9

Ganzrationale Funktionen

9.1 Definition ganzrationaler Funktionen

Im Folgenden werden neben linearen und quadratischen Funktionen auch solche betrachtet, bei denen die Variable in der dritten, vierten oder auch in einer noch höheren Potenz auftritt.

Ganzrationale Funktion

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$. Eine Funktion

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

heißt **ganzrationale Funktion** oder **Polynom n-ten Grades**.

Die Zahlen a_0, a_1, … , a_n heißen die Koeffizienten. Für die Definitionsmenge einer ganzrationalen Funktion gilt $D = \mathbb{R}$.

Die **konstanten Funktionen** $x \mapsto a_0$ und $a_0 \neq 0$ sind ganzrationale Funktionen nullten Grades. Der **Nullfunktion** $x \mapsto 0$ ordnet man keinen Grad zu.

Beispiele (Polynome und Nichtpolynome)

a) $p_3(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 5$ ist ein Polynom dritten Grades.

b) $p_1(x) = 4x + 15$ ist ein Polynom ersten Grades.

c) $p_0(x) = -4$ ist ein Polynom nullten Grades.

d) $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$ ist kein Polynom (wegen des Wurzelterms).

e) $h(x) = \frac{-2}{x^2} + 3$ ist kein Polynom (wegen des Bruchterms).

Aufgaben

1. Entscheiden Sie, welche der Funktionen ganzrationale Funktionen sind. Geben Sie gegebenenfalls den Grad an.

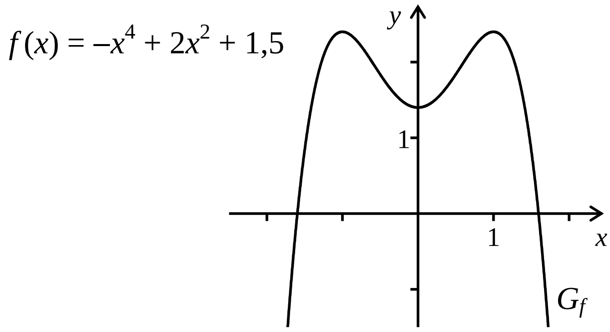
   a) $f(x) = 5 - 3x$ b) $f(x) = 0{,}5 \cdot (5x - 1)$ c) $f(x) = x^5 + \frac{1}{3}x - 2$

   d) $f(x) = 1$ e) $f(x) = \frac{3}{x}$ f) $f(x) = \frac{x}{3}$

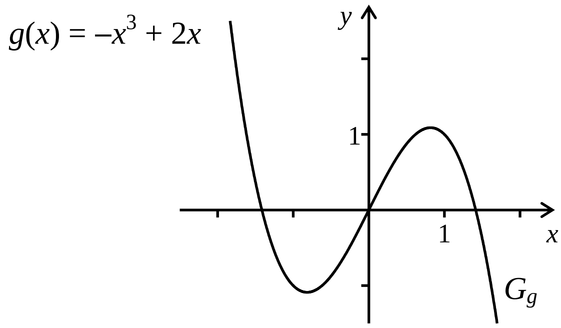
   g) $f(x) = -x^2 - \frac{1}{x}$ h) $f(x) = 3 - 6x^3 - x^5$ i) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

9.2 Symmetriekriterium für ganzrationale Funktionen

Bei ganzrationalen Funktionen lässt sich bereits durch einen Blick auf den Funktionsterm auf ein mögliches Symmetrieverhalten des Graphen schließen.



Symmetrie zur y-Achse



Symmetrie zum Ursprung

– Treten nur x-Potenzen mit geraden Exponenten und eventuell auch ein absolutes Glied a_0 auf, dann hat das Vorzeichen von x keinen Einfluss auf den Funktionswert. Es gilt stets $f(-x) = f(x)$.

– Treten dagegen nur x-Potenzen mit ungeraden Exponenten auf und ist $a_0 = 0$, so ist die Bedingung $f(-x) = -f(x)$ stets erfüllt.

