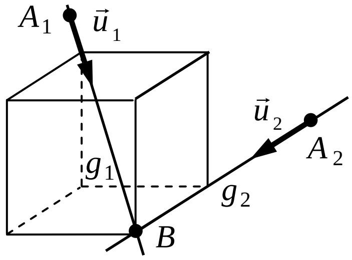
Lageuntersuchung für nichtparallele Geraden

Wir betrachten im dreidimensionalen Raum zwei nicht parallele Geraden

$$g_1: \vec{x} = \vec{a}_1 + \lambda \cdot \vec{u}_1 \text{ und } g_2: \vec{x} = \vec{a}_2 + \mu \cdot \vec{u}_2 \text{ (mit } \vec{u}_1, \vec{u}_2 \text{ nicht kollinear).}$$

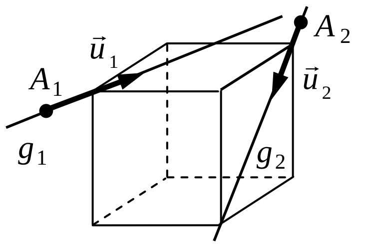
Für nichtparallele Geraden können folgende Fälle unterschieden werden:

1. Die Geraden schneiden sich in einem Punkt.



Die beiden Geraden g_1 und g_2 **schneiden sich** im Punkt B.

2. Die Geraden besitzen keinen gemeinsamen Punkt.



Die Geraden g_1 und g_2 sind **windschief**.

Zwei Geraden, die nicht parallel sind und keinen gemeinsamen Punkt besitzen, bezeichnet man als **windschief**.

Lageentscheidung mithilfe einer Schnittpunktberechnung

Die Frage, ob zwei nicht parallele Geraden sich in einem Punkt schneiden oder windschief sind, entscheidet man am einfachsten dadurch, dass man versucht, den Schnittpunkt zu berechnen. Hierbei verwendet man das Gleichsetzungsverfahren.

Beispiel (Windschiefe Geraden)

Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -11 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- *Test auf Parallelität*

  Die Richtungsvektoren sind nicht kollinear, die Geraden daher nicht parallel.

- *Lageentscheidung (mithilfe des Gleichsetzungsverfahrens)*

$$\begin{pmatrix} -11 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4\lambda & - & 3\mu & = & 7 \\ 3\lambda & - & 5\mu & = & 4 \\ -2\lambda & - & \mu & = & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{matrix}$$

$$\text{Lösung:} \begin{cases} 2 \cdot \text{(III)} - \text{(I)}: & \mu = -1 \\ \text{Einsetzen in (III)}: & -2\lambda - (-1) = 3 \Leftrightarrow -2\lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = -1 \\ \text{Probe in (II)}: & 3 \cdot (-1) - 5 \cdot (-1) = -3 + 5 = 2 \neq 4 \end{cases}$$

Das Gleichungssystem ist unerfüllbar.
Es gibt keinen Schnittpunkt. Die Geraden sind somit windschief.
Zu beachten ist, dass erst die Probe im 3. Lösungsschritt über die Erfüllbarkeit entscheidet.

Beispiel (Sich schneidende Geraden)

Gegeben sind die Geraden $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- *Test auf Parallelität*

  Die Richtungsvektoren sind nicht kollinear, die Geraden daher nicht parallel.

- *Lageentscheidung (mithilfe des Gleichsetzungsverfahrens)*

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3\lambda & - & 2\mu & = & -5 \\ \lambda & - & 2\mu & = & -1 \\ -2\lambda & - & \mu & = & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{matrix}$$

$$\text{Lösung:} \begin{cases} \text{(II)} - \text{(I)}: & 4\lambda = 4 \Leftrightarrow \lambda = 1 \\ \text{Einsetzen in (II)}: & 1 - 2\mu = -1 \Leftrightarrow -2\mu = -2 \Leftrightarrow \mu = 1 \\ \text{Probe in (III)}: & -2 \cdot 1 - 1 = -3 \end{cases}$$

  Das Gleichungssystem ist für $\lambda = 1$ und $\mu = 1$ erfüllt. Es gibt einen Schnittpunkt.

- *Schnittpunktberechnung*

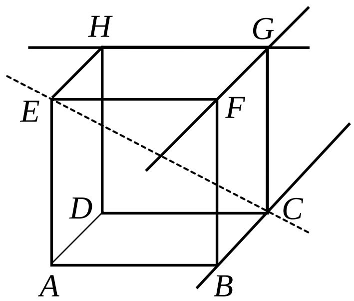
  Wir setzen $\lambda = 1$ in die Gleichung von g ein. Die Geraden g und h schneiden sich im Punkt $S(-4|3|4)$.

