellte Funktion:
$f'(1) = 0$ und f'' wechselt an der Stelle 1 das Vorzeichen?

L ö s u n g e n

1. Untersuchung einer gebrochenrationalen Funktion

Betrachtet wird die Funktion mit der Gleichung $f(x) = \frac{-x^2+9}{x^2+1}$.

1.1 Untersuchung auf Polstellen, Symmetrie und Asymptote **3,0 Punkte**

- *Polstellen* (1,0 P)

  Das Nennerpolynom $x^2 + 1$ hat keine Nullstellen in $\mathbb{R}$. Es gibt daher keine Polstellen und es gilt $D_{max} = \mathbb{R}$.

- *Symmetrie* (1,0 P)

  $D_{max} = \mathbb{R}$ ist symmetrisch und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

  $$f(-x) = \frac{-(-x)^2+9}{(-x)^2+1} = \frac{-x^2+9}{x^2+1} = f(x) \ .$$

  f ist daher symmetrisch zur y-Achse.

- *Asymptote* (1,0 P)

  Eine Polynomdivision ergibt: $f(x) = \frac{-x^2+9}{x^2+1} = -1 + \frac{10}{x^2+1}$

  Gleichung der Asymptoten: $y = -1$.

  (Alternative: als Quotient der Leitkoeffizienten am Funktionsterm ablesen)

1.2 Ableitung **2,5 Punkte**

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)\cdot(-2x)-(-x^2+9)\cdot(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^3-2x+2x^3-18x}{(x^2+1)^2} = \frac{-20x}{(x^2+1)^2}$$

1.3 Untersuchung auf Extrempunkte **2,5 Punkte**

- *Notwendige Bedingung* (1,0 P)

  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -20x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (mit Vzw.) (Betrachtung des Zählerterms genügt)

- *Hinreichende Bedingung* (1,0 P)

x		0	1
$f'(x)$	+	0	–

mit Vzw.

HP

Testwert: $f'(1) = -5$

- *Angabe des Extrempunkts* (0,5 P)

  Mit $f(0) = 9$ ergibt sich der Hochpunkt $H(0 \mid 9)$.

1.4 Künstlicher Berg in der Kletterhalle

1.4.1 Breite des Bergquerschnitts am Boden **2,0 Punkte**

Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$

Als Breite ergibt sich: $\Delta x = 3 - (-3) = 6$

Der Bergquerschnitt ist am Boden 6m breit.

1.4.2 Höhe der Punkte, in denen der Berg am steilsten ist **3,5 Punkte**

Der Berg ist am steilsten in den Wendepunkten.

- Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{60x^2 - 20}{(x^2+1)^3} = 0 \Leftrightarrow 60x^2 - 20 = 0$
  $\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{1}{3}} \vee x = \sqrt{\frac{1}{3}}$
- Hinreichende Bedingung: Beides sind Nullstellen mit Vorzeichenwechsel und damit Wendestellen.
- Funktionswerte: $f(-\sqrt{\frac{1}{3}}) = f(\sqrt{\frac{1}{3}}) = \frac{-\frac{1}{3}+9}{\frac{1}{3}+1} = \frac{26}{4} = 6{,}5$.

Die Punkte, in denen der Berg am steilsten ist, liegen 6,5m über dem Boden.

2. Untersuchung einer ganzrationalen Funktion

Betrachtet wird die Funktion mit der Gleichung $f(x) = x^3 - 4x$.

2.1 Untersuchung auf Nullstellen und Symmetrie **3,0 Punkte**

- *Nullstellen* (2,0 P)

  Es gilt: $f(x) = x^3 - 4x = x \cdot (x^2 - 4) = x \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)$

  Daher folgt: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2 \vee x = 2$

- *Symmetrie* (1,0 P)

  Der Graph von f ist symmetrisch zum Ursprung, da f eine ganzrationale Funktion mit nur ungeraden Exponenten ist.

2.2 Erläuterung der Bedeutung von $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 0$ anhand des Graphen **2,0 Punkte**

Unterschiedliche Argumentationen sind möglich (vgl. Unterricht).
Mögliche Begriffe:

- punktsymmetrisch
- „symmetrische“ Grenzen (Nullstellen)
- Inhalte der Flächen oberhalb und unterhalb der x-Achse identisch

2.3 Flächenberechnung **3,0 Punkte**

Wegen der Symmetrie ist der folgende Ansatz möglich:

$$\mu(A) = 2 \cdot \left| \int_0^2 f(x)\,dx \right| = 2 \cdot \left| \int_0^2 (x^3 - 4x)\,dx \right| = 2 \cdot \left| \left[\tfrac{1}{4}x^4 - 2x^2 \right]_0^2 \right| = 2 \cdot |(4 - 8) - 0| = 8$$

Der Inhalt der Fläche beträgt 8 FE.

2.4 Tangenten an den Graphen von f **3,5 Punkte**

Ansatz für die Gleichung der Tangenten t: $y = f'(1) \cdot (x - 1) + f(1)$

- Ableitung: $f'(x) = 3x^2 - 4$
- Es folgt: $f'(1) = -1$
- Außerdem gilt: $f(1) = -3$.

Damit folgt für die Tangentengleichung: $y = -1 \cdot (x - 1) - 3 = -x - 2$

Für die Nullstelle -2 von f folgt bei Einsetzen in die Tangentengleichung der y-Wert:
$y = -(-2) - 2 = 0$.

Der Punkt $(-2 \mid 0)$ liegt also auf der Tangenten t. Sie schneidet den Graphen somit bei -2.

3. Zuordnung von Graphen zu vorgegebenen Eigenschaften

3.1 Abbildungen I und II **2,0 Punkte**
denn: Steigung an der Stelle 0 negativ

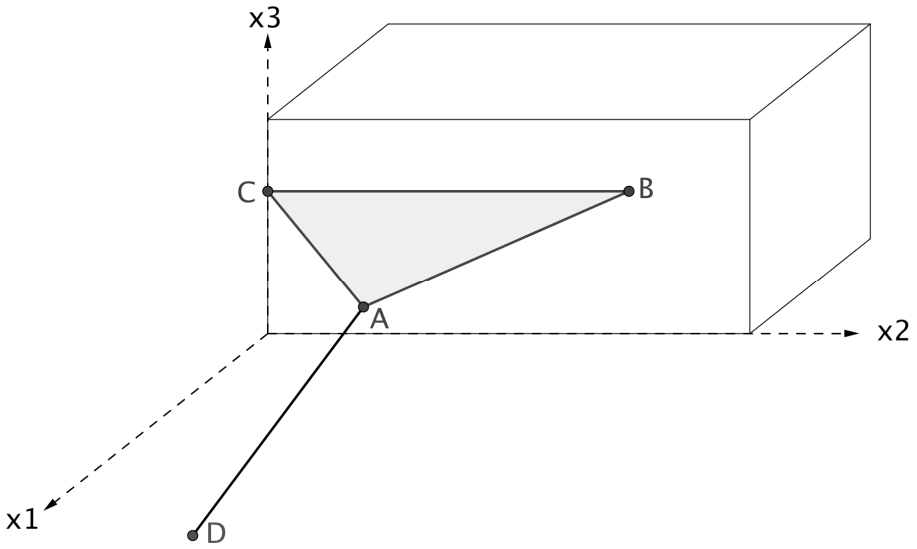
3.2 Abbildung III **1,5 Punkte**
denn: Hochpunkt an der Stelle 1

3.3 Abbildung II **1,5 Punkte**
denn: Sattelpunkt an der Stelle 1

Aufgabe 2
ANALYTISCHE GEOMETRIE

Ein Teil der Spielwiese eines Kindergartens soll mit einem dreieckigen Sonnensegel aus Stoff überdacht werden. Die Wiese liegt in der x_1-x_2-Ebene. Das Sonnensegel wird in den Eckpunkten $C(0 \mid 0 \mid 3)$ und $B(0 \mid 6 \mid 3)$ an der Hauswand, die in der x_2-x_3-Ebene liegt, befestigt (siehe Skizze).

Von dem dritten Eckpunkt $A(4 \mid 3 \mid 2)$ des Segels aus wird ein Seil in Richtung des Vektors $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ gespannt und im Punkt D der Wiese befestigt. (1 Längeneinheit entspricht 1m)



1. Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.

2. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Segels.

3. Bestimmen Sie den Punkt D, in dem das Seil auf der Wiese befestigt wird.

4. Berechnen Sie den Winkel, den das Seil mit der Wiesenfläche bildet.

5. Bestimmen Sie eine Parameter- und eine Koordinatengleichung der Ebene e, in der das Sonnensegel liegt.
(Zur Kontrolle: e: $x_1 + 4x_3 = 12$)

6. Weisen Sie nach, dass das Seil und das Segel in einer gemeinsamen Ebene liegen.

7. Zur Dekoration soll eine 2 m lange Leine mit Fähnchen angebracht werden. Diese soll an einer Öse im Punkt $E(1{,}6 \mid 4{,}8 \mid 0)$ auf der Wiese und in einem Punkt der Kante $\overline{AB}$ des Sonnensegels befestigt werden. Prüfen Sie, ob das möglich ist.

L ö s u n g e n

1. Nachweis, dass Dreieck *ABC* gleichschenklig **1,5 Punkte**

Vergleich der Beträge der Seitenvektoren:

$$|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix}0\\6\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-4\\3\\1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+9+1} = \sqrt{26}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \left|\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-4\\-3\\1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+9+1} = \sqrt{26}$$

Das Dreieck ist gleichschenklig, weil zwei Seiten gleich lang sind.

2. Flächeninhalt des Segels **1,5 Punkte**

Zu berechnen ist der Flächeninhalts des Dreiecks *ABC*:

$$A = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}-4\\3\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-4\\-3\\1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}6\\0\\24\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{36+0+576} \approx 12{,}369$$

Der Flächeninhalt beträgt rund 12,37 m^2.

3. Befestigungspunkt des Seils **2,0 Punkte**

– Gleichung der Geraden, die das Seil enthält: $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}$

– Gleichung der Wiesenfläche (x_1-x_2-Ebene): $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\vec{x} = 0$

– Schnittpunkt der Geraden *g* mit der x_1-x_2-Ebene:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}\right] = 0 \Leftrightarrow 2-\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

– Einsetzen in die Geradengleichung liefert den Schnittpunkt *D*:

$$\vec{d} = \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\3\\0\end{pmatrix}, \quad \text{also } D(12\,|\,3\,|\,0)\,.$$

(Diese Aufgabe ist auch ohne ausführliche Rechnung lösbar. Bei entsprechender Begründung kann der Punkt direkt angegeben werden.)

4. Winkel zwischen Seil und Wiesenfläche **2,0 Punkte**

Zu berechnen ist der Winkel zwischen der Gerade g und der x_1-x_2-Ebene:

$$\sin(\alpha) = \frac{\left|\vec{u} \cdot \vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{17} \cdot 1} \approx 0{,}9428$$

Es folgt $\alpha \approx 14{,}036°$.

Alternative: Winkelberechnung zwischen den Vektoren $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. Parameter- und Koordinatengleichung der Ebene, in der das Sonnensegel liegt **3,0 Punkte**

- *Parametergleichung* (1,5 P)

  Aufpunkt A, Richtungsvektoren: $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ (vgl. 1)

$$e: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- *Normalengleichungen* (1,5 P)

Normalenvektor: $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$; wähle $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

Punktnormalengleichung: $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0$

Allgemeine Normalengleichung: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 12 = 0$

Koordinatengleichung: $x_1 + 4x_3 = 12$

6. Seil und Segel in gemeinsamer Ebene **2,0 Punkte**

Es reicht zu zeigen, dass der Punkt D in der Ebene e liegt.

Punktprobe: $12 + 4 \cdot 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ (wahre Aussage)

Also liegt D in e und somit liegen Seil und Segel in einer gemeinsamen Ebene.

Alternative: Nachweis, dass die Gerade g aus Aufgabenteil 3. in der Ebene e liegt.

7. Befestigung einer Leine auf dem Wiesenboden **3,0 Punkte**

Für die Gerade g entlang der Kante $\overline{AB}$ gilt:

$$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gesucht ist der Abstand von $E(1{,}6 \mid 4{,}8 \mid 0)$ zu g.

1. Möglichkeit: Verwendung der Abstandsformel

Ansatz: $d(E, g) = |\vec{u}^0 \times \overrightarrow{AE}| = \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot |\vec{u} \times \overrightarrow{AE}|$

Dabei gilt: $|\vec{u}| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{16+9+1} = \sqrt{26}$.

$$\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 1{,}6 \\ 4{,}8 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}4 \\ 1{,}8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$d(E, g) = \frac{1}{\sqrt{26}} \cdot \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2{,}4 \\ 1{,}8 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{26}} \cdot \left| \begin{pmatrix} -7{,}8 \\ 10{,}4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{13}{\sqrt{26}} \approx 2{,}55 > 2$$

Die Leine ist zu kurz.

2. Möglichkeit: Abstandsberechnung mithilfe der Hilfsebene durch E senkrecht zu g

$$\text{Hilfsebene: } \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1{,}6 \\ 4{,}8 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 8 = 0$$

Schnittpunkt S von Gerade und Ebene:

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) - 8 = 0 \Leftrightarrow -5 + 26\lambda - 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0{,}5$$

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$$

Abstand:

$$|\overrightarrow{ES}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1{,}6 \\ 4{,}8 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ -0{,}3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0{,}16 + 0{,}09 + 6{,}25}$$

$$= \sqrt{6{,}5} \approx 2{,}55$$

Aufgabe 3

WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

1. Ein Abiturjahrgang besteht aus 90 Schülern. Von diesen haben 18 Schüler E-Kurs Französisch und 60 Schüler E-Kurs Mathematik belegt. 15 Schüler haben E-Kurs Französisch und E-Kurs Mathematik belegt. Es werden folgende Ereignisse betrachtet:

M: „Schüler hat E-Kurs Mathematik belegt."

F: „Schüler hat E-Kurs Französisch belegt."

