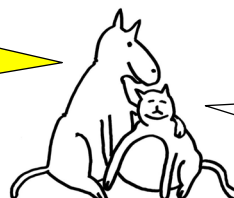


Aussagenlogik

Eine **Aussage** ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch ist. Wahr (**w**) und falsch (**f**) heißen **Wahrheitswerte**.



Kenne ich aus Klasse 7!
(Arbeitsbuch 7, S. 48)

1. Prüfe, ob folgende Sätze Aussagen sind, und gib die Wahrheitswerte (**w** oder **f**) an.

Satz	Aussage? ja / nein	Wahrheits- wert
Metz liegt an der Mosel.		
Ein Quader hat genau zehn Kanten.		
Ist 1225 eine Quadratzahl?		
111 ist eine Primzahl.		
Berechne 25% von 120 €!		
Nachts ist es kälter als draußen.		
1024 ist eine Zweierpotenz.		
Wäre doch wieder Wochenende!		

2. Folgende Aussagen sind mit mathematischen Symbolen geschrieben. Gib ihre Wahrheitswerte an.

$2^7 = 128$		$(-2)^4 < (-2)^5$		$9 \mid 12345678$	
$\frac{1}{3} \cdot 10 = 0,3$		$\frac{5}{7} + \frac{3}{4} > \frac{5}{7} + \frac{3}{5}$		$\frac{1}{0,4} - \frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$	
$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \neq 1$		$ 5-8 > 5-8$		$\{ \} \subset \mathbb{Q}$	

$10 - 3 \cdot 5$ ist
keine Aussage.



- 3.

Die Ungleichung
 $2x - 3 < 17$ ist
keine Aussage.



Das weiß ich. Das ist
eine **Aussageform**.

- Begründe, warum $2x - 3 < 17$ keine Aussage ist, und erkläre, was Silvester mit „Aussageform“ meint.
- Ersetze in der Ungleichung die Variable durch eine Zahl, so dass eine wahre Aussage entsteht.
- Kannst du auch Zahlen finden, bei deren Einsetzung eine falsche Aussage entsteht?

Konjunktion, Disjunktion, Kontravalenz, Negation

4. Konjunktion

Wenn du zwei Aussagen mit „und“ verbindest, erhältst du eine neue Aussage.



a) Bilde jeweils die UND-Aussage und stelle den Wahrheitswert fest.

Aussage a		Aussage b		Aussage a und b
$1 < 2$		$2 < 3$		
$7 \in \mathbb{N}$		7 ist gerade.		
$3 \cdot 0 = 1$		$3 \cdot 1 = 3$		
$3^2 = 8$		$2^3 = 9$		

b) Ergänze.

Die Verknüpfung zweier Aussagen mit „und“ heißt **Konjunktion**.

Eine Konjunktion ist wahr, wenn

c)

Wir verwenden die kleinen Buchstaben a, b usw. als Platzhalter für Aussagen und nennen sie **Aussagenvariablen**.



Statt a und b schreiben wir $a \wedge b$.

Wie der Wahrheitswert der UND-Aussage mit den Wahrheitswerten der beiden Teilaussagen zusammenhängt, halten wir in einer **Wahrheitstafel** fest.

Erkläre, wie nebenstehende Wahrheitstafel aufgebaut ist und vervollständige sie.

a	b	$a \wedge b$	
f	f		
f	w		
w	f		
w	w		

d) Betrachte die Aussage $b \wedge a$ und schreibe in die freie Spalte der Tabelle in c), wie der Wahrheitswert dieser Aussage von den Wahrheitswerten von a und b abhängt.

Was fällt dir auf?

Die Aussagen $a \wedge b$ und $b \wedge a$ sind **logisch gleichwertig**.

5. Disjunktion

- a) Leo spielt Fußball und sagt zu seinem Freund: „Um Meister zu werden, müssen wir gegen den FC Pforten unentschieden spielen **oder** gegen den SV Latte gewinnen“.
Leas Vater sagt: „Zum Geburtstag schenke ich dir eine Smartwatch **oder** wir machen eine Reise nach Paris“.

Erkläre die unterschiedliche Bedeutung des Bindewortes „oder“ in beiden Aussagen.

- b) Wenn du zwei Aussagen mit „oder“ verbindest, erhältst du eine neue Aussage.
ODER heißt in der Mathematik: das eine oder das andere oder auch beides. Das ist das **einschließende Oder**, wie Leo es benutzt. Meint man – wie Leas Vater – „oder“ im **ausschließenden** Sinn (das eine oder das andere, aber nicht beides) sagt man genauer **entweder ... oder**.

Bilde jeweils die ODER-Aussage und stelle den Wahrheitswert fest.