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aufgaben

27. Entscheiden Sie anhand der Abbildung, ob die angegebenen Geradenpaare sich schneiden, echt parallel oder windschief sind.

    a) Geraden BC und FG
    b) Geraden BC und HG
    c) Geraden EC und FG
    d) Geraden EC und HG
    e) Geraden FG und HG
    f) Geraden BC und EC



28. Begründen Sie, dass die Geraden

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

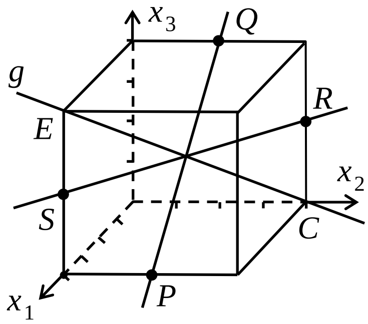
windschief sind.

29. Begründen Sie, dass sich die Geraden schneiden.

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie den Schnittpunkt.

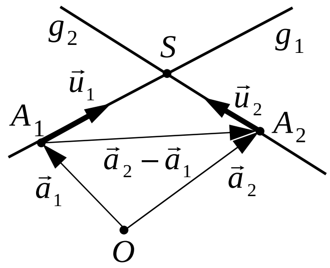
30. In einem Würfel der Kantenlänge 4 liegt die Raumdiagonale $\overline{EC}$ auf der Geraden g.
Die Punkte P, Q, R und S sind die Mittelpunkte der zugehörigen Kanten.
Wird g von den Geraden PQ bzw. SR geschnitten?
– Was vermuten Sie?
– Prüfen Sie Ihre Vermutung rechnerisch.



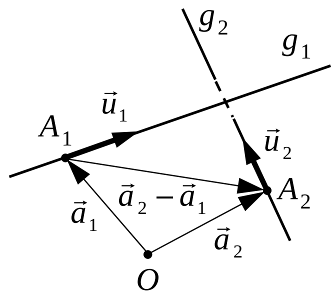
Die Frage, welcher der möglichen Fälle für zwei nichtparallele Geraden vorliegt, kann allgemein auch wie folgt untersucht werden.
Der Schnittpunktansatz führt mithilfe des Gleichsetzungsverfahrens zu der Vektorgleichung

$$\vec{a}_1 + \lambda \cdot \vec{u}_1 = \vec{a}_2 + \mu \cdot \vec{u}_2 \iff \lambda \cdot \vec{u}_1 - \mu \cdot \vec{u}_2 = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 .$$

- Ist das zugehörige Gleichungssystem mit Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ eindeutig erfüllbar, so ergibt sich ein Schnittpunkt.
  Die Vektoren $\vec{a}_2 - \vec{a}_1$, $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ sind dann komplanar.
  Nach dem Komplanaritätskriterium bedeutet dies:
  $$(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) \cdot (\vec{a}_2 - \vec{a}_1) = 0 .$$
  In diesem Fall liefert das Komplanaritätskriterium jedoch nur die Information, dass es einen Schnittpunkt gibt. Der Schnittpunkt selbst muss durch Lösen des Gleichungssystems gesondert berechnet werden.



- Ist das Gleichungssystem dagegen unerfüllbar, so sind die Geraden windschief.
  Die Vektoren $\vec{a}_2 - \vec{a}_1$, $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ sind in diesem Fall nicht komplanar. Es gilt: $(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) \cdot (\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \neq 0$.



