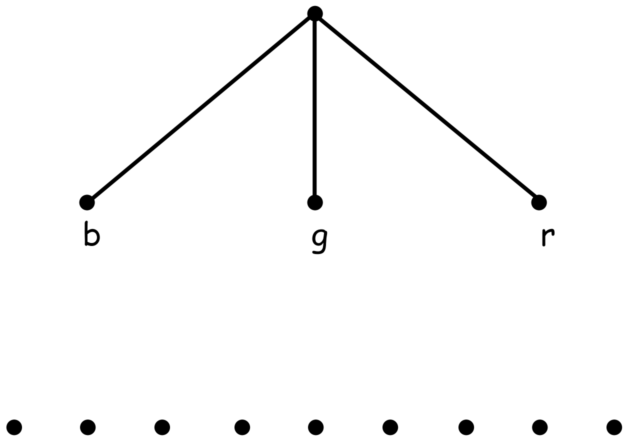
Mehrstufige Zufallsexperimente

4. In einer Urne liegen eine blaue, eine grüne und eine rote Kugel. Du nimmst eine Kugel heraus, stellst ihre Farbe fest und legst sie anschließend wieder in die Urne zurück. Das tust du insgesamt zweimal.

   a) Stelle im vorbereiteten **Baum** dar, welche Versuchsergebnisse möglich sind.

   b) Die Versuchsergebnisse lassen sich durch **Paare** beschreiben, z. B. $(b|b)$ oder $(b|g)$.

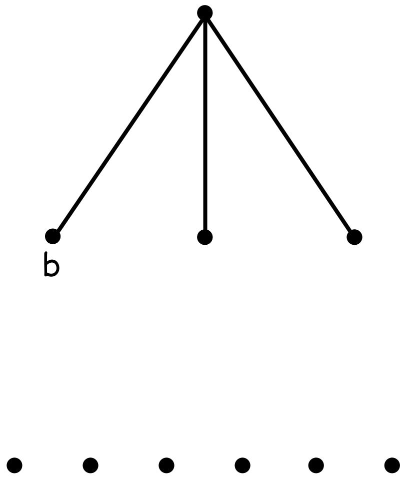
   Gib die Ergebnismenge an.



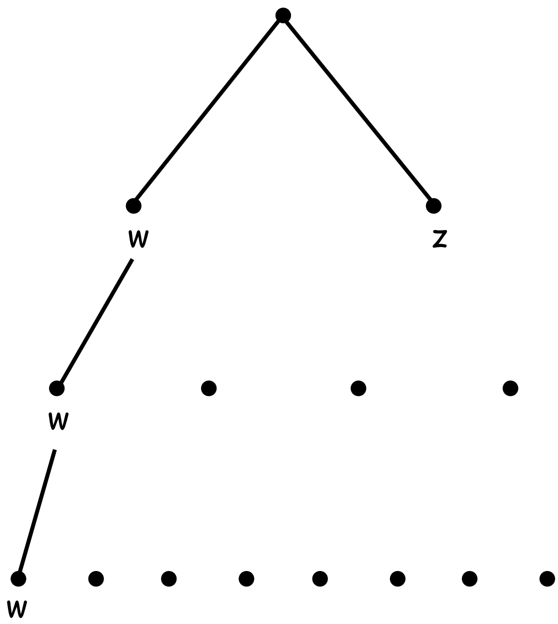
   c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt jedes Ergebnis ein?

   d) Pascal ändert das ZE ein wenig ab: Er legt die gezogene Kugel nicht mehr in die Urne zurück.

   Zeichne den Baum und modelliere das abgeänderte Experiment.



5. Jens wirft dreimal eine Münze und stellt jeweils fest, ob Wappen (w) oder Zahl (z) oben liegt.
   a) Stelle mit Hilfe des vorbereiteten Baumes dar, welche Versuchsergebnisse möglich sind.
   b) Die Versuchsergebnisse lassen sich durch **Tripel** beschreiben, z. B. $(w \mid w \mid w)$ oder $(w \mid w \mid z)$. Gib die Ergebnismenge und die Wahrscheinlichkeitsverteilung an.



- Die Ergebnisse mehrstufiger Zufallsexperimente lassen sich durch **Tupel** beschreiben (2-Tupel heißen Paare, 3-Tupel Tripel).
- Die Ergebnismenge lässt sich durch einen Baum veranschaulichen. Jedem Ergebnis entspricht ein Weg durch den Baum.