Aussage a		Aussage b		Aussage a oder b
$3 \mid 24$		$8 \mid 24$		
$4 < 5$		$4 = 5$		
$3:3=0$		$3:3=1$		
$3^2 = 8$		$2^3 = 9$		

- c) Ergänze.

Die Verknüpfung zweier Aussagen mit „oder“ heißt **Disjunktion**.

Eine Disjunktion ist falsch, wenn

- d)

Statt a oder b
schreiben wir
 $a \vee b$.



Merkhilfe

$\wedge$: Denke an „unter einem Dach“.
 $\vee$: Kommt von vel (lat.): oder.

Wie der Wahrheitswert der ODER-Aussage mit den Wahrheitswerten der beiden Teilaussagen zusammenhängt, halten wir in einer **Wahrheitstafel** fest.

Vervollständige nebenstehende Tabelle.

a	b	$a \vee b$
f	f	

- e) Die folgenden Aussagen sind ODER-Aussagen.
Aus welchen Teilaussagen setzen sie sich zusammen?

$1 \leq 7$	
$37 \cdot 27 \geq 999$	

6. Kontravalenz (ausschließendes Oder)

- a) Bilde jeweils die Entweder-oder-Aussage (das eine oder das andere, aber nicht beides) und stelle die Wahrheitswerte fest.

a		b		Entweder a oder b
3 9		3 12		
3 9		3 11		
3 10		3 12		
3 10		3 11		

- b) Ergänze.

Die Verknüpfung zweier Aussagen mit „Entweder-oder“ heißt **Kontravalenz**.

Eine Kontravalenz ist wahr, wenn

- c)

Entweder a oder b
kürzen wir ab mit
 $a \oplus b$.



Die Disjunktion heißt auch **OR**-
Verknüpfung, die Kontravalenz **XOR**-
Verknüpfung. (or (englisch); oder)

Wie der Wahrheitswert der Entweder-oder-Aussage von den Wahrheitswerten der beiden Teilaussagen abhängt, halten wir in einer Wahrheitstafel fest.

Vervollständige nebenstehende Tafel.

In der Tafel siehst du sehr schön den Unterschied zwischen OR und XOR.

a	b	$a \oplus b$	$a \vee b$
f	f		

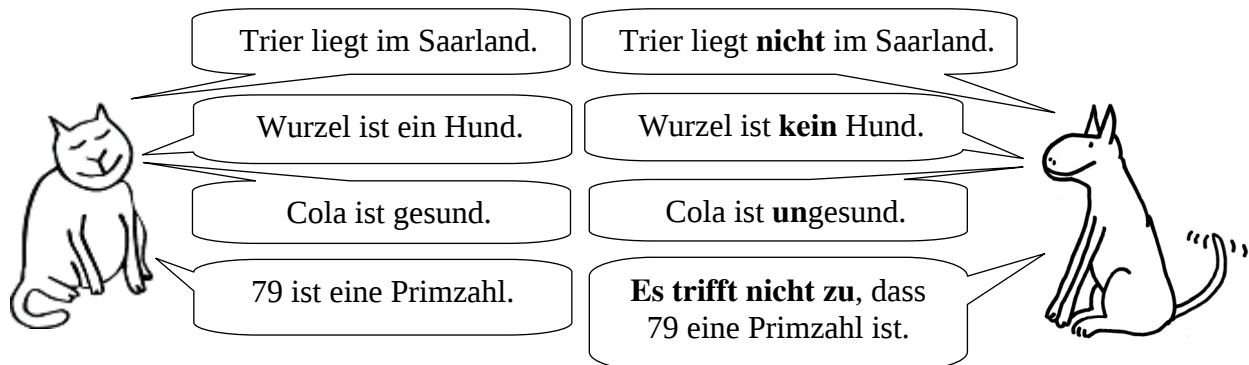
7. Bestimme die Wahrheitswerte folgender Aussagen.

$1 < 7 \oplus 1 > 7$	
$1 < 7 \vee 1 > 7$	
$1 < 7 \wedge 1 > 7$	
$1 < 2 \wedge 2 < 3$	
$1 < 2 \vee 2 < 3$	
$1 < 2 \oplus 2 < 3$	

$0+1=0 \wedge 0-1=0$	
$1^0=0 \vee 0^1=1$	
$0:1=1 \oplus 0 \cdot 1=1$	
$4^3=3^4 \vee 4^2=2^4$	
$1:\frac{2}{5}=\frac{2}{5} \wedge 2:\frac{1}{5}=10$	
$\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{4} < 1 \oplus \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{4} > 1$	

8. Negation

a) Wer hat recht?



b) Ergänze die Box und fülle die Wahrheitstafel aus.