Symmetriekriterium für ganzrationale Funktionen

Der Graph einer ganzrationalen Funktion

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ \dots\ + a_1 x + a_0$ ist genau dann

- symmetrisch zur y-Achse, wenn ihr Funktionsterm nur x-Potenzen mit geraden Exponenten und eventuell auch ein absolutes Glied a_0 enthält,
- symmetrisch zum Ursprung, wenn ihr Funktionsterm nur x-Potenzen mit ungeraden Exponenten enthält und $a_0 = 0$ ist

Treten in einem ganzrationalen Funktionsterm sowohl gerade als auch ungerade Exponenten auf, so liegt keine der einfachen Symmetrien vor.

Beispiele (Anwenden des Symmetriekriteriums)

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -3x^4 + 2x^2 - 7$

Symmetrie zur y-Achse, da nur gerade Exponenten auftreten.

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -2x^5 + x$

Symmetrie zum Ursprung, da nur ungerade Exponenten auftreten und kein absolutes Glied.

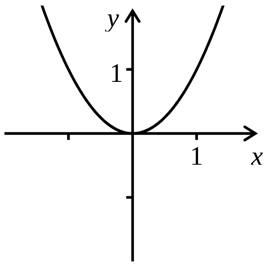
c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -5x^4 + 2x - 7$

Weder Symmetrie zur y-Achse noch zum Ursprung, da sowohl gerade als auch ungerade Exponenten auftreten.

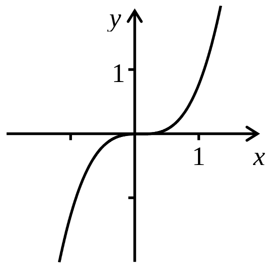
Aufgaben

2. Im Folgenden sind die Graphen von Potenzfunktionen $x \mapsto x^n$ dargestellt. Geben Sie das jeweilige Symmetrieverhalten an. Formulieren Sie eine allgemeine Regel.

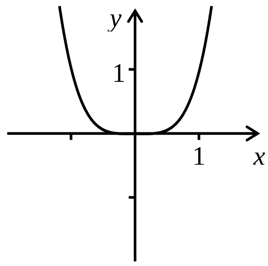
a) $x \mapsto x^2$



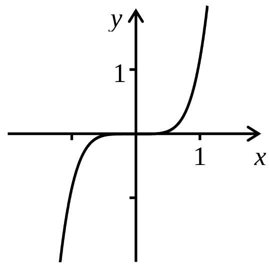
b) $x \mapsto x^3$



c) $x \mapsto x^4$



d) $x \mapsto x^5$



3. Entscheiden Sie anhand des Funktionsterms, ob der Graph der Funktion f symmetrisch ist. Geben Sie gegebenenfalls die Art der Symmetrie an.

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 7$ b) $f(x) = x^5 - 7x$ c) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$

d) $f(x) = 1 - x^4$ e) $f(x) = x^5 - 1$ f) $f(x) = x^5 - 6x^2 - 3$

4. Entscheiden Sie anhand des Funktionsterms, ob der Graph der Funktion f symmetrisch ist. Formen Sie den Funktionsterm bei Bedarf um.
Geben Sie gegebenenfalls die Art der Symmetrie an.

a) $f(x) = 3x^6 - x^2 + \sqrt{7}$ b) $f(x) = (x-1)^2$

c) $f(x) = -(x-4)\cdot(x+4)$ d) $f(x) = (x-2)\cdot(x+3)$

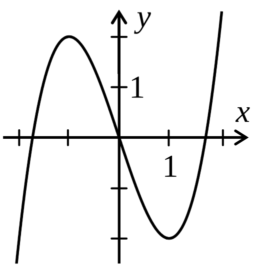
e) $f(x) = x^5 - x^3 + 1$ f) $f(x) = x\cdot(x^5 - 3x^3 - 4x)$

5. Gegeben sind Funktionen mit den Gleichungen

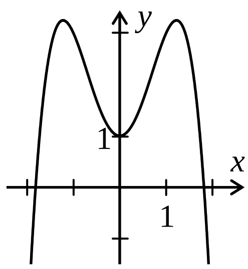
$$f(x) = -x^4 + 3x^2 + 1 \quad , \quad g(x) = -x^3 + 3x^2 \quad \text{und} \quad h(x) = x^3 - 3x\,.$$

Ordnen Sie den Graphen die richtige Funktionsgleichung zu. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