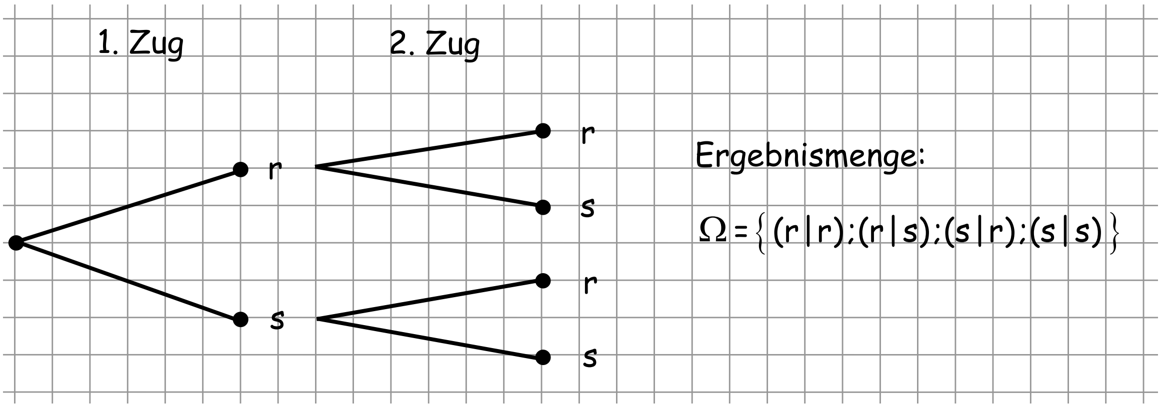
6. ZE: Zehnmaliges Werfen einer Münze und Feststellen, welche Seite oben liegt.
   a) Gib einige mögliche Ergebnisse in der **Tupel**-Schreibweise an.
   b) Beschreibe den Ergebnisbaum (Anzahl der Stufen, Verzweigungszahlen in den einzelnen Stufen) und berechne die Anzahl der möglichen Ergebnisse.
   c) Modelliere das ZE.

Bei einem regelmäßigen Baum erhalten wir die Anzahl der Ergebnisse, indem wir die Verzweigungszahlen multiplizieren.

   d) Elisabeth führt das ZE 1000-mal durch. Wie oft kann sie damit rechnen, das Ergebnis $(w \mid w \mid w \mid w \mid w \mid w \mid w \mid w \mid w \mid w)$ zu beobachten?

7. **Multiplikationsregel**

Aus einer Urne mit sieben roten Kugeln und drei schwarzen Kugeln werden nacheinander zwei Kugeln **ohne Zurücklegen** gezogen. Kathrin hat bereits ein Baumdiagramm gezeichnet und die Ergebnismenge aufgeschrieben.



a) Kathrin entscheidet sich für folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$P(\omega) = \frac{1}{4} \quad \text{für alle } \omega \in \Omega .$$

Nach kurzem Nachdenken kommen ihr Zweifel an der Wahl. Warum?

b) Finde folgende Wahrscheinlichkeiten und schreibe sie an den entsprechenden **Zweig** des Baumes:

- Wahrscheinlichkeit, beim ersten Zug eine rote Kugel zu ziehen.
- Wahrscheinlichkeit, beim ersten Zug eine schwarze Kugel zu ziehen.
- Wahrscheinlichkeit, beim zweiten Zug eine rote Kugel zu ziehen, wenn beim ersten Zug bereits eine rote Kugel gezogen worden ist.
- …

c) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung des zweistufigen ZE muss so festgelegt werden, dass die Wahrscheinlichkeiten Schätzwerte für die relativen Häufigkeiten sind. Kathrin überlegt sich daher, wie oft das Ergebnis $(r\,|\,r)$ ungefähr auftritt, wenn sie das Experiment 300-mal durchführt.

$$\frac{6}{9} \text{ von } \left(\frac{7}{10} \text{ von } 300\right) = \frac{6}{9} \cdot \left(\frac{7}{10} \cdot 300\right) = \left(\frac{6}{9} \cdot \frac{7}{10}\right) \cdot 300 = \frac{7}{15} \cdot 300 = 140$$

Erläutere Kathrins Rechnung.

d) Wie oft treten ungefähr die übrigen Ergebnisse in der Versuchsserie auf?

- (r|s):
- (s|r):
- (s|s):

e) Kannst du Kathrin bei der Wahl einer sinnvollen Wahrscheinlichkeitsverteilung helfen?

ω	(r|r)	(r|s)	(s|r)	(s|s)
P(ω)				

f) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Wahrscheinlichkeiten der Zweige und den Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse?