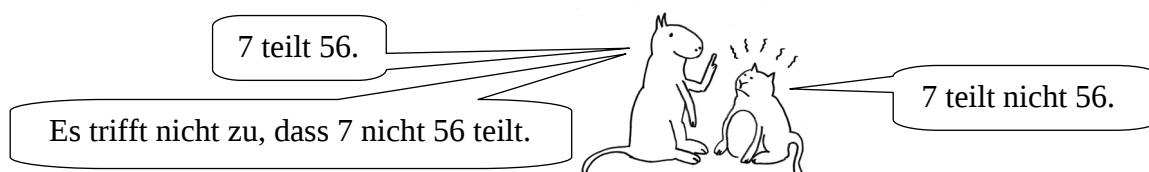
Wir können eine Aussage verneinen. Die neue Aussage heißt

Negation von a , geschrieben $\bar{a}$ (lies: „nicht a “).

Die **Negation** ist falsch, wenn

a	$\bar{a}$

c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Aussagen in diesem Dialog?

Erkläre, warum Wurzels zweite Aussage **doppelte Negation** heißt.

d) Kürze in c) die Aussage „7 teilt 56.“ mit a ab und verwende diese Aussagenvariable, um die beiden anderen Aussagen zu beschreiben. Welche Wahrheitswerte haben die drei Aussagen?

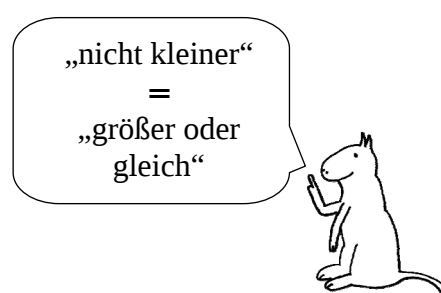
a		

9. Bilde zu folgenden Aussagen die Negation – der Wahrheitswert spielt keine Rolle.

Oslo ist die Hauptstadt von Schweden.	Es ist möglich, zum Mond zu fliegen.
Pauls T-Shirt ist weiß.	Der Film dauert mindestens 90 Minuten.
Paul trägt ein weißes T-Shirt.	Auf dem Fest waren mehr als 100 Personen.
Silvester ist keine Katze.	Alle Tiere haben vier Beine.

Mit mathematischen Symbolen geschriebene Aussagen.

Aussage	$5^2 = 10$	$1 \cdot 0 \neq 1$	$3 \cdot 4 < 10$	$2^3 \leq 8$
Negation				
Aussage	$-1 > 1$	$\frac{1}{3} \geq 0,3$	$6 \mid 28$	$-3 \notin \mathbb{N}$
Negation				



10. Logikrätsel 1

Alex, Bill und Curd sind bei dem Zauberer Merlin in der Lehre. Einer der drei Schüler hat in des Meisters Schuh eine Kröte gezaubert. Rechts siehst du die Aussagen der drei beim Verhör. Merlin setzt ein Zaubermittel ein und erfährt, dass genau zwei der Schüler gelogen haben. Wer war der Täter?

Alex: „Ich war es nicht.“
Bill: „Curd war es nicht.“
Curd: „Ich war es.“

- a) Versuche das Rätsel selbstständig zu lösen, bevor du weiterliest.
Wer nicht zurechtkommt, kann in b) lernen, wie man solche Aufgaben löst.
Wer den Täter herausgefunden hat, kann seine Lösung mit der in b) vergleichen.

- b) • Jeder der drei Zauberschüler kommt als Täter infrage. Daher starten wir mit nebenstehenden Aussagen. Vervollständige.
- Drücke nun die Aussagen von Alex, Bill und Curd mithilfe der Aussagenvariablen a , b , c aus.

a: Alex war es.

b:

c:

Die Aussagen der Schüler:

- Stelle eine Wahrheitstafel auf.
Warum brauchst du nur drei Fälle zu betrachten?
- Jetzt muss du aus der Wahrheitstafel nur noch den richtigen Schluss ziehen.

Der Übeltäter war

Möglicher Täter			Aussagen		
a	b	c	$\bar{a}$	$\bar{c}$	c
w	f	f			

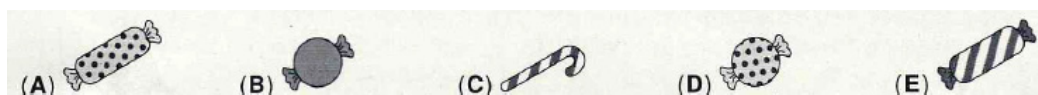
- c) Alex, Bill und Curd geraten erneut unter Verdacht. Einer der drei hat sich an Silvesters Honigtopf zu schaffen gemacht. Silvester hat mithilfe eines Wahrheitszaubers schnell erkannt, dass genau eine der nebenstehenden Aussagen wahr ist. Finde heraus, wer genascht hat.