1.1 Stellen Sie den beschriebenen Sachverhalt in einer Vierfeldertafel dar.

1.2 Beschreiben Sie die folgenden Ereignisse mit Worten und bestimmen Sie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten:

1.2.1 $\overline{M}$

1.2.2 $F \cup M$

1.2.3 $(M \cap \overline{F}) \cup (\overline{M} \cap F)$

1.3 Ein Schüler des Abiturjahrgangs wird zufällig ausgewählt. Er hat E-Kurs Mathematik belegt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er auch E-Kurs Französisch belegt hat.

1.4 Untersuchen Sie, ob die Ereignisse M und F unabhängig sind.

2. Zur Erinnerung will der Abiturjahrgang T-Shirts mit Aufdruck bestellen und entscheidet sich aus Kostengründen für einen Billiganbieter, bei dem erfahrungsgemäß 3% der T-Shirts einen Webfehler aufweisen und 2% der Aufdrucke fehlerhaft sind. Diese beiden Fehler treten unabhängig voneinander auf.

2.1 Stellen Sie den beschriebenen Sachverhalt in einem Baumdiagramm dar.

2.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein T-Shirt sowohl einen Webfehler als auch einen fehlerhaften Aufdruck aufweist.

2.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein T-Shirt völlig fehlerfrei ist, d.h. weder einen Webfehler noch einen fehlerhaften Aufdruck aufweist.

(Zur Kontrolle: 0,9506)

2.4 Es werden 92 T-Shirts geliefert.

2.4.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle gelieferten T-Shirts völlig fehlerfrei sind.

2.4.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens so viele T-Shirts völlig fehlerfrei sind, dass alle 90 Schüler ein solches erhalten.

L ö s u n g e n

1. Abiturjahrgang mit 90 Schülern

1.1 Vierfeldertafel **2,0 Punkte**

Es bedeute: M: „Schüler hat E-Kurs Mathematik belegt.“
F: „Schüler hat E-Kurs Französisch belegt.“

	M	$\overline{\text{M}}$	Σ
F	**15**	*3*	**18**
$\overline{\text{F}}$	*45*	*27*	*72*
Σ	**60**	*30*	**90**

1.2 Verbale Beschreibung von Ereignissen und Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

1.2.1 Ereignis $\overline{\text{M}}$ **1,0 Punkte**

Verbal: „Schüler hat nicht E-Kurs Mathematik belegt“

Direkt aus der Vierfeldertafel ergibt sich:

$$P(\overline{\text{M}}) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$$

1.2.2 Ereignis $\text{F} \cup \text{M}$ **1,5 Punkte**

Verbal: „Schüler hat E-Kurs Französisch oder E-Kurs Mathematik belegt“

Es handelt sich um ein ODER-Ereignis. Dazu gehören drei Felder der Tafel:

$$P(\text{F} \cup \text{M}) = \frac{15}{90} + \frac{3}{90} + \frac{45}{90} = \frac{63}{90} = \frac{7}{10} = 0{,}7$$

Alternative: $P(\text{F} \cup \text{M}) = 1 - P(\overline{\text{F}} \cap \overline{\text{M}}) = 1 - \frac{27}{90} = \frac{63}{90} = \frac{7}{10} = 0{,}7$

1.2.3 Ereignis $(\text{M} \cap \overline{\text{F}}) \cup (\overline{\text{M}} \cap \text{F})$ **1,5 Punkte**

Verbal: „Schüler hat entweder E-Kurs Mathematik oder E-Kurs Französisch belegt“

Zu dem Ereignis gehören zwei Felder der Tafel:

$$P((\text{M} \cap \overline{\text{F}}) \cup (\overline{\text{M}} \cap \text{F})) = P(\text{M} \cap \overline{\text{F}}) + P(\overline{\text{M}} \cap \text{F})$$
$$= \frac{45}{90} + \frac{3}{90} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15} \approx 0{,}533$$

1.3 Berechnung einer bedingten Wahrscheinlichkeit **1,5 Punkte**

Es handelt sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit.

Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit gesucht ist: *F* (E-Kurs Französisch)
Bedingung: *M* (E-Kurs Mathematik)

Damit ergibt sich:

$$P_M(F) = P(F|M) = \frac{|\text{F} \cap \text{M}|}{|\text{M}|} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

1.4 Überprüfung auf Unabhängigkeit **1,5 Punkte**

Möglicher Ansatz: Gilt $P(\text{F}) \cdot P(\text{M}) = P(\text{F} \cap \text{M})$?

$$P(\text{F}) \cdot P(\text{M}) = \frac{60}{90} \cdot \frac{18}{90} = \frac{2}{15} \approx 0{,}133$$

$$P(\text{F} \cap \text{M}) = \frac{15}{90} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167$$

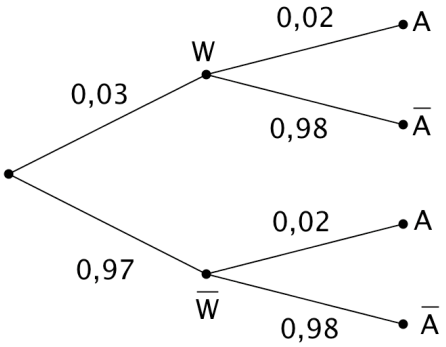
Daraus folgt: M und F sind abhängig.

2. T-Shirts mit Aufdruck

2.1 Baumdiagramm **1,0 Punkte**

W: T-Shirt weist Webfehler auf.

A: Aufdruck ist fehlerhaft.



2.2 Wahrscheinlichkeit für Webfehler und einen fehlerhaften Aufdruck **1,0 Punkte**

Es handelt sich um ein UND-Ereignis. Anhand des Baumdiagramms folgt:

$P(\text{W} \cap \text{A}) = 0{,}03 \cdot 0{,}02 = 0{,}0006$ (1 Pfad im Baum)

2.2 Wahrscheinlichkeit für weder einen Webfehler noch einen fehlerhaften Aufdruck **1,0 Punkte**

Es handelt sich um ein UND-Ereignis. Anhand des Baumdiagramms folgt:

$P(\overline{\text{W}} \cap \overline{\text{A}}) = 0{,}97 \cdot 0{,}98 = 0{,}9506$ (einzelner Pfad im Baum)

2.4 Lieferung von 92 T-Shirts

Interpretation als Bernoullikette der Länge $n = 92$.
Treffer T: „T-Shirt fehlerfrei“ mit $p = 0{,}9506$

2.4.1 Alle T-Shirts sind fehlerfrei. **1,0 Punkte**

$$P(T = 92) = \binom{92}{92} \cdot 0{,}9506^{92} \cdot 0{,}0494^{0} \approx 0{,}00946$$

2.4.2 Mindestens 90 T-Shirts sind fehlerfrei. **2,0 Punkte**

Zu berechnen ist eine Summenwahrscheinlichkeit.

$$P(T \geq 90) = P(T = 90) + P(T = 91) + P(T = 92)$$

$$= \binom{90}{92} \cdot 0{,}9506^{90} \cdot 0{,}0494^{2} + \binom{91}{92} \cdot 0{,}9506^{91} \cdot 0{,}0494^{1} + 0{,}00946$$

$$\approx 0{,}10692 + 0{,}04522 + 0{,}00946$$

$$= 0{,}1616$$

Schriftliche Abiturprüfung 2012

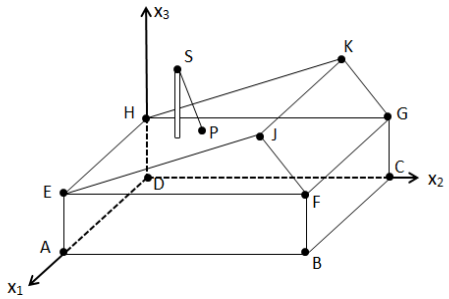
G-Kurs

Nachtermin

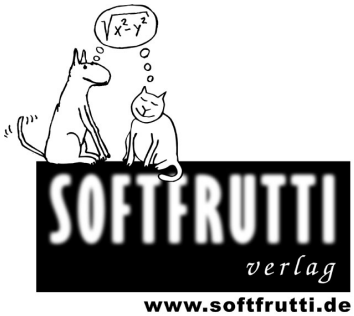
Themenübersicht

- Aufgabe 1: **Analysis**
  - Untersuchung der e-Funktion $f(x) = 2x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$
  - Funktionsgleichung zu einer gebrochenrationalen Funktion bestimmen
  - Funktionsgleichung zu einer ganzrationalen Funktion bestimmen

- Aufgabe 2: **Analytische Geometrie**
  - Modellierung: Einfamilienhaus
  - Flächeninhalt Dreiecksflächen
  - Schnittwinkel zweier Ebenen
  - Schatten



- Aufgabe 3: **Stochastik**
  - Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei vorausgesetzter Unabhängigkeit
  - Bernoulli-Kette
  - Aufstellen und Auswerten eines Baumdiagramm



Aufgabe 1

ANALYSIS

1. Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$.

1.1 Untersuchen Sie die Funktion auf einfache Symmetrie, Nullstellen und Grenzwerte an den Rändern der Definitionsmenge.

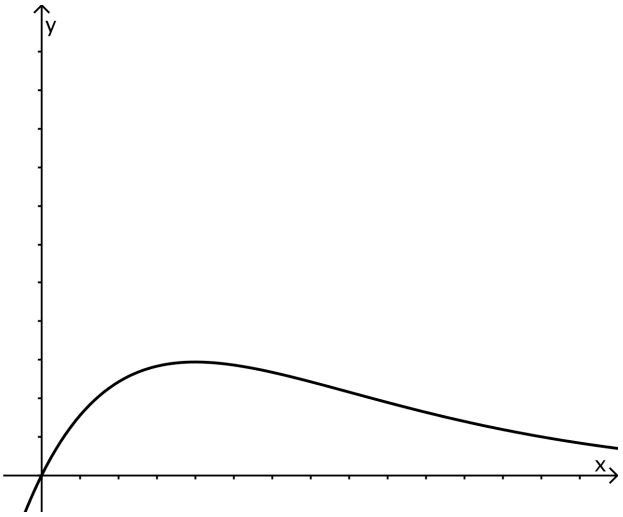
1.2 Bestimmen Sie die erste Ableitung von f.

Zur Kontrolle und weiteren Verwendung: $f'(x) = \left(2 - \frac{1}{2}x\right) \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$

Zur weiteren Verwendung (ohne Nachweis!): $f''(x) = \left(\frac{1}{8}x - 1\right) \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$

1.3 Untersuchen Sie *f* auf Extrempunkte und Wendepunkte

1.4 In der Abbildung ist der Graph von f im ersten Quadranten dargestellt:

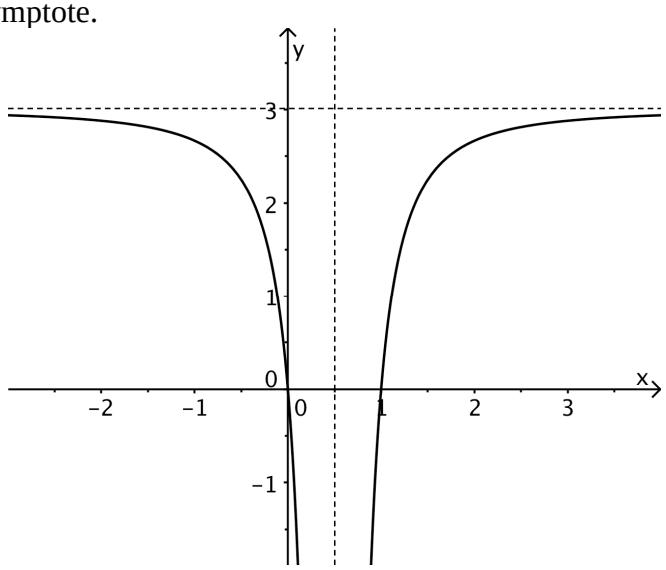


Dieser Graph begrenzt mit der *x*-Achse eine Fläche, die sich ins Unendliche erstreckt, aber einen endlichen Inhalt besitzt. Beschreiben Sie allgemein (ohne Rechnung!) ein Verfahren zur Bestimmung dieses Inhalts.

1.5 Betrachtet wird nun die Funktion *g* mit der Gleichung $g(x) = 4x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$.

Skizzieren Sie den Graphen dieser Funktion im ersten Quadranten in das Koordinatensystem von 1.4. Nullstelle, Extrempunkt und Wendepunkt sollen dabei ohne Rechnung möglichst genau eingetragen werden.

2. Die folgende Abbildung zeigt den Graphen einer gebrochen rationalen Funktion f mit Polgerade und Asymptote.



2.1 Geben Sie Polstelle, Nullstellen, Asymptote sowie eine mögliche Funktionsgleichung für f an.

2.2 In diesem Aufgabenteil kann ohne Nachweis verwendet werden: $f'(x) = \dfrac{1{,}5}{(x-0{,}5)^3}$.

Der Querschnitt eines Geländes wird für $x < 1$ durch die x-Achse, für $x \geq 1$ durch den oben abgebildeten Graphen von f modelliert (1 Längeneinheit = 1 m). Der Graph stellt dabei eine Böschung dar.

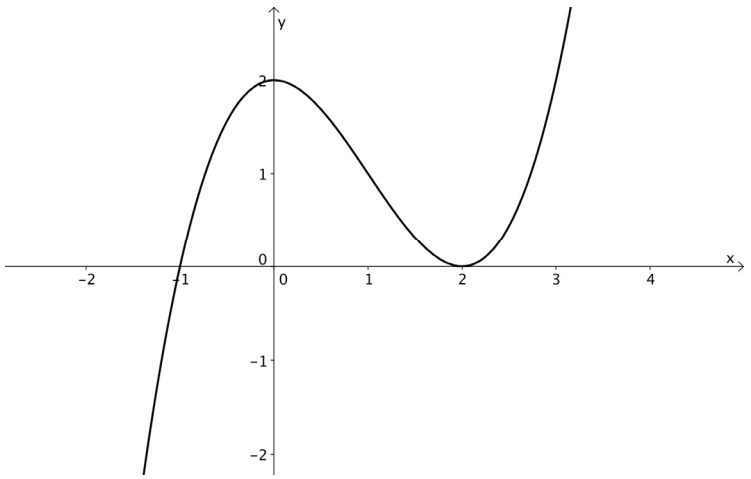
An die Böschung wird eine Leiter angelehnt, so dass sie diese im Punkt $P(1{,}5|\ 2{,}25)$ berührt. Die Leiter soll durch ein Teilstück einer Geraden dargestellt werden.