Aufgabe

31. Für welche $k \in \mathbb{R}$ sind die Geraden windschief?

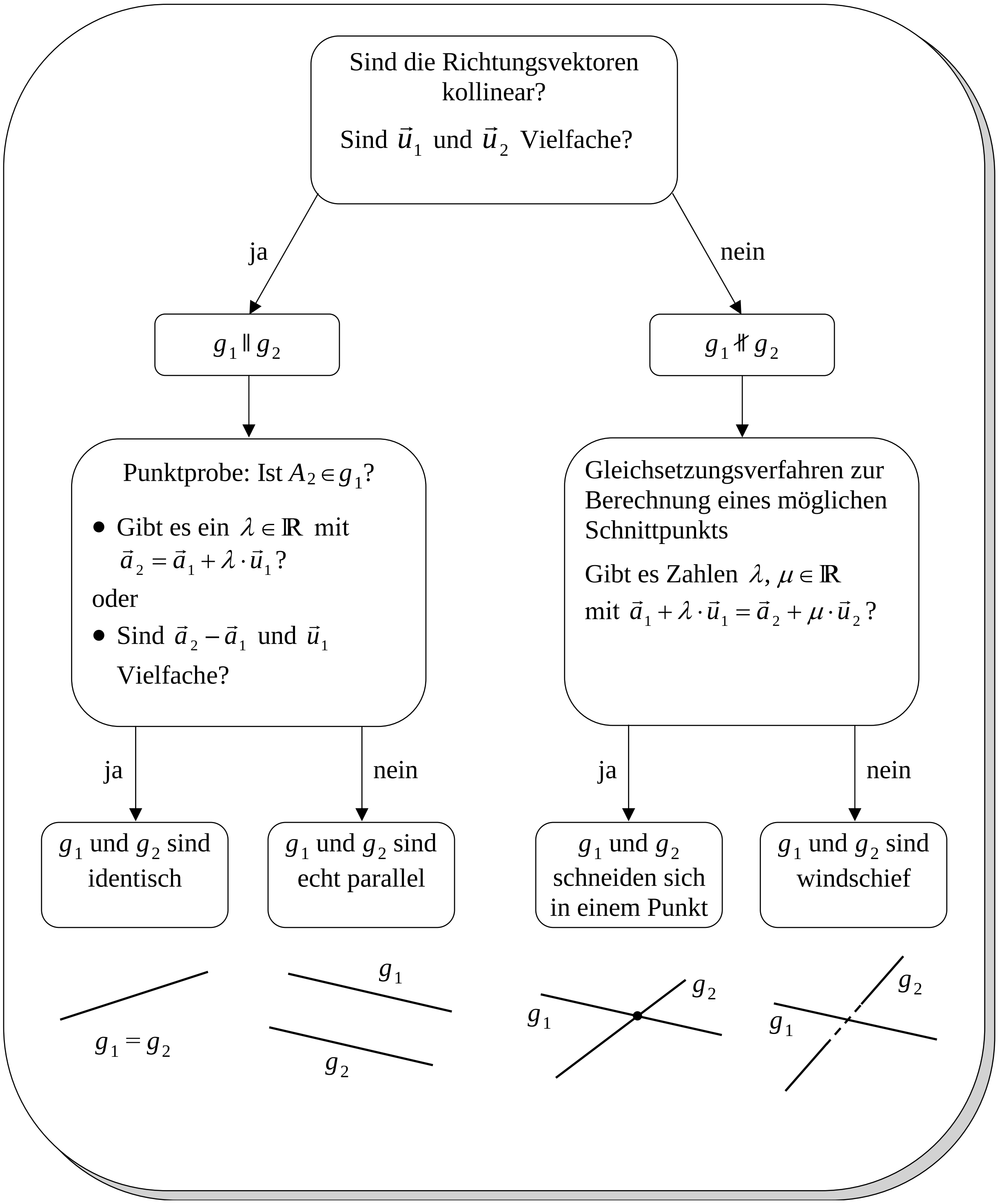
$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ k \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2k \end{pmatrix}$$

Lageuntersuchung für Geraden im Überblick

Im folgenden Diagramm ist die Vorgehensweise zur Untersuchung der Lagebeziehung zwischen zwei Geraden

$$g_1: \vec{x} = \vec{a}_1 + \lambda \cdot \vec{u}_1 \quad \text{und} \quad g_2: \vec{x} = \vec{a}_2 + \mu \cdot \vec{u}_2$$

in einer Übersicht dargestellt.



Aufgaben

32. Gegeben sind $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
    Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden.

33. Gegeben sind Geraden mit den Gleichungen
    $$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
    Welche der Geraden sind zueinander parallel, welche sogar identisch?

34. Zeigen Sie, dass die Geraden g und h windschief sind.
    a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
    b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

35. Untersuchen Sie die Geraden g und h auf ihre gegenseitige Lage. Berechnen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.
    a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -11 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$
    b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
    c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$
    d) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 13 \\ -2 \\ 14 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 4{,}5 \\ -9 \end{pmatrix}$

36. Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden g und h.

a) $g: \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

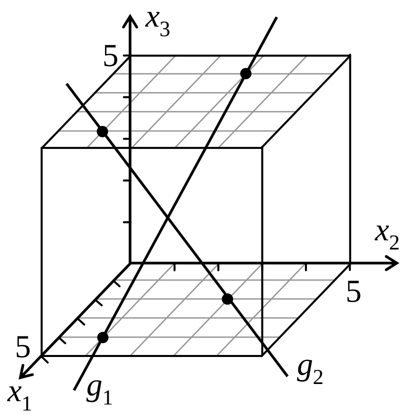
b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

37. Gegeben ist die Gerade mit der Gleichung $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

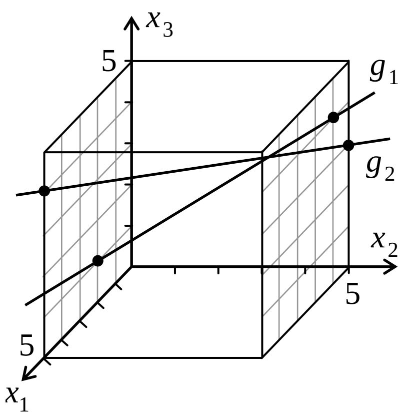
Geben Sie eine Gleichung einer Geraden
a) *h* an, welche die Gerade *g* schneidet,
b) *k* an, welche zur Gerade *g* parallel ist,
c) *l* an, welche zur Gerade *g* windschief ist.

38. Prüfen Sie rechnerisch, ob sich die Geraden g_1 und g_2 schneiden.

a)



b)



39. Gegeben ist ein Pyramidenstumpf mit den Eckpunkten
$A(4|0|0)$; $B(4|4|0)$,
$C(0|4|0)$; $D(0|0|0)$,
$E(3|1|3)$; $F(3|3|3)$,
$G(1|3|3)$; $H(1|1|3)$.

a) Zeigen Sie: $\overline{AB} \parallel \overline{HG}$,
$\overline{BC} \parallel \overline{EH}$.

b) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden durch die Seitenkanten.