Alex: „Ich war es nicht.“
Bill: „Ich war es nicht.“
Curd: „Alex war es.“



Knobelspiel

Peter und Petra spielen mit ihrer Mutter ein Knobelspiel. Die Mutter wählt eines der abgebildeten Bonbons aus. Sie verrät Peter das Muster auf dem Bonbonpapier und Petra die Form des Bonbons. Die Mutter fragt: „Wisst ihr, welches Bonbon ich gewählt habe?“ Beide antworten gleichzeitig: „Nein.“ Die Mutter fragt ein zweites Mal: „Wisst ihr es jetzt?“ Wieder antworten beide gleichzeitig: „Nein.“ Die Mutter fragt noch ein drittes Mal: „Wisst ihr es jetzt?“ Nun rufen Peter und Petra beide gleichzeitig: „Ja!“. Welches Bonbon hat die Mutter gewählt?



Aussagenlogische Formeln

11. Gegeben sind Aussagen.

a : Es regnet.	b : Die Straße ist nass.
------------------	----------------------------

a) Übersetze die **aussagenlogische Formel** $\bar{a} \vee b$ in einen deutschen Satz.

[illegible]

b) Silvester schaut aus dem Fenster und stellt fest, dass es regnet und die Straße nass ist. Welchen Wahrheitswert wird er der Aussage in a) zuordnen?

c) In b) ist es vorteilhaft eine Wahrheitstafel zu verwenden.

- Mit welchen Wahrheitswerten musst du die Aussagenvariablen a und b belegen?
- Welche Wahrheitswerte musst du den Formeln $\bar{a}$ und $\bar{a} \vee b$ zuweisen?

Verwende die letzte Zeile der vorbereiteten Tabelle.

a	b	$\bar{a}$	$\bar{a} \vee b$
w	w		

d) An einem anderen Tag regnet es nicht und die Straße ist nicht nass. Bestimme den Wahrheitswert von $\bar{a} \vee b$. Verwende die erste Zeile der Tabelle in c).

e) Die Straße könnte überdacht sein, oder die Straßenreinigung könnte tätig sein. Welche Möglichkeiten gibt es also noch? Trage die Fälle in die beiden freien Zeilen der Wahrheitstafel ein.

- Der Überstrich $\neg$ und die Zeichen $\wedge$, $\vee$ und $\oplus$ heißen **Junktoren**.
- Sinnvolle Zusammenstellungen von Aussagenvariablen und Junktoren, bei denen auch Klammern vorkommen können, heißen **aussagenlogische Formeln**.
- Belegen wir alle Aussagenvariablen einer aussagenlogischen Formel mit Wahrheitswerten, dann erhält auch die Formel einen **Wahrheitswert**.



12. Silvester hat ein paar aussagenlogische Formeln zusammengestellt.

Belege in jeder Formel die Aussagenvariablen mit Wahrheitswerten deiner Wahl und bestimme für diese Belegung den Wahrheitswert der Formel.

- a
- $\bar{a} \vee (b \vee a)$
- $(a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b)$
- $\overline{a \oplus b}$
- $a \wedge (b \oplus c)$
- $\overline{a \vee (b \wedge \bar{c})}$



13. Betrachte nebenstehende Aussagen.

a : Ron geht ins Kino.
 b : Ron fährt nach Saarbrücken.
 c : Ron fährt nach Neunkirchen.

- a) Übersetze die
- aussagenlogische Formel**
- $(b \vee c) \wedge a$
- in einen deutschen Satz.

$(b \vee c) \wedge a$:

- b) Angenommen, Ron macht folgendes:

Er fährt nach Saarbrücken, nicht nach Neunkirchen und geht nicht ins Kino.

Die Aussage in a) ist offensichtlich falsch.

Du kannst ihren Wahrheitswert auch mithilfe der Aussagenlogik bestimmen.

- Mit welchen Wahrheitswerten musst du die Aussagenvariablen a , b und c belegen?
- Welche Wahrheitswerte erhalten die Formeln $b \vee c$ und $(b \vee c) \wedge a$? Verwende die zweite Zeile der vorbereiteten Tabelle.

a	b	c	$b \vee c$	$(b \vee c) \wedge a$
f				

- c) Angenommen, Ron fährt nach Neunkirchen, nicht nach Saarbrücken und geht ins Kino.
-
- Bestimme den Wahrheitswert von
- $(b \vee c) \wedge a$
- . Verwende die dritte Zeile der Tabelle in b).

- d) Du kannst alle Möglichkeiten, die Ron hat, in einer Wahrheitstafel zusammenstellen. Die beiden in b) und c) behandelten Fälle sind schon eingetragen.