2.2.1 Berechnen Sie die Gleichung der Geraden und zeichnen Sie diese in obiges Koordinatensystem ein. (Zur Kontrolle: $y = 1{,}5x$)

2.2.2 Berechnen Sie die Mindestlänge der Leiter.

2.2.3 Berechnen Sie den Winkel zwischen der Leiter und der Horizontalen.

3. Die Abbildung zeigt den Graphen einer ganzrationalen Funktion f.



3.1 Bestimmen Sie eine mögliche Funktionsgleichung für f.

3.2 Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' in ein eigenes Koordinatensystem.

L ö s u n g e n

1. Untersuchung einer e-Funktion

Betrachtet wird die Funktion mit der Gleichung $f(x) = 2x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.

1.1 Untersuchung auf Symmetrie, Nullstellen und Grenzwerte **4,0 Punkte**

- *Symmetrie* (1,0 P)
  Keine einfache Symmetrie, da gilt: $f(1) \neq f(-1)$ und $f(1) \neq -f(-1)$.

- *Nullstellen* (1,0 P)

$$f(x) = 2x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \qquad (\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} \neq 0)$$

- *Grenzwerte* (2,0 P)

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\underbrace{2x}_{\to -\infty} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}}_{\to +\infty} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\underbrace{2x}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}}_{\to 0^+} \right) = 0^+$$ (Die e-Funktion dominiert über die Potenzfunktion.)

1.2 Ableitung **1,5 Punkte**

$$f'(x) = 2 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} + 2x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \left(2 - \frac{1}{2}x\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$$

1.3 Untersuchung auf Extrem- und Wendepunkte **5,0 Punkte**

- *Extrempunkte* (2,5 P)

  – Notwendige Bedingung: $f'(x) = \left(2 - \frac{1}{2}x\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}x = 0 \Leftrightarrow x = 4$

  – Hinreichende Bedingung:

x		*0*	4		Testwert:
$f'(x)$		+	4	–	$f'(0) = 2$
			mit Vzw.		
			HP		

  – Angabe des Extrempunkts: Mit $f(4) = 2 \cdot 4 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{4} \cdot 4} = 8\mathrm{e}^{-1} \approx 2{,}943$ ergibt sich der Hochpunkt $H(4 \mid 2{,}943)$ vor.

- *Wendepunkte* (2,5 P)

  – Notwendige Bedingung: $f''(x) = \left(\frac{1}{8}x - 1\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 8$

  – Hinreichende Bedingung: An der Stelle 8 liegt ein Vorzeichenwechsel vor. 8 ist daher Wendestelle.

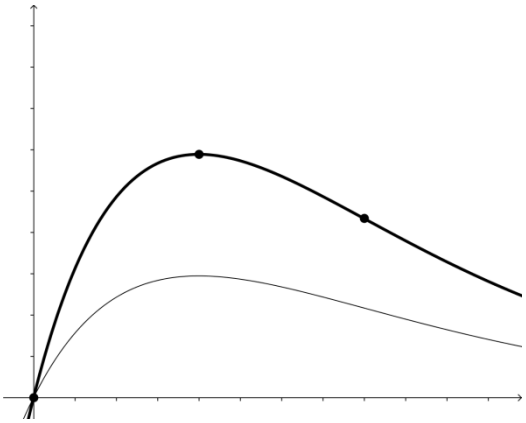
  – Angabe des Wendepunkts: Mit $f(8) = 2 \cdot 8 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{4} \cdot 8} = 16\mathrm{e}^{-2} \approx 2{,}165$ ergibt sich der Wendepunkt $W(8 \mid 2{,}165)$.

1.4 Fläche, die ins Unendliche reicht **2,0 Punkte**

Wie im Unterricht behandelt. Mögliche Punkte:

- Integralansatz
- Berechnung mit Stammfunktion
- Berechnung des Grenzwertes

1.5 Graph der Funktion *g* **2,0 Punkte**



Wegen $g(x) = 2 \cdot f(x)$ bleiben die Nullstellen, Extremstellen und Wendestellen erhalten, die *y*-Werte verdoppeln sich.

2. Graph einer gebrochenrationalen Funktion

2.1 Angabe von Polstellen, Nullstellen und Asymptote **4,0 Punkte**

Polstelle: 0,5 ist Polstelle ohne Vorzeichenwechsel

Asymptote: $y = 3$

Nullstellen: 0 ist einfache Nullstelle
1 einfache Nullstelle

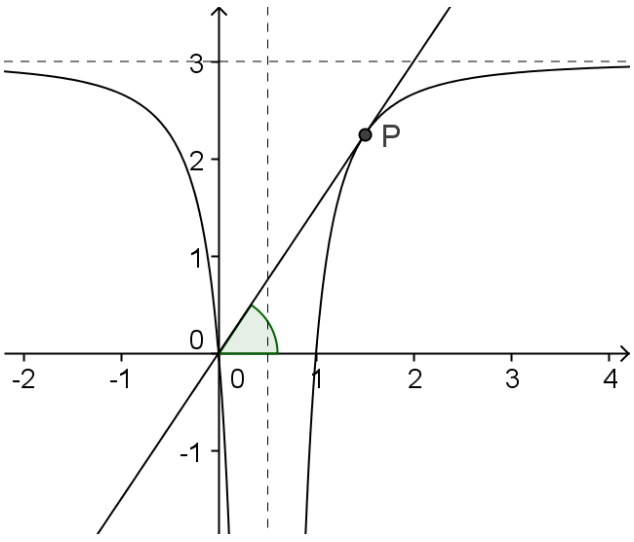
Mögliche Funktionsgleichung: $f(x) = \dfrac{3 \cdot x \cdot (x-1)}{(x-0,5)^2}$

2.2 Modellierung des Querschnitts eines Geländes

2.2.1 Gleichung der Geraden durch die Leiter **3,0 Punkte**

Tangente durch den Punkt $P(1,5 \mid 2,25)$ an G_f :

$$t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$
$$= 1,5 \cdot (x - 1,5) + 2,25 = 1,5 \cdot x$$



2.2.2 Mindestlänge der Leiter **2,0 Punkte**

Mit den Katheten $a = 1{,}5$ und $b = 2{,}25$ ergibt sich nach Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1{,}5^2 + 2{,}25^2} \approx 2{,}704$$

Die Leiter muss mindestens 2,71 m lang sein.

2.2.3 Winkel zwischen Leiter und der Horizontalen **1,0 Punkte**

Aus $\tan(\alpha) = m$ folgt $\alpha = \tan^{-1}(m) = \tan^{-1}(1{,}5) \approx 56{,}310°$

3. Graph einer ganzrationalen Funktion

3.1 Mögliche Funktionsgleichung **2,5 Punkte**

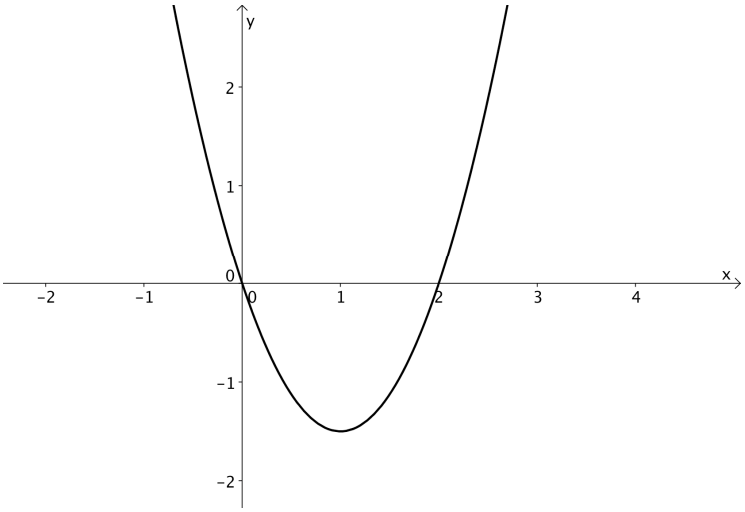
Einfache Nullstelle bei –1: Linearfaktor $(x + 1)$
Doppelte Nullstelle bei 2: Linearfaktor $(x – 2)^2$

Ansatz: $f(x) = a \cdot (x + 1) \cdot (x – 2)^2$

Aus $f(0) = a \cdot 4 = 2$ folgt $a = 0{,}5$.

Funktionsgleichung: $f(x) = 0{,}5 \cdot (x + 1) \cdot (x – 2)^2$

3.2 Skizze der Ableitungsfunktion **2,5 Punkte**



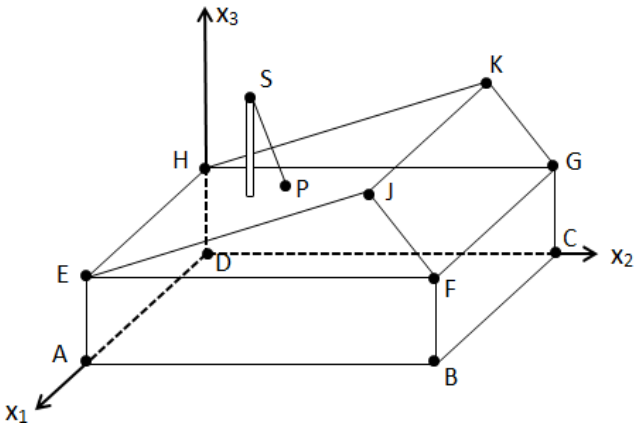
Aufgabe 2
ANALYTISCHE GEOMETRIE

Ein Einfamilienhaus besteht aus einem quaderförmigen Erdgeschoss und einem aufgesetzten Satteldach (siehe Abbildung). Das Dach besteht aus zwei rechteckigen Dachflächen.

Die folgenden Punkte sind gegeben:

$C(0 \mid 15 \mid 0)$, $D(0 \mid 0 \mid 0)$, $E(10 \mid 0 \mid 3)$, $H(0 \mid 0 \mid 3)$, $J(10 \mid 10 \mid 5)$, $K(0 \mid 10 \mid 5)$.

Es gilt: 1 Längeneinheit = 1 m.



1. Geben Sie die Koordinaten des Punktes *F* an.

2. Weisen Sie nach, dass das Viereck *EJKH* ein Rechteck, aber kein Quadrat ist.

3. In der Ebene e_1 liegt die Dachfläche, die durch die Punkte *E*, *J*, *K* und *H* begrenzt wird. Bestimmen Sie eine Parameter- und eine Koordinatengleichung dieser Ebene.

(Zur Kontrolle: e_1: $-x_2 + 5x_3 = 15$)

4. Die beiden dreieckigen Seitenflächen sollen mit Holz verkleidet werden. Wie viele Quadratmeter Holz werden mindestens benötigt?

5. Das Rechteck *EFGH* bildet die Dachbodenfläche. Berechnen Sie den Winkel, unter dem die Ebene e_1 gegen die Dachbodenfläche geneigt ist.

6. Auf dem Dach ist ein Sendemast montiert. Er wird in der Spitze $S(5 \mid 4 \mid 9)$ durch eine Stange stabilisiert, die senkrecht zur Dachebene e_1 steht und im Punkt *P* am Dach befestigt ist. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes *P* und die Länge der Stange.

7. Die Sonnenstrahlen fallen parallel zu einem Vektor $\vec{u}$ ein.

Es soll untersucht werden, ob der Schatten des Sendemastes vollständig innerhalb der Dachfläche *EJKH* liegt. Beschreiben Sie (ohne Rechnung!) eine mögliche Vorgehensweise.

L ö s u n g e n

1. Koordinaten des Punkts *F* **0,5 Punkte**

Punkt ablesen: $F(10 \mid 15 \mid 3)$ (x_1- und x_3-Koordinate wie E, x_2-Koordinate wie C)

2. Viereck *EJKH* Rechteck, aber kein Quadrat **3,0 Punkte**

- *Nachweis Rechteck* (2,0 P)
  - Parallelogrammeigenschaft:

$$\overrightarrow{EJ} = \begin{pmatrix}10\\10\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}10\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\10\\2\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{HK} = \begin{pmatrix}0\\10\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\10\\2\end{pmatrix} = \overrightarrow{EJ}$$

oder: $$\overrightarrow{EH} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}10\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{JK} = \begin{pmatrix}0\\10\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}10\\10\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\0\\0\end{pmatrix} = \overrightarrow{EH}$$

  - Winkel: $\overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{EH} = \begin{pmatrix}0\\10\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-10\\0\\0\end{pmatrix} = 0$, also $\overrightarrow{EJ} \perp \overrightarrow{EH}$.

- *Nachweis kein Quadrat* (1,0 P)

$$\left|\overrightarrow{EJ}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\10\\2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{104} \qquad \left|\overrightarrow{EH}\right| = \left|\begin{pmatrix}-10\\0\\0\end{pmatrix}\right| = 10 \neq \left|\overrightarrow{EJ}\right|$$

3. Parameter- und eine Koordinatengleichung der Dachfläche **3,0 Punkte**

- *Parametergleichung* (1,5 P)

  Aufpunkt E ; Richtungsvektoren: $\overrightarrow{EJ}$ und $\overrightarrow{EH}$

$$e_1: \ \vec{x} = \vec{e} + \lambda \cdot \overrightarrow{EJ} + \mu \cdot \overrightarrow{EH} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix}10\\0\\3\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}0\\10\\2\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}-10\\0\\0\end{pmatrix}$$

- *Normalengleichungen* (1,5 P)
  - Normalenvektor: $\begin{pmatrix}0\\10\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-10\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-20\\100\end{pmatrix} = 20 \cdot \begin{pmatrix}0\\-1\\5\end{pmatrix}$, wähle $\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\-1\\5\end{pmatrix}$
  - Punktnormalengleichung: $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{e}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}0\\-1\\5\end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}10\\0\\3\end{pmatrix}\right) = 0$
  - Allgemeine Normalengleichung: $\begin{pmatrix}0\\-1\\5\end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 15 = 0$
  - Koordinatengleichung: $-x_2 + 5x_3 = 15$

4. Berechnung des Inhalts der Seitenflächen **1,5 Punkte**

$$A_{ges} = 2 \cdot A_{\Delta} = 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{EF} \times \overrightarrow{EJ} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 30$$

Es werden mindestens 30 m^2 Holz benötigt.