Multiplikationsregel für Wege

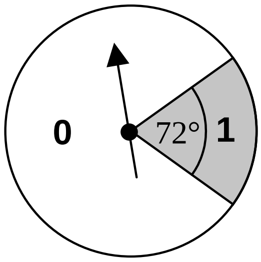
8. ZE: Aus einer Urne mit sieben roten Kugeln und drei schwarzen Kugeln werden nacheinander zwei Kugeln **mit Zurücklegen** gezogen.
   a) Zeichne den Ergebnisbaum und gib die Ergebnismenge an.
   b) Schreibe an jeden Zweig des Baumes die Wahrscheinlichkeit, mit der er durchlaufen wird.
   c) Ermittle mit Hilfe der Multiplikationsregel für Wege die WV.
   d) Der Mathelehrer macht folgendes Angebot: Ziehe aus der Urne nacheinander zwei Kugeln. Du kannst mit Zurücklegen oder ohne Zurücklegen ziehen. Wenn du zwei rote Kugeln ziehst, brauchst du keine Hausaufgaben zu machen. Für welche Variante entscheidest du dich?

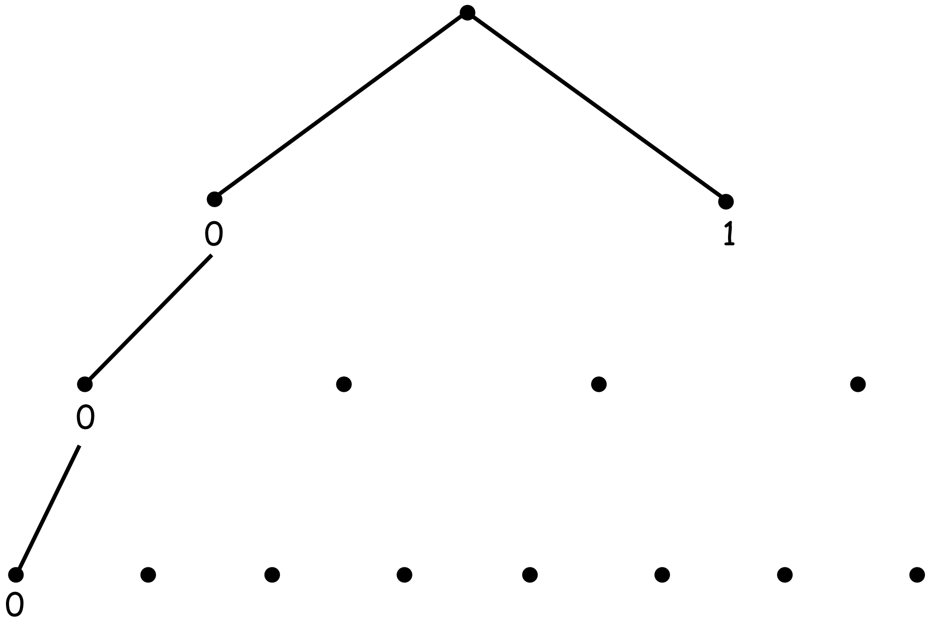
9. Die in den Aufgaben 9 und 10 betrachteten ZE waren Laplace-Experimente. Daher waren die Wahrscheinlichkeitsverteilungen leicht zu bestimmen.

   Zeige: Mit Hilfe der Multiplikationsregel erhält man die gleichen Wahrscheinlichkeiten.

10. ZE: Das abgebildete Glücksrad wird dreimal gedreht, und es wird jeweils festgestellt, in welchem Sektor der Zeiger stehen bleibt.

    Bestimme mit Hilfe des vorbereiteten Baumes die Ergebnismenge und die Wahrscheinlichkeitsverteilung.





ω	P(ω)

ω	P(ω)

11. Das Glücksrad aus Aufgabe 10 wird sechsmal gedreht, und es wird jeweils festgestellt, in welchem Sektor der Zeiger stehen bleibt. Das Stehenbleiben in Sektor 1 bezeichnen wir als **Treffer**.

    a) Beschreibe den Ergebnisbaum: Anzahl der Stufen, Verzweigungszahlen in den einzelnen Stufen, Wahrscheinlichkeiten der Zweige.

    b) Gib die Ergebnismenge und ihre Elementanzahl an.

    Ω = Menge aller

    $|\Omega|$ =

    c) Berechne.

    - $P\big((0|0|1|0|0|0)\big)$ =
    - $P\big((0|0|0|0|0|1)\big)$ =

    Sei $\omega \in \Omega$ ein Ergebnis mit einem Treffer.

    - $P(\omega)$ =

    d) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung.
    Tipp: Sortiere die Ergebnisse nach der Trefferzahl.

Ergebnis mit	Wahrscheinlichkeit
0 Treffern	
1 Treffer	