Bei den Eintragungen in die Spalten für a , b und c kannst du so vorgehen:

Denke dir f durch 0 und w durch 1 ersetzt und zähle binär von 000 bis 111 (von 0 bis 7).

a	b	c	$b \vee c$	$(b \vee c) \wedge a$
f	f	f		
f	w	f	w	f
w	f	w	w	w

14. a) Fülle die Wahrheitstafel aus.

a	$a \wedge a$	$a \vee a$	$a \oplus a$	$\bar{a}$	$\bar{\bar{a}}$	$a \wedge \bar{a}$	$a \vee \bar{a}$	$a \oplus \bar{a}$
f								
w								

- b) Die Aussagenvariable
- a
- stehe für die Aussage „Silvester hat Fieber“.
-
- Übersetze die aussagenlogischen Formeln in obiger Tabelle in deutsche Sätze.

17. Logikrätsel 2

Vor dir stehen zwei verschlossene Schachteln. Du weißt, dass sich in jeder Schachtel genau ein Stück Obst befindet: ein Apfel oder eine Orange. Du weißt aber nicht, welche Sorte Obst sich in welcher Schachtel befindet, und es kann auch sein, dass in beiden Schachteln dieselbe Sorte Obst ist. Jede Schachtel ist beschriftet (siehe Abb.). Eine dieser Aufschriften ist wahr und die andere falsch. Du darfst eine der Schachteln öffnen. Wenn du Orangen liebst: Welche Schachtel solltest du auswählen?

Schachtel 1

In dieser Schachtel ist eine Orange und in der

Schachtel 2

Es befindet sich nicht in beiden Schachteln

Ich definiere zwei Aussagen:

a : In der 1. Schachtel ist eine Orange.

b : In der 2. Schachtel ist eine Orange.

Nun stellen wir eine Wahrheitstafel auf und ziehen daraus den richtigen Schluss.

Ich drücke die Aufschriften

auf den Schachteln durch a

und b aus:

Schachtel 1:

Schachtel 2:

		Schachtel 1	Schachtel 2
a	b		
f	f		

Folgerung:

18. Logikrätsel 3

Silvester ist erbost: „Wer von euch hat von meiner Geburtstagstorte genascht?“ Seine Freunde Anton, Bruno und Carlo blicken betreten auf das übel zugerichtete Backwerk. Einerseits wollten sie nicht petzen oder sich selbst beschuldigen, andererseits wollten sie Silvester auch nicht belügen. Nach einigen Anläufen machten die drei Freunde nachstehende Aussagen.

Anton: „Bruno oder ich waren es.“

Bruno: „Entweder war es Carlo oder ich.“

Carlo: „Entweder war es Anton nicht oder ich nicht.“

Zu ihrem Erstaunen wusste Silvester sofort, wer genascht hat. Weißt du es auch?

Wenn nicht:

Löse das Problem mit aussagenlogischen Formeln und einer Wahrheitstafel. Silvester verrät dir, wie du mit der Lösung anfangen kannst.



a : Anton hat genascht.

b : Bruno hat genascht.

c : Carlo hat genascht.

Logisch gleichwertig

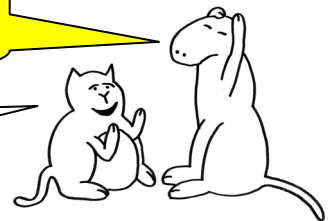
19. a) Stelle zu den aussagenlogischen Formeln $\overline{a \wedge b}$ und $\overline{a} \vee \overline{b}$ die Wahrheitstafeln auf. Der Anfang ist gemacht.

a	b	$a \wedge b$	$\overline{a \wedge b}$	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{a} \vee \bar{b}$
f	f					

Schau dir die dunkel unterlegten Spalten an.
Fällt dir etwas auf?

Zwei aussagenlogische Formeln heißen **logisch gleichwertig**, wenn sie für jede Belegung ihrer Variablen mit Wahrheitswerten stets denselben Wahrheitswert annehmen.

$\overline{a \wedge b}$ ist **logisch gleichwertig** mit $\overline{a} \vee \overline{b}$.
Wir schreiben dafür kurz $\overline{a \wedge b} \equiv \overline{a} \vee \overline{b}$.



- b) *Im Heft*: Zeige auf gleiche Weise, dass auch $\overline{a \vee b}$ und $\bar{a} \wedge \bar{b}$ logisch gleichwertig sind.
- c) Ergänze die Regeln in der Box. Der Name der Regeln erinnert an den britischen Mathematiker August De Morgan (1806-1871).
- d) Man sagt: Die De-Morgan-Regeln sind **dual zueinander**. Was bedeutet das?
- De-Morgan-Regeln**

 - $\overline{a \wedge b} \equiv$
 - $\overline{a \vee b} \equiv$

De-Morgan-Regeln

- $\overline{a \wedge b} \equiv$
- $\overline{a \vee b} \equiv$

- 20. a)** Zeige mithilfe von Wahrheitstafeln.