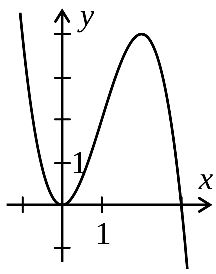
a)



b)

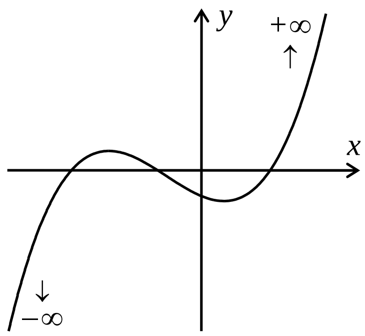


c)



9.3 Verhalten im Unendlichen

Bei der Untersuchung ganzrationaler Funktionen ist auch das Verhalten der Funktionswerte für $x \to -\infty$ und für $x \to +\infty$ von Interesse.
Bei dem abgebildeten Funktionsgraphen werden die Funktionswerte für $x \to +\infty$ sehr groß, für $x \to -\infty$ werden sie sehr klein. Man sagt, dass die Funktionswerte gegen +∞ bzw. gegen –∞ streben.



Man spricht dabei von **uneigentlichen Grenzwerten**.

Für die Funktion in der Abbildung verwendet man folgende Schreibweisen:

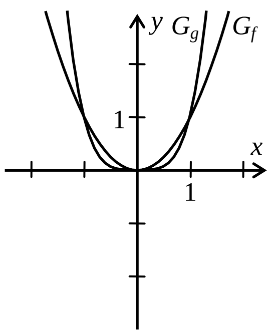
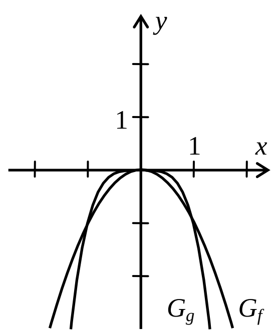
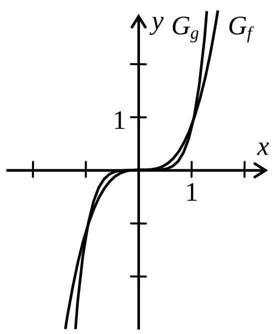
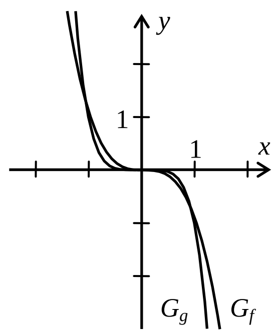
$$f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty \quad \text{und} \quad f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

oder in Grenzwertschreibweise: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Wir suchen nach einer einfachen Möglichkeit, bei ganzrationalen Funktionen die uneigentlichen Grenzwerte anhand des Funktionsterms zu bestimmen. Hierzu betrachten wir als Sonderfälle zunächst die Potenzfunktionen.

Uneigentliche Grenzwerte bei Potenzfunktionen

In folgenden Abbildungen sind die Möglichkeiten für das Grenzwertverhalten von Potenzfunktionen mit positiven Exponenten wiedergegeben.

gerader Exponent		ungerader Exponent	
$f(x)=x^2$ $g(x)=x^4$	$f(x)=-x^2$ $g(x)=-x^4$	$f(x)=x^3$ $g(x)=x^5$	$f(x)=-x^3$ $g(x)=-x^5$
			
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

An den Graphen erkennt man, dass das Grenzwertverhalten davon abhängt, ob der Exponent der Potenzfunktion gerade oder ungerade ist. Ein zusätzliches Minuszeichen bewirkt eine Spiegelung des Graphen an der x-Achse.

Uneigentliche Grenzwerte bei ganzrationalen Funktionen

Die uneigentlichen Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ einer ganzrationalen Funktion

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \text{ mit } a_n \neq 0$$

lassen sich direkt am Funktionsterm ablesen. Eine allgemeine Regel kann durch die folgende Überlegung gewonnen werden.