Alternative: elementargeometrische Argumentation

5. Winkel, unter dem die Ebene e_1 gegen die Dachbodenfläche geneigt ist **2,0 Punkte**

Gesucht ist der Winkel zwischen zwei Ebenen.

Ebene e_1: Normalenvektor $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Dachbodenebene e_2: Normalenvektor $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (parallel zur x_1-x_2-Ebene)

Schnittwinkel: $\cos(\varphi) = \left| \dfrac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|} \right| = \left| \dfrac{5}{\sqrt{26} \cdot 1} \right| = \dfrac{5}{\sqrt{26}}$; es folgt $\varphi \approx 11{,}31°$.

6. Koordinaten des Punktes *P* und die Länge der Stange **3,0 Punkte**

Lotgerade *l* durch den Punkt *S* mit Normalenvektor von e_1 als Richtungsvektor:

$$l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Schnitt von Gerade *l* mit Ebene e_1:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right] - 15 = 0 \Leftrightarrow 41 + \lambda \cdot 26 - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda \cdot 26 = -26$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -1$$

Es folgt: $\overrightarrow{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, also $P(5 \mid 5 \mid 4)$

Länge der Stange: $\left| \overrightarrow{SP} \right| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{26} \approx 5{,}1$

Die Stange ist ungefähr 5,1 m lang.

7. Schatten des Sendemastes vollständig innerhalb der Dachfläche *EJKH* **2,0 Punkte**

Stichpunkte:

- Gerade g mit Aufpunkt S und Richtungsvektor $\vec{u}$
- Schnitt von g mit Ebene e_1 liefert als Schnittpunkt den Schattenpunkt R
- Für $0 \leq r_1, r_2 \leq 10$ und $3 \leq r_3 \leq 5$ liegt R auf Dachfläche und somit der ganze Schatten des Sendemastes

Aufgabe 3

WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

1. Eine Firma für Werbegeschenke bezieht aus China Kugelschreiber und aus Vietnam Etuis und verpackt jeweils einen Kugelschreiber in ein Etui. Erfahrungsgemäß ist bei den Lieferungen aus China jeder fünfzigste Kugelschreiber defekt. Bei den Lieferungen aus Vietnam sind im Schnitt drei von 100 Etuis unbrauchbar. Allerdings wird beim Abpacken der Werbegeschenke nicht auf eventuell vorhandene Mängel geachtet.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kunde als Werbegeschenk

1.1 einen defekten Kugelschreiber und ein unbrauchbares Etui erhält.

1.2 einen funktionsfähigen Kugelschreiber und ein unbrauchbares Etui erhält.

1.3 einen funktionsfähigen Kugelschreiber oder ein brauchbares Etui erhält.

2. Die gleiche Firma vertreibt auch kleine Taschenlampen, von denen erfahrungsgemäß 5% defekt sind.

2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

2.2.1 von 100 Taschenlampen keine defekt ist.

2.2.2 von 100 Taschenlampen höchstens zwei defekt sind.

2.2 Wie viele Taschenlampen müssen mindestens zufällig herausgegriffen werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% mindestens eine defekte Lampe darunter ist?

2.3 Vor dem Verkauf werden die Taschenlampen getestet. Dabei werden 99% der funktionsfähigen Lampen als solche erkannt. Jedoch werden auch 4% der defekten Lampen irrtümlich als funktionsfähig bewertet.

2.3.1 Zeichnen Sie ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm.

2.3.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Lampe den Test besteht, also als funktionsfähig bewertet wird.

2.3.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Lampe, die den Test bestanden hat, in Wirklichkeit defekt ist.

L ö s u n g e n

1. Kugelschreiber aus China und Etuis aus Vietnam

Es bedeute: E: Etui unbrauchbar ; K: Kugelschreiber defekt

Die beiden Ereignisse sind unabhängig. Diese Eigenschaft wird nachfolgenden zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten von UND-Ereignissen ausgenützt.

1.1 Defekter Kugelschreiber und unbrauchbares Etui **1,0 Punkte**

$$P(E \cap K) \underset{\text{unabh.}}{=} P(E) \cdot P(K) = \frac{3}{100} \cdot \frac{2}{100} = \frac{6}{10000} = 0,0006$$

1.2 Funktionsfähiger Kugelschreiber und unbrauchbares Etui **1,5 Punkte**

$$P\left(E \cap \overline{K}\right) \underset{\text{unabh.}}{=} P(E) \cdot P\left(\overline{K}\right) = \frac{3}{100} \cdot \frac{98}{100} = \frac{294}{10000} = 0,0294$$

1.3 Funktionsfähigen Kugelschreiber oder brauchbares Etui **1,5 Punkte**

$$P\left(\overline{E} \cup \overline{K}\right) = P\left(\overline{E \cap K}\right) = 1 - P(E \cap K) \underset{1.1}{=} 1 - 0,0006 = 0,9994$$

2. Vertrieb von Taschenlampen

Interpretation als Bernoulli-Kette der Länge $n = 100$
Treffer T: „defekte Taschenlampe“ mit $p = 0,05$

2.1 Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

2.1.1 Keine defekte Lampe **1,0 Punkte**

$$P(T = 0) = \binom{100}{0} \cdot 0,05^0 \cdot 0,95^{100} \approx 0,00592$$

2.1.2 Höchstens zwei defekte Lampe **2,0 Punkte**

$$\begin{aligned} P(T \le 2) &= P(T = 0) + P(T = 1) + P(T = 2) \\ &= 0,00952 + \binom{100}{1} \cdot 0,05^1 \cdot 0,95^{99} + \binom{100}{2} \cdot 0,05^2 \cdot 0,95^{98} \\ &= 0,00952 + 0,03116 + 0,08118 \\ &\approx 0,11826 \end{aligned}$$

2.2 Berechnung der Kettenlänge **2,5 Punkte**

$$\begin{aligned} P(T \ge 1) \ge 0,99 &\Leftrightarrow 1 - P(T = 0) \ge 0,99 \\ &\Leftrightarrow -P(T = 0) \ge -0,01 \\ &\Leftrightarrow P(T = 0) \le 0,01 \\ &\Leftrightarrow \binom{n}{0} \cdot 0,05^0 \cdot 0,95^n \le 0,01 \\ &\Leftrightarrow 0,95^n \le 0,01 \\ &\Leftrightarrow n \cdot \ln(0,95) \le \ln(0,01) \\ &\Leftrightarrow n \ge \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,95)} \approx 89,78 \end{aligned}$$

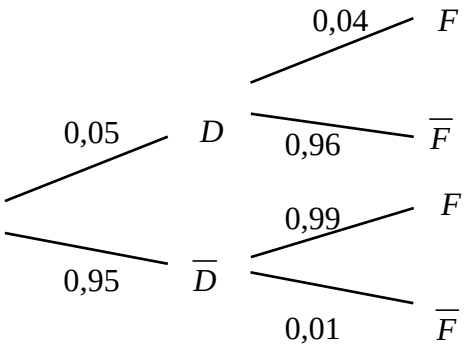
Man muss mindestens 90 Taschenlampen herausgreifen.

2.3 Test von Taschenlampen

2.3.1 Baumdiagramm **2,0 Punkte**

D: Taschenlampe defekt

F: als funktionsfähig bewertet



2.3.2 Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Lampe den Test besteht, also als funktionsfähig bewertet wird. **1,5 Punkte**

Dem Ereignis F entsprechen zwei Pfade in dem Baumdiagramm.

$$P(F) = 0,05 \cdot 0,04 + 0,95 \cdot 0,99 = 0,9425$$

2.3.2 Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Lampe den Test besteht, also als funktionsfähig bewertet wird. **2,0 Punkte**

Es handelt sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit.
Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit gesucht ist: *D* (defekt)
Bedingung: F (als funktionstüchtig bewertet)

Damit ergibt sich:

$$P_F(D) = P(D|F) = \frac{P(D \cap F)}{P(F)} = \frac{0,05 \cdot 0,04}{0,9425} = 0,00212$$

Schriftliche Abiturprüfung 2013

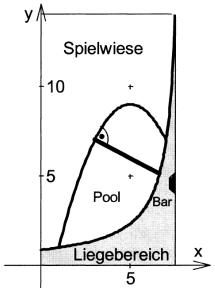
G-Kurs

Haupttermin

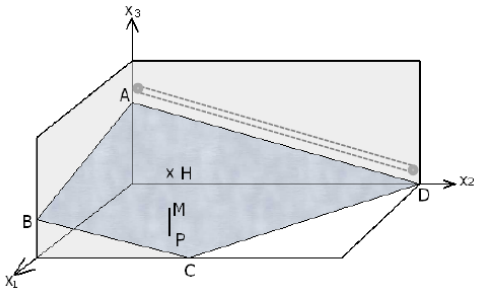
Themenübersicht

- Aufgabe 1: **Analysis**
  - Betrachtung einer ganzrationalen Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{7}{2}$

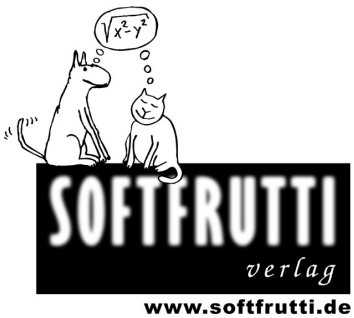
    und einer gebrochenrationalen Funktion $h(x) = \frac{7}{8-x}$
  - Modellierung: Spielwiese mit Pool
  - Untersuchungen zur e-Funktion $f(x) = (6+3x) \cdot e^{-0,5x}$



- Aufgabe 2: **Analytische Geometrie**
  - Modellierung: Wintersporthalle
  - Nachweis Trapezeigenschaften
  - Winkel zwischen zwei Ebenen
  - Abstand Punkt-Ebene
  - Volumenberechnung



- Aufgabe 3: **Stochastik**
  - Modellierung: Eurojackpot
  - Erstellen eines Baumdiagramms
  - Erstellen und Auswerten einer Vierfeldertafel
    (mit absoluten Werten)
  - Bernoulli-Kette



Aufgabe 1
ANALYSIS

1. Gegeben sind die Funktionen

$$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ \text{ mit }\ f(x) = -\tfrac{1}{2}x^2 + 5x - \tfrac{7}{2}\ \text{ und }\ h: D_{\max} \to \mathbb{R}\ \text{ mit }\ h(x) = \frac{7}{8-x}\ .$$

1.1.1 Bestimmen Sie den Hochpunkt des Graphen der Funktion f.

1.1.2 Berechnen Sie den Punkt, in dem der Graph von f die y-Achse schneidet.

1.2 Untersuchen Sie nun die Funktion h.

1.2.1 Bestimmen Sie für die Funktion h den maximalen Definitionsbereich.

1.2.2 Geben Sie die waagrechte und die senkrechte Asymptote der Funktion h an und bestimmen Sie die Grenzwerte von h an der Definitionslücke sowie für $x \to -\infty$ und für $x \to +\infty$.

1.2.3 Beschreiben Sie die Lage der Punkte $P_1(4{,}5 \mid h(4{,}5))$ und $P_2(11{,}5 \mid h(11{,}5))$ bezüglich des Punktes $(8 \mid 0)$ und begründen Sie Ihre Aussage.

1.3 Bestätigen Sie:
Die Graphen der Funktionen f und h haben die Punkte $G_1(\mathrm{l} \mid \mathrm{l})$ und $G_2(7 \mid 7)$ gemeinsam.

1.4 Skizzieren Sie unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse die Schaubilder der Funktionen f und h in ein gemeinsames Koordinatensystem im Intervall $[-1\ ;\ 13]$.
(1 Längeneinheit = 0,5 cm)

1.5 Ein Sporthotel plant eine etwa 10 000 m^2 große Außenanlage, die in einen Pool mit Liegebereich und Spielwiese aufgeteilt wird. Abbildung 1 zeigt die Anlage in der Draufsicht. Dabei gilt: 1 Längeneinheit = 10 m. Die Berandung des Pools kann durch die Funktionen f und h (aus 1.) beschrieben werden.

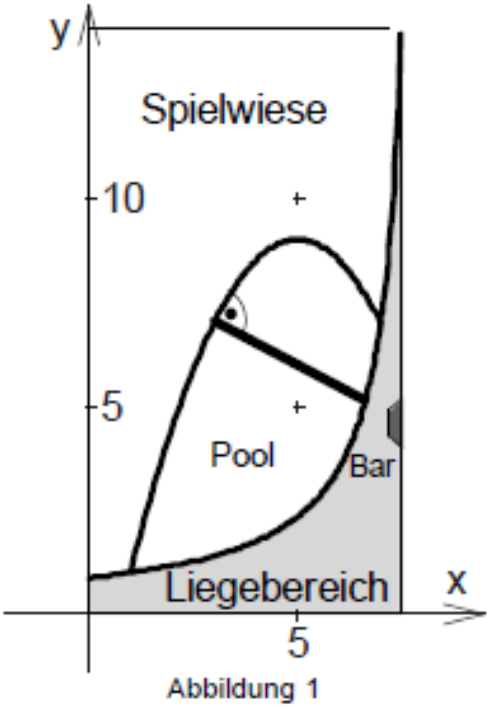


Abbildung 1

1.5.1 Der Hotelprospekt wirbt mit der Aussage:

„80 m Kraulen ohne Wende, ohne Kurven! In unserem Pool kein Problem.“

Bestätigen Sie, dass diese Aussage stimmt.

1.5.2 Der 75 m breite Liegebereich mit Sonnenliegen und Esstischen wird vollständig gepflastert.

Welche Materialkosten muss der Architekt einplanen, wenn er für einen Quadratmeter 28,50 € veranschlagt?