$a \wedge (a \vee b) \equiv a$	$a \wedge (\bar{a} \vee b) \equiv a \wedge b$	$a \oplus b \equiv (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b)$
$a \vee (a \wedge b) \equiv a$	$a \vee (\bar{a} \wedge b) \equiv a \vee b$	$\bar{a} \oplus \bar{b} \equiv a \oplus b$
$a \oplus b \oplus b \equiv a$	$a \oplus (\bar{a} \wedge b) \equiv a \oplus b$	$\overline{a \oplus b} \equiv \bar{a} \oplus b \equiv a \oplus \bar{b}$

- b) Prüfe, ob die Formeln $\bar{a} \vee b$ und $a \vee \bar{b}$ logisch gleichwertig sind.
c) Ergänze.

Zwei Formeln sind nicht gleichwertig, wenn



- d) Zeige: $a \wedge (b \vee c) \not\equiv (a \wedge b) \vee c$

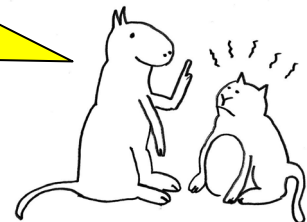
Hinweis: Es ist nicht nötig, eine vollständige Wahrheitstafel aufzuschreiben.

a	b																
f	f	f	f							w							w
f	w	f	f							f							w
w	f	f	f							f							w
w	w	f	w							f							w
Num- mer		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

- e) In der Tabelle kommen Konjunktion, Disjunktion, Kontravalenz und Negation vor. Hebe die zugehörigen Spalten farbig hervor und schreibe das entsprechende Symbol in die oberste Zeile ($\wedge, \vee, \oplus, \bar{a}, \bar{b}$).
- f) Du kannst alle 16 Funktionen in d) alleine mithilfe der Junktoren $\wedge, \vee$ und $\neg$ darstellen. Fülle folgende Tabelle aus.

Formel für die Funktion in der Spalte mit der Nummer ...							
0		4		8		12	
1		5		9		13	
2		6		10		14	
3		7		11		15	

Jede aussagenlogische Formel mit zwei Variablen (egal wie lang oder kompliziert sie aufgeschrieben ist) ist logisch gleichwertig mit einer der 16 Formeln in f).



23. Logikrätsel 4

Die drei Freunde Anna, Ben und Chris haben ein Sportfest besucht. Silvester ist neugierig und will wissen, ob sie Zuschauer waren oder ob sie an den Wettbewerben teilgenommen haben. Die drei lassen Silvester raten und geben ihm folgende Auskünfte, die entweder alle wahr oder alle falsch sind.

Anna: „Ich habe teilgenommen, und mindestens einer der beiden anderen ebenfalls.“

Ben: „Es trifft nicht zu, dass sowohl Chris als auch ich teilgenommen haben.“

Chris: „Ich habe teilgenommen und Ben nicht, oder Anna hat nur zugeschaut.“



Wer war Teilnehmer, wer Zuschauer?

NAND und NOR

24. NAND-Verknüpfung

a) Ergänze. a : Nora fährt nach Saarbrücken.

b : Nora geht ins Theater.

$a \wedge b$:

$\overline{a \wedge b}$:

b) Ob die Aussage $\overline{a \wedge b}$ wahr oder falsch ist, hängt von Noras Verhalten ab.

Welchen Wahrheitswert nimmt $\overline{a \wedge b}$ an, wenn a und b wahr sind? Welchen Wahrheitswert nimmt die Aussage an, wenn Nora nach Saarlouis fährt und dort ins Theater geht?

c) Stelle alle Möglichkeiten für Noras Verhalten in nebenstehender Tabelle zusammen und bestimme den jeweiligen Wahrheitswert von $\overline{a \wedge b}$.

a	b	$a \wedge b$	$\overline{a \wedge b}$

d) Ergänze.

Die Negation der Konjunktion zweier Aussagen a und b heißt **NAND-Verknüpfung** und wird mit $a \bar{\wedge} b$ bezeichnet. $a \bar{\wedge} b$ ist falsch, wenn

$a \bar{\wedge} b \equiv \overline{a \wedge b}$
NAND = not and



e) Wo findest du die Verknüpfung $\bar{\wedge}$ in der Tabelle von Aufgabe 22d)?