Grenzwertbetrachtung bei ganzrationalen Funktionen für $x \to \pm\infty$

Wir klammern dazu im Funktionsterm die höchste Potenz x^n ($x \neq 0$) zusammen mit dem Koeffizienten $a_n \neq 0$ aus:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

$$= a_n x^n \cdot \underbrace{\left(\underbrace{1}_{\downarrow\, 1} + \underbrace{\frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x}}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\frac{a_{n-2}}{a_n} \cdot \frac{1}{x^2}}_{\downarrow\, 0} + \ldots + \underbrace{\frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{1}{x^{n-1}}}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n}}_{\downarrow\, 0} \right)}_{\to 1 \text{ für } x \to \pm\infty} \quad \text{für } x \to \pm\infty$$

Das Grenzwertverhalten von f für $x \to \pm\infty$ wird nur durch den Term $a_n x^n$ bestimmt. Es ergibt sich in beiden Fällen ein **uneigentlicher** Grenzwert.

Uneigentliche Grenzwerte ganzrationaler Funktionen für $x \to \pm\infty$

Eine ganzrationale Funktion

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \text{ mit } a_n \neq 0$$

hat für $x \to \pm\infty$ dieselben uneigentlichen Grenzwerte wie die Potenzfunktion

$$p: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto a_n x^n.$$

Es gilt: also: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} a_n x^n$.

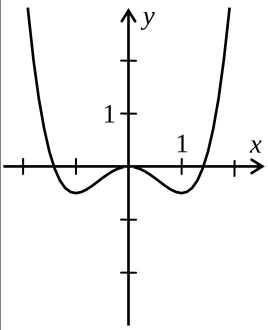
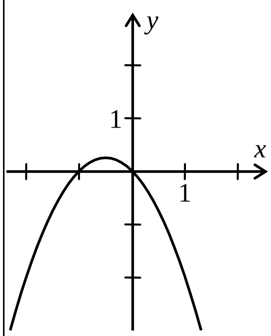
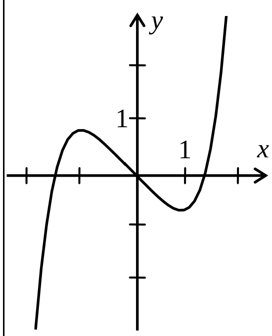
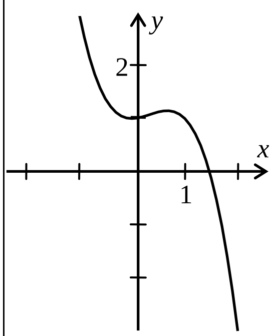
Kurz: Jede ganzrationale Funktion verhält sich für $x \to \pm\infty$ wie das Glied mit der höchsten x-Potenz.

Zur Bestimmung des Grenzwertverhaltens einer ganzrationalen Funktion im Unendlichen sind also nur die beiden folgenden Punkte zu beachten:

- die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n$ der höchsten Potenz der Variablen x

  und
- das Vorzeichen des zugehörigen Koeffizient a_n.

Die folgende Tabelle gibt einen systematischen Überblick über das Verhalten ganzrationaler Funktionen für $x \to \pm\infty$ in Abhängigkeit von n und a_n.

$n \in \mathbb{N}^*$ $a_n \in \mathbb{R}$	gerade $a_n > 0$	gerade $a_n < 0$	ungerade $a_n > 0$	ungerade $a_n < 0$
Beispiel	$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2$	$f(x) = -x^2 - x$	$f(x) = \frac{1}{4}x^5 - x$	$f(x) = -x^3 + x^2 + 1$
				
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Verhalten wie	x^4	$-x^2$	x^5	$-x^3$

Beispiele (Bestimmen von Grenzwerten für $x \to \pm\infty$)

a) $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 1$

Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (3x^4 + 2x^3 - 1) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (x^4) = +\infty$

b) $f(x) = 2x^5 + x^4 + 5$

Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (2x^5 + x^4 + 5) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (x^5) = \pm\infty$

c) $f(x) = -3x^4 + 2x^2 - 7$

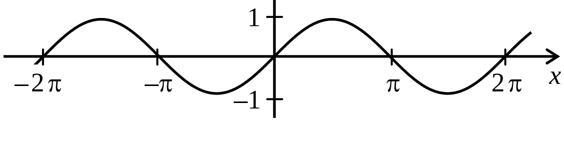
Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (-3x^4 + 2x^2 - 7) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (-x^4) = -\infty$

d) $f(x) = -4x^3 + 2x - 7$

Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (-4x^3 + 2x - 7) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (-x^3) = \mp\infty$

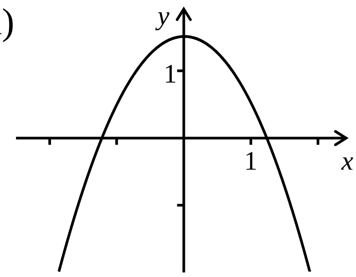
Es gibt auch Funktionen, die für $x \to +\infty$ bzw. für $x \to -\infty$ keinen Grenzwert besitzen.