1.5.3 Um den Weg zwischen Spielwiese und Getränkebar abzukürzen, wird eine Fußgängerbrücke über den Pool gebaut. Diese verläuft senkrecht zur oberen Poolberandung und beginnt in (3 | 7) (siehe Abbildung 1).

Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden, die die Lage der Brücke beschreibt.

2. Abbildung 2 zeigt die Graphen zweier Funktionen

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = (6+3x) \cdot e^{-0,5x}$$

und

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } g(x) = (-3x-6) \cdot e^{-0,5x} .$$

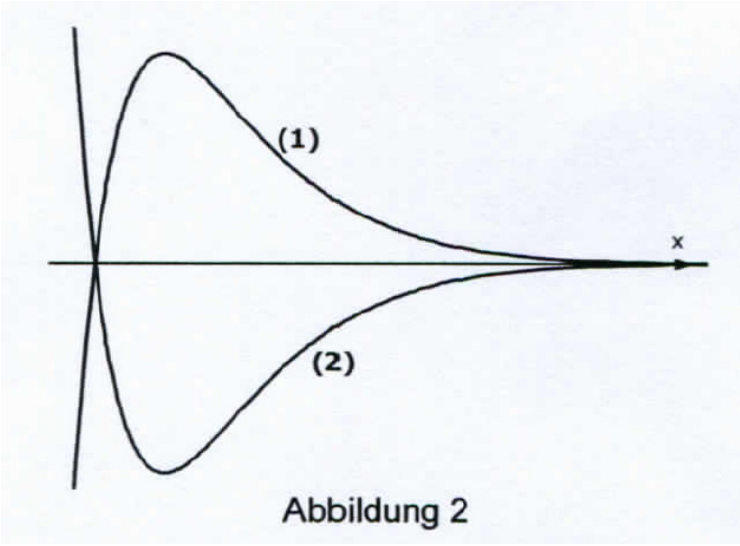


Abbildung 2

2.1 Ordnen Sie den Graphen die passende Funktionsgleichung zu und begründen Sie jeweils Ihre Zuordnung.

2.2 Erläutern, wie der Graph von *g* aus dem Graphen von *f* hervorgeht und begründen Sie Ihre Aussage anhand der Funktionsgleichungen.

2.3 Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Graphen.

2.4 Die Graphen von *f* und *g* über $[-2 ; +\infty[$ sollen den Querschnitt durch eine Zwiebel darstellen.

Zeigen Sie:

An ihrer dicksten Stelle ist die Zwiebel 12 Längeneinheiten dick.

[Zur Kontrolle: $f'(x) = -1,5x \cdot e^{-0,5x}$]

L ö s u n g e n

1.1 Untersuchung der Funktion *f*

Betrachtet wird die Funktion mit der Gleichung $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{7}{2}$.

1.1.1 Hochpunkt des Graphen von *f* **2,5 Punkte**

Ableitungen: $f'(x) = -x + 5$; $f''(x) = -1$

- Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$
- Hinreichende Bedingung: $f''(5) = -1 < 0$, also liegt eine Maximumstelle vor.
- Angabe des Extrempunkts: Mit $f(5) = 9$ ergibt sich der Hochpunkt $H(5 \mid 9)$.

1.1.2 Schnittpunkt mit der *x*-Achse **0,5 Punkte**

Wegen $f(0) = -\frac{7}{2} = -3{,}5$ ergibt sich $S(0 \mid -3{,}5)$.

1.2 Untersuchung der Funktion *h*

Betrachtet wird nun die Funktion mit der Gleichung $h(x) = \frac{7}{8-x}$.

1.2.1 Maximale Definitionsmenge **0,5 Punkte**

Es gilt $D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{8\}$, denn 8 ist Nullstelle der Nennerfunktion von *h*.

1.2.2 Asymptoten und Grenzwerte **3,0 Punkte**

- waagerechte Asymptote: *x*-Achse, denn *h* ist ein echt gebrochenrationale Funktion.
- senkrechte Asymptote: $x = 8$, denn 8 ist Definitionslücke von *h* .
- Grenzwerte: $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 0^+$ $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0^-$

  $\lim\limits_{x \to 8^-} h(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 8^+} h(x) = -\infty$

1.2.3 Lage der Punkte P_1 und P_2 **3,0 Punkte**

8 ist die Mitte zwischen 4,5 und 11,5.
Es gilt: $h(11{,}5) = -2 = -h(4{,}5)$.
Die Punkte $P_1(4{,}5 \mid 2)$ und $P_2(11{,}5 \mid -2)$ liegen also punktsymmetrisch zu $(8 \mid 0)$.

1.3 Schnittpunkte G_1 und G_2 der Graphen von *g* und *h* **1,0 Punkte**

Die Berechnung der zugehörigen Funktionswerte ergibt:

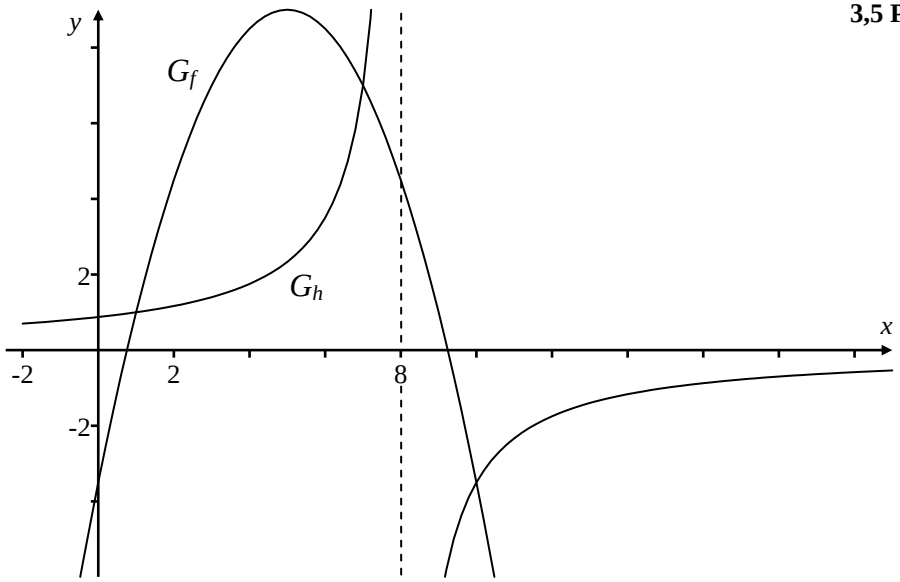
$f(1) = -\frac{1}{2} \cdot (1)^2 + 5 \cdot 1 - \frac{7}{2} = 1$; $h(1) = \frac{7}{8-1} = 1$

$f(7) = -\frac{1}{2} \cdot (7)^2 + 5 \cdot 7 - \frac{7}{2} = 7$; $h(7) = \frac{7}{8-7} = 7$

Die Graphen von *g* und *h* haben also die Punkte G_1 und G_2 gemeinsam.

1.4 Graph

3,5 Punkte



1.5 Außenanlage Sporthotel

1.5.1 80 m Kraulen möglich

3,0 Punkte

Abstand der Punkte $G_1(l \mid l)$ und $G_2(7 \mid 7)$:

$$d^2 = (7-1)^2 + (7-1)^2 = 36 + 36 = 72 \quad ; \quad d = \sqrt{72} \approx 8{,}49$$

Zwischen den Punkte G_1 und G_2 beträgt die Kraulstrecke etwa $8{,}49 \cdot 10 \approx 85$ m.
Die Aussage des Hotelprospekts trifft also zu.

Alternative: Der Abstand der Punkte $(1 \mid 1)$ und $(5 \mid 9)$ beträgt $\sqrt{80} \approx 8{,}94$.
Die entsprechende Kraulstrecke ist in diesem Fall etwa 89 m lang.

1.5.2 Pflasterung des Liegebereichs

3,0 Punkte

Gesucht ist das Maß der Fläche zwischen G_h und der x-Achse über dem Intervall $[0\,;7{,}5]$.

$$\int_0^{7{,}5} h(x)\,dx = \int_0^{7{,}5} \frac{7}{8-x}\,dx = 7 \cdot \int_0^{7{,}5} \frac{1}{8-x}\,dx = 7 \cdot \left[-\ln|8-x|\right]_0^{7{,}5}$$

$$= 7 \cdot [-\ln(0{,}5) - (-\ln(8))] \approx 19{,}41$$

Flächeninhalt: $19{,}41 \cdot 100\ \text{m}^2 = 1\,941\ \text{m}^2$

Kosten: $1\,941\ \text{m}^2 \cdot 28{,}50\ \frac{€}{\text{m}^2} = 55\,318{,}50\ €$

1.5.3 Fußgängerbrücke über dem Pool

3,0 Punkte

Gesucht ist eine Gleichung der Normalen an den Graphen von f im Punkt $(3 \mid 7)$.

- Ableitung: $f'(x) = -x + 5$
- Steigung der Tangente in $(3 \mid 7)$: $m_t = f'(3) = -3 + 5 = 2$
- Steigung der Normale in $(3 \mid 7)$: $m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{2}$
- Gleichung der Normalen: $y = m_n \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

$$= -\frac{1}{2} \cdot (x-3) + 7$$

$$= -\frac{1}{2}x + \frac{17}{2}$$

2. Abbildung mit den Graphen zweier Funktionen *f* und *g*

Betrachtet werden die Funktionen $f(x) = (6+3x) \cdot e^{-0,5x}$ und $g(x) = (-3x-6) \cdot e^{-0,5x}$.

2.1 Zuordnung der Graphen zu den Funktionsgleichungen **2,0 Punkte**

Graph (1) gehört zur Funktion *f*, Graph (2) zur Funktion *g*.

Mögliche Begründung: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0^-$

2.2 Entstehung des Graphen von *f* aus dem Graphen von *g* **1,0 Punkte**

Wegen $f(x) = -g(x)$ sind die Graphen spiegelbildlich zur x-Achse.

2.3 Schnittpunkt der Graphen **2,5 Punkte**

Schnittbedingung:

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow (6+3x) \cdot e^{-0,5x} = (-3x-6) \cdot e^{-0,5x} \quad | : e^{-0,5x} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow 6+3x = -3x-6 \\ &\Leftrightarrow 6x = -12 \\ &\Leftrightarrow x = -2 \end{aligned}$$

Wegen $f(-2) = g(-2) = 0$ ergibt sich der Schnittpunkt $S(-2 \mid 0)$.

2.4 Dickste Stelle der Zwiebel **3,5 Punkte**

Das Schaubild zeigt: Die dickste Stelle der Zwiebel ergibt sich aus den Funktionswerten an der Extremstelle von *f* und *g*.

- *Ableitung* (1,5 P)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \cdot e^{-0,5x} + (6+3x) \cdot e^{-0,5x} \cdot (-0,5) \\ &= 3e^{-0,5x} - 3e^{-0,5x} + 1,5x e^{-0,5x} \\ &= -1,5x \cdot e^{-0,5x} \end{aligned}$$

- *Nullstelle von* f' (0,5 P)

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (mit Vzw. der Form + 0 – also Maximumstelle)

  - *Funktionswert* (1,0 P)

    $f(0) = 6$

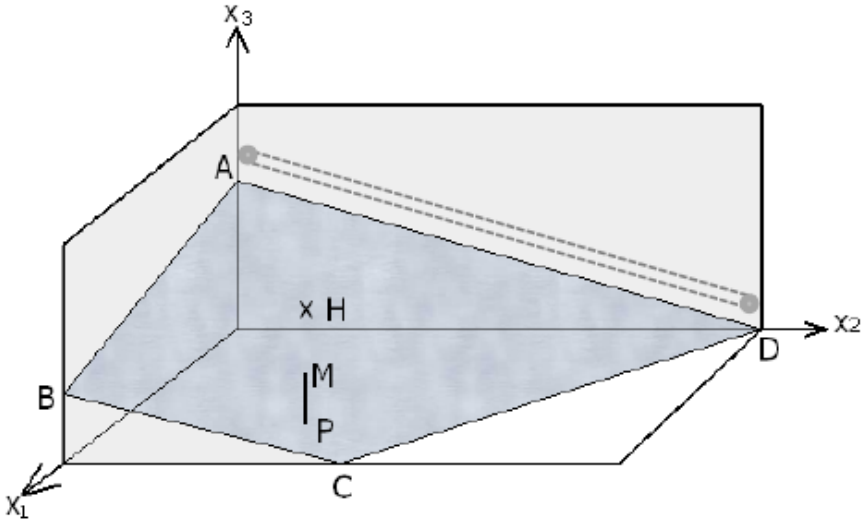
    Wegen der Symmetrie zu x-Achse gilt: $g(0) = -6$

  - *Ergebnis* (0,5 P)

    An ihrer dicksten Stelle $x = 0$ ist die Zwiebel 12 Längeneinheiten dick.

Aufgabe 2
ANALYTISCHE GEOMETRIE

Die folgende Abbildung zeigt den Ausschnitt einer Lagerhalle, die zu einer Wintersporthalle umgebaut werden soll.
Der dargestellte Bereich hat eine Länge von 60 m, eine Breite von 30 m und eine Höhe von 30 m. In ihm wird eine Piste als Ebene durch die Punkte $A(0 \mid 0 \mid 20)$, $B(30 \mid 0 \mid 10)$ und $D(0 \mid 60 \mid 0)$ festgelegt. Der Hallenboden liegt dabei in der x_1-x_2-Ebene.



1. Der Punkt *C* liegt in der Mitte der vorderen Bodenkante.
Geben Sie die Koordinaten von *C* an.

2. Von *D* nach *A* wird ein Schlepplift eingebaut. Das Schleppseil verläuft parallel zur Pistenkante $\overline{DA}$ über je eine Umlenkrolle an den Enden. Berechnen Sie die Länge des Seiles, wenn der Rollendurchmesser vernachlässigt werden darf.