25. a) Wurzel zeigt dir, wie du ohne Wahrheitstafel beweisen kannst, dass die NAND-Verknüpfung kommutativ ist. Erkläre ihre Rechnung.

b) Prüfe, ob die NAND-Verknüpfung assoziativ ist.

c) Fülle aus. Erkennst du Gesetzmäßigkeiten?

a	$\bar{a}$	$a \wedge a$	$a \wedge \bar{a}$	$a \bar{\wedge} a$	$a \bar{\wedge} \bar{a}$	$\bar{a} \bar{\wedge} \bar{a}$
f						
w						

$a \bar{\wedge} b \equiv \overline{a \wedge b}$
$\equiv \overline{b \wedge a}$
$\equiv b \bar{\wedge} a$

d) Finde mithilfe von Wahrheitstafeln heraus:

Mit welchen einfachen Formeln sind die Formeln $\overline{a \bar{\wedge} b}$ und $\bar{a} \bar{\wedge} \bar{b}$ logisch gleichwertig?

$a \bar{\wedge} a \equiv$
$a \bar{\wedge} \bar{a}$
$\bar{a} \bar{\wedge} \bar{a}$
$\overline{a \bar{\wedge} b}$
$\bar{a} \bar{\wedge} \bar{b}$

26. NOR-Verknüpfung

a) Ergänze. a : Paul löst Logikaufgaben.

b : Paul hört Musik.

$a \vee b$:

$\overline{a \vee b}$:

b) Ob die Aussage $\overline{a \vee b}$ wahr oder falsch ist, hängt von Pauls Verhalten ab.

Welchen Wahrheitswert nimmt $\overline{a \vee b}$ an, wenn die Aussagen a und b wahr sind?

Welchen Wahrheitswert nimmt $\overline{a \vee b}$, wenn Paul ein Buch liest und keine Musik hört?

c) Stelle alle Möglichkeiten für Pauls Verhalten in nebenstehender Tabelle zusammen und bestimme den jeweiligen Wahrheitswert von $\overline{a \vee b}$.

a	b	$a \vee b$	$\overline{a \vee b}$

d) Ergänze.

Die Negation der Disjunktion zweier Aussagen a und b heißt **NOR-Verknüpfung** und wird mit $a \nabla b$ bezeichnet.
 $a \nabla b$ ist wahr, wenn

$$a \nabla b \equiv \overline{a \vee b}$$

NOR = not or



e) Wo findest du die Verknüpfung ∇ in der Tabelle von Aufgabe 22d)?

27. a) Zeige, dass die NOR-Verknüpfung kommutativ ist. Verfahre wie Wurzel in Aufgabe 25.

b) Die NOR-Verknüpfung ist genauso wenig assoziativ wie NAND. Zeige das.

c) Fülle aus. Erkennst du Gesetzmäßigkeiten?

a	$\bar{a}$	$a \vee a$	$a \vee \bar{a}$	$a \nabla a$	$a \nabla \bar{a}$	$\bar{a} \nabla \bar{a}$
f						
w						

d) Finde mithilfe von Wahrheitstafeln heraus:

Mit welchen einfachen Formeln sind die Formeln

$\overline{a \nabla b}$ und $\bar{a} \nabla \bar{b}$ logisch gleichwertig?

$a \nabla a \equiv$	
$a \nabla \bar{a}$	
$\bar{a} \nabla \bar{a}$	
$\overline{a \nabla b}$	
$\bar{a} \nabla \bar{b}$	

32. Negation der Äquivalenz

- a) Fülle die ersten vier Spalten nebenstehender Wahrheitstafel aus.
- b) Zu welcher einfachen Formel ist die Negation der Äquivalenz gleichwertig? Verwende die fünfte Spalte.

	b	$a \Leftrightarrow b$	$\overline{a \Leftrightarrow b}$	

- c) Bestimme die Wahrheitswerte der Aussagen und bilde jeweils die Negation.
- ① Silvester ist eine Katze genau dann, wenn Wurzel ein Hund ist.
 - ② Silvester hat zwei Beine genau dann, wenn Wurzel vier Beine hat.
 - ③ Silvester wiegt weniger als 100 kg genau dann, wenn Wurzel auf dem Mist kräht.
 - ④ Silvester ist Bundeskanzler genau dann, wenn Wurzel zum Mond fliegt.

33. Stelle zu folgenden aussagenlogischen Formeln die Wahrheitstafeln auf und finde mithilfe der Aufgabe 22 heraus, zu welchen einfachen Formeln sie gleichwertig sind.