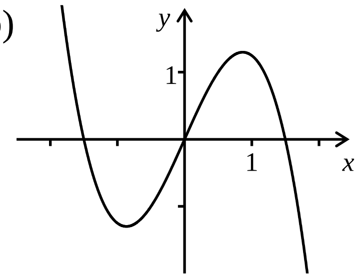
Die Sinusfunktion ist ein Beispiel für eine solche Funktion. Sie hat weder für $x \to -\infty$ noch für $x \to +\infty$ einen Grenzwert (auch keinen uneigentlichen).

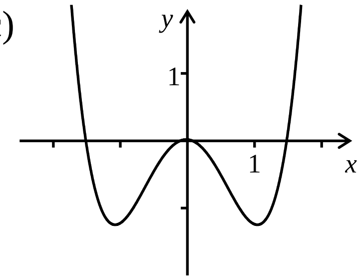


Aufgaben

6. Lesen Sie die Grenzwerte der Funktion f für $x \to \pm\infty$ an den abgebildeten Graphen ab. Notieren Sie diese in der Grenzwertschreibweise.

a) 

b) 

c) 

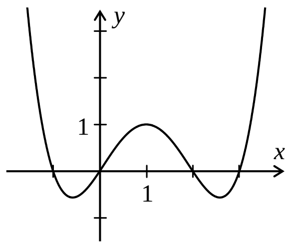
7. Bestimmen Sie die uneigentlichen Grenzwerte der Funktion f für $x \to \pm\infty$.

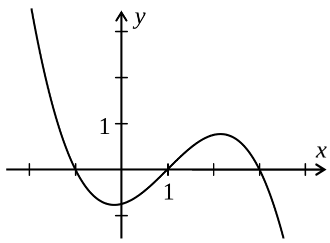
a) $f(x) = 3x^3 - x + 5$ b) $f(x) = -2x^4 - x^2 + 5x$

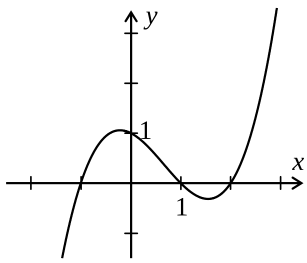
c) $f(x) = -5x^2 - x$ d) $f(x) = 2x^5 - x^3 + 3x$

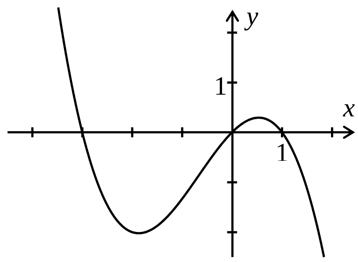
e) $f(x) = -4x - 3x^2 + x^5$ f) $f(x) = -2x^2 - x^3 + 7x$

8. Ordnen Sie den Funktionsgraphen die richtige Funktion zu. Begründen Sie Ihre Antwort mit möglichst vielen Argumenten, darunter auch eine Grenzwertbetrachtung. Bestimmen Sie zur Kontrolle auch den y-Achsenabschnitt.

a) 

b) 

c) 

d) 

$f: x \mapsto -\frac{1}{3}x \cdot (x-1) \cdot (x+3)$ $g: x \mapsto \frac{1}{2} \cdot (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x-2)$

$h: x \mapsto -\frac{1}{4} \cdot (x+1) \cdot (x-1) \cdot (x-3)$ $k: x \mapsto \frac{1}{4}x \cdot (x-2) \cdot (x+1) \cdot (x-3)$

9. Geben Sie einen möglichen Term einer ganzrationalen Funktion f mit den folgenden Eigenschaften an.

a) Grad $n = 4$; Grenzwerte $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$; Ordinatenabschnitt -2

b) Grad $n = 3$; Grenzwerte $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \mp\infty$; G_f geht durch den Ursprung