3. Ein Trapez besitzt mindestens ein Paar paralleler Seiten.
Zeigen Sie: Das Viereck *ABCD* hat die Form eines Trapezes.

4. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene e_p, in der die Piste liegt.
[Zur Kontrolle und weiteren Verwendung: $e_p : x_1 + x_2 + 3x_3 = 60$]

5. Welchen Winkel schließt die Pistenebene e_p mit dem Hallenboden ein?

6. Im Punkt $P(20 \mid 20 \mid 0)$ steht senkrecht zum Hallenboden ein Stützpfeiler unter der Piste.
Bestimmen Sie den Punkt *M*, in dem der Pfeiler die Pistenebene e_p erreicht.

7. Um den Spaßfaktor zu erhöhen, wurde auf der Piste ein Hügel aus Schnee errichtet. Sein höchster Punkt liegt in $H(20 \mid 20 \mid 10)$.
Welchen Abstand hat die Hügelspitze *H* von der Pistenebene e_p?

8. Am Ende der Piste befindet sich auf dem Hallenboden eine dreieckige Auslauffläche. Diese bekommt eine 40 cm hohe Schneedecke.
Wie viel m^3 müssen mit Schnee aufgefüllt werden?

9. Begründen Sie:
Die Wege von *C* nach *B*, von *B* nach *A* und von *D* nach *A* sind gleich steil.

L ö s u n g e n

1. Punkt *C* in der Mitte der vorderen Bordkante **0,5 Punkte**

Punkt $C(30 \mid 30 \mid 0)$ (x_1-Koordinate: wie B ;
x_2-Koordinate: halber Wert der x_2-Koordinate: von D ;
x_3-Koordinate: 0, da in x_1-x_2-Ebene gelegen)

2. Seillänge **1,0 Punkte**

Die Seillänge entspricht der doppelten Länge des Vektors $\overrightarrow{AD}$.

Es gilt: $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ -20 \end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{0^2 + 60^2 + 20^2} = \sqrt{4000} \approx 63{,}25$

Die Seillänge (ohne Rollen) beträgt also 126,50 m.

3. Nachweis der Trapezeigenschaft **1,0 Punkte**

Zu zeigen: Es gibt ein Paar paralleler Seiten im Viereck *ABCD*.

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ -20 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Daher gilt $\overrightarrow{AD} = 2 \cdot \overrightarrow{BC}$ und damit $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$.

4. Koordinatengleichung der Ebene, in der die Piste liegt **3,0 Punkte**

– Aufpunkt der gesuchten Ebene: $A(0 \mid 0 \mid 20)$

– Richtungsvektoren: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$; wähle $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ -20 \end{pmatrix} \text{ ; wähle } \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

– Normalenvektor: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$; wähle $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

– Normalengleichungen von e_p:

- Punktnormalengleichung: $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}) = 0$

- Allgemeine Normalengleichung: $\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 60 = 0$
- Koordinatengleichung: $x_1 + x_2 + 3x_3 = 60$

5. Winkel der Pistenebene mit dem Hallenboden **2,0 Punkte**

Gesucht ist der Winkel zwischen der Ebene e_P und der x_1-x_2-Ebene.
Normalenvektoren:

- Ebene e_p : $\vec{n}_P = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$
- x_1-x_2-Ebene : $\vec{n}_{Hb} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ (Hallenboden):

Für den gesuchten Winkel ergibt sich damit:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{n}_{Hb} \cdot \vec{n}_P}{\left|\vec{n}_{Hb}\right| \cdot \left|\vec{n}_P\right|} = \frac{3}{\sqrt{11} \cdot 1} = \frac{3}{\sqrt{11}} \approx 0{,}9045 \quad ; \quad \text{es folgt } \alpha \approx 25{,}24° .$$

6. Punkt *M*, in dem der Pfeiler die Pistenebenen erreicht **2,0 Punkte**

Der Stützpfeiler kann beschrieben werden durch die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}20\\20\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

(Aufpunkt: gegebener Punkt $P(20 \mid 20 \mid 0)$
Richtungsvektor: senkrecht zu x_1-x_2-Ebene)

Gesucht ist der Schnittpunkt der Gerade g mit der Ebene e_P der Piste.
Einsetzen der Gleichung von g in die Gleichung von e_P ergibt:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix}20\\20\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right] - 60 = 0 \Leftrightarrow 40 + 3\lambda - 60 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\lambda = 20$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{20}{3}$$

Einsetzen dieses Wertes in die Gleichung von g ergibt den Punkt $M(20 \mid 20 \mid \frac{20}{3})$.

7. Abstand der Hügelspitze von der Pistenebene **2,0 Punkte**

Gesucht ist der Abstand des Punktes $H(20 \mid 20 \mid 10)$ von der Ebene e_P .

1. Möglichkeit: Verwendung der Abstandsformel:

Als Punkt der Ebene wird $A(0 \mid 0 \mid 20)$ verwendet.

Dann gilt: $\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ -10 \end{pmatrix}$

$$d(H ; e_P) = \frac{1}{|\vec{n}_P|} \cdot | \vec{n}_P \cdot \overrightarrow{AH} | = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ -10 \end{pmatrix} \right| = \frac{10}{\sqrt{11}} \approx 3{,}02$$

Der Abstand Spitze – Piste beträgt etwa 3 m.

2. Möglichkeit: Anwendung der Lotgeradenmethode

Ebene e_P: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 60 = 0$

Lotgerade l: $\vec{x} = \vec{h} + \lambda \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Einsetzen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right] - 60 = 0 \Leftrightarrow 70 + 11\lambda - 60 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{10}{11}$$

(Die konkrete Berechnung der Koordinaten des Lotfußpunkts L ist nicht unbedingt erforderlich. Der gesuchte Abstand ergibt schon allein aus dem Parameterwert $\lambda = -\frac{10}{11}$)

Es folgt:

$$| \overrightarrow{HL} | = | \vec{h} - \vec{l} | = | -\frac{10}{11} \cdot \vec{n} | = \frac{10}{11} \cdot | \vec{n} | = \frac{10}{11} \cdot \sqrt{11} = \frac{10}{\sqrt{11}} \approx 3{,}02$$

Der Abstand Spitze – Piste beträgt etwa 3 m.

8. Volumen der Schneemenge **2,0 Punkte**

Die dreieckige Auslauffläche ist rechtwinklig mit zwei Katheten der Länge 30 m.

Damit ergibt sich als Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2} \cdot 30 \text{ m} \cdot 30 \text{ m} = 450 \text{ m}^2$

Volumen: V = Grundfläche · Höhe = $450 \text{ m}^2 \cdot 0{,}40 \text{ m} = 180 \text{ m}^3$

Es müssen also 180 m^3 mit Schnee gefüllt werden.

Alternative: Flächenberechnung vektorgeometrisch über den Punkt $E(30 \mid 60 \mid 0)$.

$$A = \frac{1}{2} \cdot | \overrightarrow{EC} \times \overrightarrow{ED} | = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -900 \end{pmatrix} \right| = 450$$

9. Gleiche Steilheit der Wege **1,5 Punkte**

Es gilt: $C(30 \mid 30 \mid 0)$; $B(30 \mid 0 \mid 10)$; $A(0 \mid 0 \mid 20)$; $D(0 \mid 60 \mid 0)$

- Der Weg von C nach B steigt auf 30 m um 10 m an: Steigung $m = \frac{1}{3}$
- Der Weg von B nach A steigt auf 30 m um 10 m an: Steigung $m = \frac{1}{3}$
- Der Weg von D nach A steigt auf 60 m um 20 m an: Steigung $m = \frac{1}{3}$

Alle Wege sind gleich steil.

Alternative: Argumentation über Winkel und Parallelität

Aufgabe 3

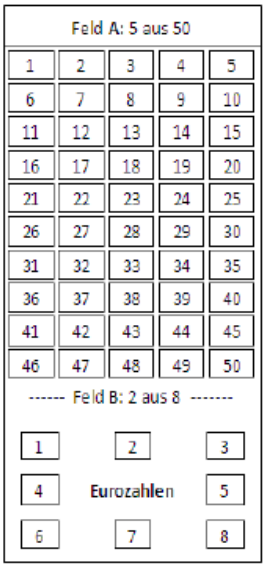
WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

1. Seit März 2012 kann man in Deutschland den *Eurojackpot* spielen. Es handelt sich dabei um eine Lotterie, bei der Personen aus sieben EU-Ländern teilnehmen können.
Die Abbildung rechts zeigt ein Tippfeld eines *Eurojackpot*-Spielscheins. Es gibt pro Spiel zwei voneinander unabhängige Ziehungen:

In einer ersten Ziehung (Feld A auf dem Tippschein) werden 5 von 50 Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge gezogen.

In der zweiten Ziehung werden die beiden so genannten Eurozahlen ebenfalls nacheinander ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge aus 8 möglichen Zahlen gezogen (Feld B auf dem Tippschein).

Es gibt verschiedene Gewinnklassen. In der Gewinnklasse I kann man den Jackpot mit mindestens 10 Millionen Euro gewinnen. Dazu muss man in den beiden Feldern A und B alle Gewinnzahlen richtig angekreuzt haben.



1.1 Geben Sie für beide Ziehungen jeweils die Anzahl der Kombinationsmöglichkeiten an.

1.2 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit die Gewinnklasse I zu erreichen.

1.3 Herr Maier hat zwei Eurozahlen im Feld B angekreuzt. Die Ziehung der beiden Eurozahlen aus Feld B kann mit einem zweistufigen Baumdiagramm verdeutlicht werden.
Dabei soll für einen Treffer T gelten:

T: Die gezogene Zahl ist eine der beiden von Herrn Maier angekreuzten Zahlen.

Fertigen Sie zu diesem Sachverhalt ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm an und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Herr Maier keine Eurozahl richtig angekreuzt hat.

2. Glücksspiel kann süchtig machen. Eine Studie beschäftigte sich deshalb mit der Spielsucht. Dazu wurden insgesamt 4000 Personen befragt, darunter 2800 Männer und 1200 Frauen. Es stellte sich heraus, dass 10 der befragten Männer und 3 der befragten Frauen spielsüchtig waren.

2.1 Veranschaulichen Sie die Ergebnisse dieser Studie in einer Vierfeldertafel unter Angabe von absoluten Häufigkeiten. Betrachten Sie dabei folgende Ereignisse:
M: „Die befragte Person ist männlich.“
S: „Die befragte Person ist spielsüchtig.“

2.2 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

2.2.1 „Eine zufällig ausgewählte Person ist nicht spielsüchtig.“

2.2.2 „Eine zufällig ausgewählte Person ist eine spielsüchtige Frau.“

2.3 Eine zufällig ausgewählte Person ist spielsüchtig. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person eine Frau ist.

3. Obwohl der *Eurojackpot* mit einem hohen Hauptgewinn lockte, wurde er von den Lottospielern in den ersten Monaten eher gemieden. Lediglich etwa 8 von 100 Lottospielern spielten den *Eurojackpot*.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass von 20 befragten Lottospielern

3.1 keine Person den *Eurojackpot* spielte,

3.2 genau zwei Personen den *Eurojackpot* spielten,

3.3 mindestens zwei Personen den *Eurojackpot* spielten.

L ö s u n g e n

1.1 Kombinationsmöglichkeiten für die beiden Ziehungen **1,0 Punkte**

Ziehung A (Auswahl 5 aus 50): Anzahl der Möglichkeiten $\binom{50}{5} = 2\,118\,760$

Ziehung B (Auswahl 2 aus 8): Anzahl der Möglichkeiten $\binom{8}{2} = 28$

1.2 Wahrscheinlichkeit für Gewinnklasse I **2,0 Punkte**

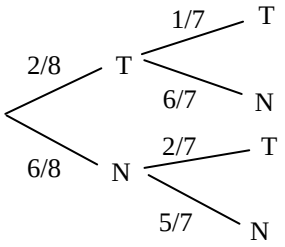
A: „Feld A richtig angekreuzt." *B*: „Feld B richtig angekreuzt."

$P(A) = \frac{1}{2\,118\,760}$ $P(B) = \frac{1}{28}$

Da *A* und *B* unabhängig sind, gilt: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{59\,325\,280}$

1.3 Baumdiagramm und Wahrscheinlichkeit für keine Eurozahl **3,0 Punkte**

Baumdiagramm:



Bezeichnungen:

T: Zahl von Herr Maier gezogen

N: Zahl von Herr Maier nicht gezogen

P(„kein Treffer") = P({(N,N)}) = $\frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{28} \approx 0{,}5357$ (Pfad im Baumdiagramm)

2.1 Vierfeldertafel (mit absoluten Zahlen) **2,0 Punkte**

	M	$\overline{M}$	Σ
S	**10**	**3**	*13*
$\overline{S}$	*2790*	*1197*	*3987*
Σ	**2800**	**1200**	**4000**

2.2 Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten

2.2.1 **„Eine zufällig ausgewählte Person ist nicht spielsüchtig."** **0,5 Punkte**

$P(\overline{S}) = \frac{3987}{4000} = 0{,}99675$ (Ablesen aus der Vierfeldertafel)

2.2.2 **„Eine zufällig ausgewählte Person ist eine spielsüchtige Frau."** **1,0 Punkte**

Zu berechnen ist die Wahrscheinlichkeit eines UND-Ereignisses:

$P(\overline{M} \cap S) = \frac{3}{4000} = 0{,}00075$

2.3 „Wahrscheinlichkeit, dass eine spielsüchtige Person eine Frau ist **1,5 Punkte**

Es handelt sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit.

Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit gesucht ist: $\overline{M}$ (Frau)
Bedingung: S (Die betrachtete Person ist spielsüchtig.)

Damit ergibt sich:

$$P_S(\overline{M}) = P(\overline{M} \mid S) = \frac{P(\overline{M} \cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{3}{4000}}{\frac{13}{4000}} = \frac{3}{13} \approx 0{,}2308$$

Alternative: Direktes Ablesen aus der Vierfeldertafel: $P_S(\overline{M}) = \frac{|\overline{M} \cap S|}{|S|} = \frac{3}{13}$

3. *Eurojackpot*

Interpretation: Bernoulli-Kette der Länge $n = 20$
Treffer: „Spieler des Eurojackpots“ mit $p = 0{,}08$

3.1 Keine Person spielt den *Eurojackpot*. **1,0 Punkte**

$$P(T = 0) = \binom{20}{0} \cdot 0{,}08^0 \cdot 0{,}92^{20} \approx 0{,}1887$$

3.2 Genau zwei Personen spielen den *Eurojackpot*. **1,0 Punkte**

$$P(T = 2) = \binom{20}{2} \cdot 0{,}08^2 \cdot 0{,}92^{18} \approx 0{,}2711$$

3.3 Mindestens zwei Personen spielen den *Eurojackpot*. **2,0 Punkte**

$$P(T \geq 2) = 1 - P(T < 2) = 1 - P(T \leq 1) = 1 - (P(T = 0) + P(T = 1))$$
$$= 1 - (0{,}1887 + \binom{20}{1} \cdot 0{,}08^1 \cdot 0{,}92^{19})$$
$$\approx 1 - (0{,}1887 + 0{,}3282) = 0{,}4831$$

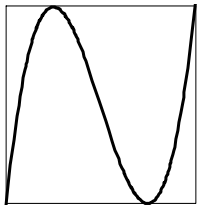
Schriftliche Abiturprüfung 2013

G-Kurs

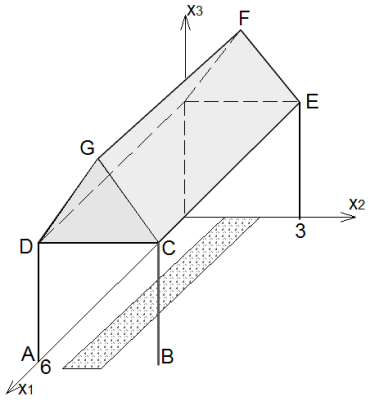
Nachtermin

Themenübersicht

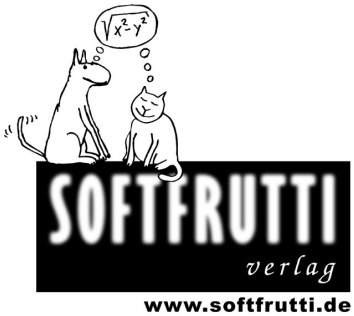
- Aufgabe 1: **Analysis**
  - Betrachtung einer ganzrationalen Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$
  - Modellierung: Firmenlogos
  - Untersuchungen zur e-Funktion $f(x) = 20 + 60\,e^{-\frac{1}{20}x}$



- Aufgabe 2: **Analytische Geometrie**
  - Modellierung: Zelt für Staatsgast
  - Nachweis rechtwinkliges Dreieck
  - Projektion in Bodenebene



- Aufgabe 3: **Stochastik**
  - Wahrscheinlichkeitsmaß
  - Bernoulli-Kette
  - Erstellen und Auswerten eines Baumdiagramms



Aufgabe 1
ANALYSIS

1. Gegeben ist die Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto x^3 - 6x^2 + 9x$.

1.1 Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion.

1.2 Untersuchen Sie die Funktion auf Extrempunkte.

1.3 Geben Sie die Grenzwerte für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ an und skizzieren Sie mit Hilfe der bisher gefundenen Informationen den Graphen der Funktion f.

1.4 Berechnen Sie die Wendestelle der Funktion f und zeigen Sie, dass der Wendepunkt auf der ersten Winkelhalbierenden liegt.

1.5 Textilfabrikantin Frau Nadel entwirft für ihre Firma ein neues Logo. Als Aufdruck wählt sie ein stilisiertes N (vgl. Abb.1). Dieses wird beschrieben durch obige Funktion

$$f: D \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto x^3 - 6x^2 + 9x\ .$$

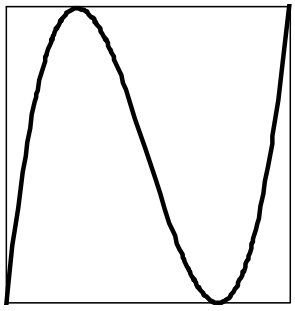


Abb. 1

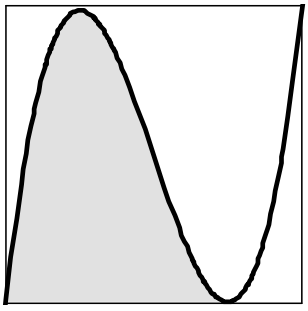


Abb. 2

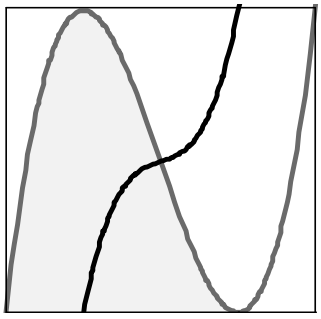


Abb. 3

1.5.1 Welche Maße muss ein quadratisches Firmenschild haben, damit dieses N wie in Abb. 1 darauf passt (1 Längeneinheit = 1 dm)?

1.5.2 Der dunkle Bereich unter dem N soll auf dem Schild farbig werden (vgl. Abb. 2). Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Fläche.

1.5.3 Firmenpartner Herr Zwirn möchte seinen Namen auch im Logo vertreten sehen. Deshalb wird eine zusätzliche Linie (gedrehtes Z) eingefügt (vgl. Abb. 3).
Diese wird beschrieben durch

$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto \frac{5}{3}x^3 - 10x^2 + \frac{61}{3}x - 12\ .$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangenten an den Graphen von h im Punkt $(2 \mid 2)$.

2. Gegeben sind die Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto 20 + 60\,e^{-\frac{1}{20}x}$.

2.1 Bestimmen Sie den Funktionswert an der Stelle $x = 30$.

2.2 Berechnen Sie die Steigung des Graphen der Funktion f im Punkt $(30 \mid f(30))$.

2.3 Begründen Sie, dass die Funktion f umkehrbar ist.

2.4 Bekannt ist die Umkehrfunktion der Funktion f. Sie lautet:

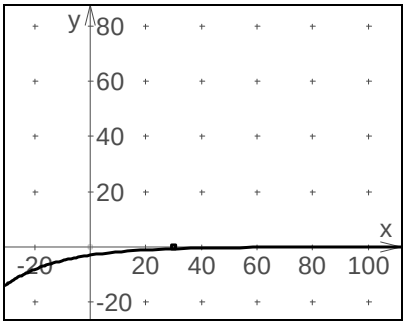
$$f^{-1}: D_{\max} \to \mathbb{R};\ x \mapsto -20 \ln\left(\frac{1}{60}x - \frac{1}{3}\right) .$$

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von f^{-1}.

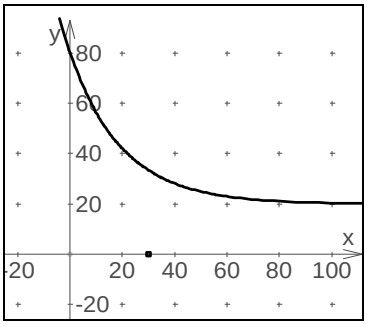
2.5 Untersuchen Sie die Funktion f **und** deren Umkehrfunktion f^{-1} (aus 2.4) auf Nullstellen.

2.6 Die folgenden Abbildungen zeigen die Graphen der Funktionen f, f^{-1} und f' in falscher Reihenfolge. Nutzen Sie Ihre Ergebnisse aus 2.1 bis 2.5 und ordnen Sie den Abbildungen die entsprechenden Funktionen zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung.

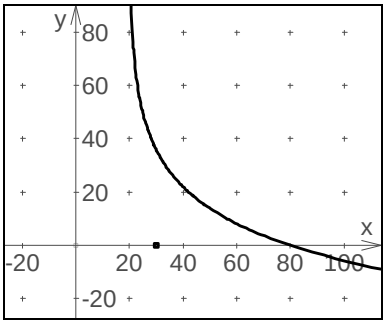
①



②



③



L ö s u n g e n

1. Untersuchung der ganzrationalen Funktion *f*

Betrachtet wird zunächst die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto x^3 - 6x^2 + 9x$.

1.1 Nullstellen — 2,5 Punkte

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x^2 - 6x + 9) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x \cdot (x-3)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ (einfach) $\vee\ x = 3$ (doppelt)

1.2 Extrempunkte — 4,5 Punkte

- Ableitungen: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3 \cdot (x^2 - 4x + 3) = 3 \cdot (x-1) \cdot (x-3)$

  $f''(x) = 6x - 12$

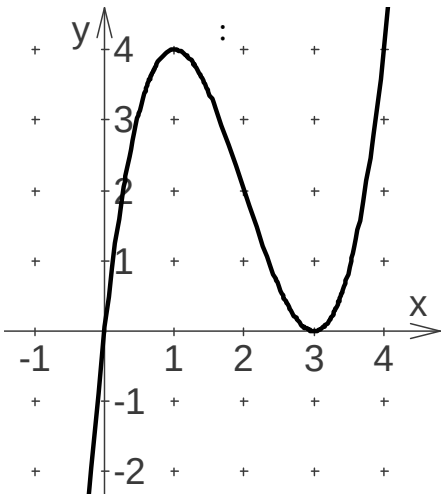
  $f'''(x) = 6$
- Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$
- Hinreichende Bedingung: $f''(1) = -6$, also Maximumstelle. Mit $f(1) = 4$ folgt $H(1 \mid 4)$.

  $f''(3) = +6$, also Minimumstelle. Mit $f(3) = 0$ folgt $T(3 \mid 0)$.

1.3 Grenzwerte und Graph — 3,0 Punkte

Grenzwerte: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Graph :



1.4 Wendepunkt — 3,0 Punkte

- Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
- Hinreichende Bedingung: $f'''(2) = 6 \neq 0$, also Wendestelle.
- Angabe des Wendepunkts: Mit $f(2) = 2$ folgt $W(2 \mid 2)$.

Wegen $x_W = 2 = y_W$ liegt W auf der ersten Winkelhalbierenden.

1.5 Firmenschild

1.5.1 Maße des Firmenschildes **1,0 Punkte**

Die Quadratseite ist 4 dm lang (vgl. Schaubild in 1.3).

1.5.2 Fläche **2,5 Punkte**

Gesucht ist das Maß der Fläche zwischen G_f und der x-Achse über dem Intervall [0 ; 3].

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 9x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2\right]_0^3 = (\frac{81}{4} - 54 + \frac{81}{2}) - 0 = 6\frac{3}{4}$$

Die Fläche ist 6,75 dm^2 groß.

1.5.3 Tangentengleichung **2,5 Punkte**

Betrachtet wird die Funktion h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \frac{5}{3}x^3 - 10x^2 + \frac{61}{3}x - 12$.

Ansatz für die Gleichung der Tangente an der Stelle 2 gilt: $y = h'(2) \cdot (x - 2) + h(2)$

- Ableitung: $h'(x) = 5x^2 - 20x + \frac{61}{3}$
- Steigung an der Stelle 2: $h'(2) = 5 \cdot 4 - 20 \cdot 2 + \frac{61}{3} = \frac{1}{3}$
- Funktionswert: $h(2) = 2$ (gemäß Vorgabe Punkt (2 | 2))

Damit ergibt sich die Tangentengleichung: $y = \frac{1}{3} \cdot (x - 2) + 2 = \frac{1}{3} \cdot x + \frac{4}{3}$

2. Untersuchung der Exponentialfunktion *f*

Betrachtet wird die Funktionen f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto 20 + 60\,e^{-\frac{1}{20}x}$.

2.1 Funktionswert an der Stelle 30 **0,5 Punkte**

$f(30) = 20 + 60\,e^{-\frac{1}{20} \cdot 30} \approx 33{,}39$

2.2 Steigung des Graphen an der Stelle 30 **1,5 Punkte**

Ableitung: $f'(x) = 60\,e^{-\frac{1}{20}x} \cdot (-\frac{1}{20}) = -3\,e^{-\frac{1}{20}x}$

Steigungswert: $f'(30) = -3\,e^{-\frac{1}{20} \cdot 30} \approx -0{,}67$

2.3 Umkehrbarkeit **1,5 Punkte**

Es gilt $f'(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dies bedeutet, dass f streng monoton fallend und damit auch umkehrbar ist.

2.4 Maximale Definitionsmenge von f^{-1} **2,5 Punkte**

Angegeben ist: $f^{-1}(x) = -20 \ln(\frac{1}{60}x - \frac{1}{3})$.

Bedingung für den ln-Term: $\frac{1}{60}x - \frac{1}{3} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{60}x > \frac{1}{3} \Leftrightarrow x > 20$

Somit: $D_{max} =]20 ; +\infty[$

2.5 Nullstellen von f und f^{-1} **2,5 Punkte**

- von f: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 20 + 60\,e^{-\frac{1}{20}x} = 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{20}x} = -\frac{1}{3}$ (unerfüllbar)

  Die Funktion f hat keine Nullstellen.

- von f^{-1}: $f^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow -20 \ln(\frac{1}{60}x - \frac{1}{3}) \Leftrightarrow \frac{1}{60}x - \frac{1}{3} = 1$

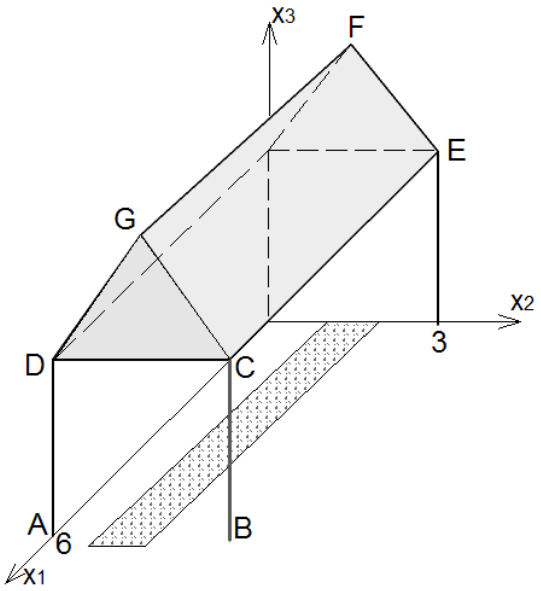
  $\Leftrightarrow \frac{1}{60}x = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = 80$

2.6 Zuordnung der Graphen **2,5 Punkte**

- Bild 1 zeigt den Graphen von f', da die Ableitungsfunktion nur negative Funktionswerte annimmt.
- Bild 2 zeigt den Graphen von f, da f nur positive Funktionswerte annimmt.
- Bild 3 zeigt den Graphen von f^{-1}, da f^{-1} bei 80 eine Nullstelle hat.

Aufgabe 2
ANALYTISCHE GEOMETRIE

In einem fernen Land empfängt ein Herrscher vor seinem Palast einen Staatsgast. Ihm zu Ehren wird ein roter Teppich ausgelegt. Darüber wird als Regenschutz ein Zelt errichtet. Das Zelt besteht aus vier 3 Meter hohen Pfosten und zwei dreieckigen Giebelseiten mit den Spitzen $G(6 \mid 1{,}5 \mid 5)$ und $F(0 \mid 1{,}5 \mid 5)$. Das Zelt ist 6 Meter lang, 3 Meter breit und 5 Meter hoch.
(1 Längeneinheit = 1 Meter)



1. Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte *B*, *D* und *E* an.

2. Die linke Teppichkante (vgl. Abb.) wird beschrieben durch

$$g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -0{,}25 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie, dass der 1 Meter breite Teppich nicht mittig unter dem Zelt liegt.

3. An jeden Pfosten wird in zwei Meter Höhe eine Lampe fixiert. Geben Sie eine Gleichung der Ebene an, in der diese Lampen befestigt sind.

4. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene e_D in der die Dachfläche *CEFG* liegt. [Zur Kontrolle: $e_D: 4x_2 + 3x_3 = 21$]

5. Zeigen Sie: Das Giebeldreieck *DCG* ist nicht rechtwinklig.

6. Im Diagonalenschnittpunkt der Dachfläche *CEFG* ist die Abdeckplane beschädigt. Regenwasser tropft senkrecht auf den Boden. Landen die Tropfen auf dem Teppich? Begründen Sie Ihre Antwort durch eine Rechnung.

7. Auf der Palastterrasse steht ein Kameramann. Er hat seine Kamera im Punkt (10 | 8 | 7) in Richtung $\vec{n} = \begin{pmatrix} -14 \\ -6 \\ -7 \end{pmatrix}$ ausgerichtet.

Berechnen Sie, in welchem Punkt auf dem Vorplatz die Staatskarosse halten soll, damit der Kameramann das Aussteigen des Gastes gut aufnehmen kann.

L ö s u n g e n

1. Koordinaten der Eckpunkte **1,5 Punkte**

Punkte $B(6 \mid 3 \mid 0)$, $D(6 \mid 0 \mid 3)$, $E(0 \mid 3 \mid 3)$ (folgt aus den gegebenen Längenangaben)

2. Teppich nicht mittig unter dem Zelt **1,0 Punkte**

Der Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 6 \\ -0,25 \\ 0 \end{pmatrix}$ von g ist nicht kollinear zu $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Richtung x_1-Achse).

Die Teppichkante ist nicht parallel zur x_1-Achse. Der Teppich kann nicht mittig liegen.

Alternative: vordere Teppichmitte $M_T(6 \mid 1{,}25 \mid 0) \neq$ vordere Zeltmitte $M_Z(6 \mid 1{,}5 \mid 0)$

3. Gleichung der Ebene, in der die Lampen befestigt sind **1,0 Punkte**

Bei der gesuchten Ebene handelt es sich um eine Ebene parallel zur x_1-x_2-Ebene (Gleichung $x_3 = 0$) im Abstand 2.

Sie hat daher die Koordinatengleichung $x_3 = 2$.

Alternative: Parametergleichung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

4. Koordinatengleichung, in der die Dachfläche *CEFG* liegt **3,5 Punkte**

Aufpunkt der gesuchten Ebene: $F(0 \mid 1{,}5 \mid 5)$

– Richtungsvektoren: $\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1,5 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1,5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{FE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1,5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

– Normalenvektor: $\overrightarrow{FG} \times \overrightarrow{FE} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1,5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix}$; wähle $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

- Punktnormalengleichung: $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1,5 \\ 5 \end{pmatrix}) = 0$
- Allgemeine Normalengleichung: $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 21 = 0$
- Koordinatengleichung: $e_D : 4x_2 + 3x_3 = 21$

5. Giebeldreieck nicht rechtwinklig **2,5 Punkte**

Das Dreieck Δ*DCG* ist gleichschenklig mit der Basis $\overline{DC}$. Als rechter Winkel kommt daher nur der Winkel $\sphericalangle DGC$ in Frage.

Mit *C*(6 | 3 | 3) erhält man für die Richtungsvektoren:

$$\overrightarrow{GD} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 1,5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1,5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{GC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 1,5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich: $\overrightarrow{GD} \cdot \overrightarrow{GC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1,5 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1,5 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 - 2,25 + 4 = 1,75 \neq 0$.

Das Dreieck Δ*DCG* ist also nicht rechtwinklig.

6. Tropfen auf dem Teppich **2,5 Punkte**

Mittelpunkt der Strecke $\overline{CF}$:

$$\vec{m}_{CF} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{c} + \vec{f}) = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1,5 \\ 5 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 3 \\ 2,25 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Projektion in x_1-x_2-Ebene ergibt den Punkt: (3 | 2,25 | 0)

Die Tropfen landen (rechts) neben dem Teppich, da für die x_2-Koordinate gilt 2,25 > 2.

7. Haltepunkt der Staatskarosse **3,0 Punkte**

Gesucht ist der Schnittpunkt (Spurpunkt) von

$g_K: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -14 \\ -6 \\ -7 \end{pmatrix}$ und der x_1-x_2-Ebene mit der Gleichung $x_3 = 0$.

Aus $x_3 = 0$ folgt: $7 - 7\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$

Das Auto sollte in *A*(– 4 | 2 | 0) halten.

Aufgabe 3

WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

1. In einer Urne befinden sich schwarze, rote, blaue und grüne Kugeln. Es wird zufällig eine Kugel gezogen und deren Farbe festgestellt. Dadurch ergeben sich folgende Ereignisse:

S: Es wird eine schwarze Kugel gezogen. R: Es wird eine rote Kugel gezogen.

B: Es wird eine blaue Kugel gezogen. G: Es wird eine grüne Kugel gezogen.

1.1 Überprüfen Sie, ob es sich bei der im Folgenden dargestellten Funktion um ein Wahrscheinlichkeitsmaß für obiges Zufallsexperiment handeln könnte. Begründen Sie Ihre Entscheidung. Falls es sich um ein Wahrscheinlichkeitsmaß handelt, geben Sie an, wie viele Kugeln sich von jeder Farbe in der Urne befinden könnten.

$\{\omega\}$	S	R	B	G
$P(\{\omega\})$	0,4	$\frac{1}{3}$	0,125	$\frac{17}{120}$

1.2 Das Abzählen von Kugeln in einer Urne ergab folgende Situation: In der Urne lagen doppelt so viele schwarze wie rote, doppelt so viele rote wie blaue und doppelt so viele blaue wie grüne Kugeln. Geben Sie für diese Situation in einer Tabelle ein geeignetes Wahrscheinlichkeitsmaß an.

2. Bei der Kaninchenzucht von Englischen Schecken kommen über lange Zeit gesehen reinweiße Schecken, Typenschecken (weiße Kaninchen mit schwarzer Punktkette) und schwarze Schecken im Verhältnis 1 : 2 : 1 vor.

2.1 Bauer Albert liefert die nächsten 30 Nachkommen seiner Scheckenzucht an eine Tierhandlung. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt genau die Hälfte das typische Punktmuster?

2.2 Schwarze Schecken lassen sich schlecht verkaufen. Wie sicher kann ein Züchter sein, dass er bei 10 Geburten höchstens eine schwarze Schecke bekommt?

2.3 Bei Züchter Lampe ergab sich bei seinen 24 Jungtieren zufällig genau das in 2. beschriebene Verhältnis 1 : 2 : 1. Er will zwei Kaninchen verkaufen und greift dazu nacheinander zweimal in den Kaninchenstall, nimmt zufällig eines heraus und sperrt es in die Transportbox. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind zwei reinweiße Kaninchen in der Box?

3. Smartphones sind immer mehr im Kommen und werden von verschiedenen Firmen hergestellt. Ein Gerät der Marke X wurde weltweit im Jahre 2012 von 12% aller Smartphonekäufer erworben. Die Geräte der Marke X gibt es entweder mit dem Betriebssystem Android oder mit einem anderen Betriebssystem.

68% aller Smartphonekäufer haben sich für das Betriebssystem Android entschieden. Von denjenigen, die **kein** Android ausgewählt haben, entschieden sich 30% **für** die Marke X.

3.1 Zeichnen Sie zu oben genanntem Sachverhalt ein geeignetes Baumdiagramm und beschriften Sie die Äste soweit wie möglich mit Wahrscheinlichkeiten, die man aus dem Text entnehmen kann.

3.2 Mit welcher Wahrscheinlichkeit wählt einer der oben genannten Käufer weder das Betriebssystem Android noch die Marke X?

3.3 Berechnen Sie, wie viel Prozent aller Smartphonekäufer sowohl Android als auch die Marke X wählen. Beachten Sie dabei, dass 12% aller Käufer sich für die Marke X entscheiden.

3.4 Ein zufällig herausgegriffener Smartphonebesitzer bedient gerade sein neu erworbenes Smartphone der Marke X. Mit welcher Wahrscheinlichkeit arbeitet dieses mit Android?

L ö s u n g e n

1. Urne mit schwarzen, roten, blauen und grünen Kugeln

1.1 Prüfen auf Wahrscheinlichkeitsmaß **3,0 Punkte**

Alle Wahrscheinlichkeiten sind nichtnegativ.

Für die Summe der in der Tabelle gegebenen Wahrscheinlichkeiten gilt:

$$\Sigma P(\{\omega\}) = 0{,}4 + \frac{1}{3} + 0{,}125 + \frac{17}{120} = \frac{48}{120} + \frac{40}{120} + \frac{15}{120} + \frac{17}{120} = 1$$

Die Funktion ist somit ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Es können sich 48 schwarze, 40 rote, 15 blaue und 17 grüne Kugeln in der Urne befinden (*oder Vielfache davon*).

1.2 Angabe eines Wahrscheinlichkeitsmaßes **2,0 Punkte**

Gemäß der Aufgabestellung gilt: $s = 2r$, $r = 2b$ und $b = 2g$.

Mögliche Anzahlen: 1 grün, 2 blau, 4 rot und 8 schwarz (insgesamt 15)

W-Maß:

$\{\omega\}$	s	r	b	g
$P(\{\omega\})$	$\frac{8}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

2. Kaninchenzucht von Englischen Schecken

Es gilt: P(weiße Schecken) = 0,25
P (Typenschecken) = 0,5
P(schwarze Schecken) = 0,25

2.1 Hälfte der Schecken mit typischem Punktmuster **1,5 Punkte**

Interpretation:
Bernoullikette der Länge $n = 30$
Treffer: „Typenschecken“ $p = 0{,}5$

Es gilt:

$$P(T = 15) = \binom{30}{15} \cdot 0{,}5^{15} \cdot 0{,}5^{15} \approx 0{,}1445$$

2.2 Bei 10 Geburten höchstens eine schwarze Schecke **2,0 Punkte**

Interpretation:
Bernoullikette der Länge $n = 10$
Treffer: schwarze Schecke mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}25$

Es gilt:

$$P(T \le 1) = P(T = 0) + P(T = 1) = \binom{10}{0} \cdot 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0{,}25^1 \cdot 0{,}75^9$$

$$\approx 0{,}0563 + 0{,}1877 = 0{,}2440$$

Nur mit knapp 25% kann er sicher sein, höchstens eine schwarze Schecke zu bekommen.

2.3 Zwei reinweiße Kaninchen in der Box **1,5 Punkte**

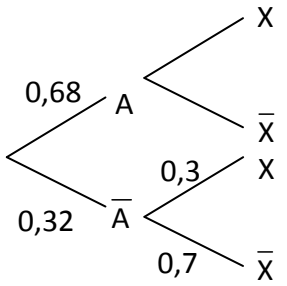
Bei 24 Schecken in dem angegebenen Verhältnis 1 : 2 : 1 befinden sich 6 reinweiße Schecken, 12 Typenschecken und 6 schwarze Schecken in der Box.

$$P(\text{„genau 2 weiße“}) = \underset{\text{Ziehung 1}}{\frac{6}{24}} \cdot \underset{\text{Ziehung 2}}{\frac{5}{23}} \approx 0{,}0543$$

3. Smartphones

3.1 Baumdiagramm **1,5 Punkte**

A: Smartphone nutzt Android X: Smartphone der Marke X



3.2 Weder das Betriebssystem Android noch die Marke X **1,0 Punkte**

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit eines UND-Ereignisses:

$P(\overline{A} \cap \overline{X}) = 0{,}32 \cdot 0{,}7 = 0{,}224$ (Pfad im Baumdiagramm)

3.3 Sowohl Android als auch die Marke X **1,5 Punkte**

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit eines UND-Ereignisses $P(A \cap X)$.

Unter Verwendung von $P(X) = 0{,}12$ und des (unvollständigen) Baumdiagramm folgt:

$$\begin{aligned} P(X) = 0{,}12 &\Leftrightarrow P(A \cap X) + P(\overline{A} \cap X) = 0{,}12 \\ &\Leftrightarrow P(A \cap X) + 0{,}32 \cdot 0{,}3 = 0{,}12 \\ &\Leftrightarrow P(A \cap X) + 0{,}096 = 0{,}12 \\ &\Leftrightarrow P(A \cap X) = 0{,}024 \end{aligned}$$

3.4 Wahrscheinlichkeit für Arbeiten mit Android **1,0 Punkte**

Es handelt sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit.
Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit gesucht ist: A (Arbeiten mit Android)
Bedingung: X (Smartphone der Marke X.)

Damit ergibt sich:

$$P_X(A) = \frac{P(A \cap X)}{P(X)} = \frac{0{,}024}{0{,}12} = 0{,}2$$