- a) $a \wedge (\bar{a} \Leftrightarrow b)$ c) $a \vee (a \Leftrightarrow b)$ e) $\bar{a} \Leftrightarrow (a \wedge \bar{b})$
 b) $\bar{a} \wedge (a \Leftrightarrow b)$ d) $a \vee (a \Leftrightarrow \bar{b})$ f) $(\bar{a} \wedge b) \Leftrightarrow (a \wedge \bar{b})$

34. Zeige mithilfe von Wahrheitstafeln.

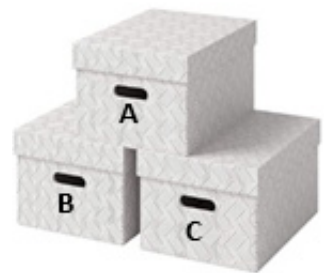
- a) $a \Leftrightarrow (b \Leftrightarrow c) \equiv (a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow c$ b) $(a \Leftrightarrow b) \wedge (b \Leftrightarrow c) \equiv (a \wedge b \wedge c) \vee \overline{a \vee b \vee c}$

35. Logikrätsel 5

Silvester hat sich in einer der drei Kisten **A**, **B**, **C** versteckt. Damit du herauszufinden kannst, in welcher, gibt dir Wurzel die folgenden Informationen, die alle wahr sind.



- ① Entweder ist Silvester in der Kiste A oder nicht in der Kiste C.
- ② Silvester ist in der Kiste B genau dann, wenn er nicht in der Kiste A ist.
- ③ Silvester ist in der Kiste B oder nicht in der Kiste A.



36. Implikation

Zurück zu Emil und seiner Mutter.

Statt „Du bekommst genau dann ein Eis, wenn du dein Zimmer aufräumst“ können wir auch zwei **Wenn-dann**-Aussagen verwenden, die durch UND verknüpft sind.

„**Wenn** du dein Zimmer aufräumst, **dann** bekommst du ein Eis,
und wenn du dein Zimmer nicht aufräumst, **dann** bekommst du kein Eis.“

- a) Verwende die Aussagenvariablen a und b wie in nebenstehender Box angegeben und schreibe obige Aussage als aussagenlogische Formel in die Box. Verwende für „Wenn-dann“ den Junktor $\Rightarrow$.

a : „Du räumst dein Zimmer auf.“

b : „Du bekommst ein Eis.“

- b) Finde heraus, welche Wahrheitstafel zu $a \Rightarrow b$ gehört. Wurzel und Silvester helfen dir dabei.

a	b	$a \Leftrightarrow b$ $(a \Rightarrow b) \wedge (\bar{a} \Rightarrow \bar{b})$	$a \Rightarrow b$	$\bar{a} \Rightarrow \bar{b}$
f	f			
f	w			
w	f			
w	w			

Fülle zuerst die 3. Spalte aus. Dann kannst du folgern, was in der 4. und 5. Spalte stehen muss.

In der 4. und 5. Spalte musst du noch zusätzlich beachten:

- Aus etwas Wahrem kann nicht etwas Falsches folgen.
- $a \Rightarrow b$ bzw. $\bar{a} \Rightarrow \bar{b}$ sind nicht logisch gleichwertig zu $a \Leftrightarrow b$.



Die Aussage mit „Wenn a , dann b “ heißt **Implikation**.

Die Teilaussage a heißt **Voraussetzung**, die Teilaussage b **Folgerung**.

Die Implikation ist falsch, wenn

„Wenn a , dann b “
kürzen wir ab mit
 $a \Rightarrow b$



Andere Sprechweisen:
„Aus a folgt b .“
„ a impliziert b .“

- c) Ergänze die Wahrheitstafel der Implikation.

a	b	$a \Rightarrow b$	

- d) Wo findest du die Verknüpfung $\Rightarrow$ in der Tabelle von Aufgabe 22d)?

Womit ist die Implikation also logisch gleichwertig?
Ergänze die vierte Spalte.

37. a) Zu der Implikation $a \Rightarrow b$ kann man die **Negation**, **Kehraussage** und **Kontraposition** bilden. Fülle die Wahrheitstafel aus.

		Implikation	Negation	Kehraussage	Kontraposition
a	b	$a \Rightarrow b$	$\overline{a \Rightarrow b}$	$b \Rightarrow a$	$\overline{b} \Rightarrow \overline{a}$
f	f				
f	w				
w	f				
w	w				

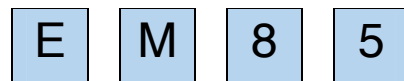
- b) Begründe: $\overline{\overline{a \Rightarrow b}} \equiv a \wedge \overline{b}$.
- c) Betrachte die Aussage: Wenn Silvester vier Beine hat, dann ist er ein Vogel. Bestimme den Wahrheitswert und bilde die Negation.
- d) Begründe: $b \Rightarrow a \not\equiv a \Rightarrow b$.
- e) Vergleiche die Implikation mit ihrer Kontraposition. Bilde die Kontraposition von: Wenn Silvester eine Katze ist, dann hat er vier Beine.

38. Zeige mithilfe von Wahrheitstafeln.

- a) $\overline{a} \Rightarrow b \equiv a \vee b$ c) $a \wedge (a \Rightarrow b) \equiv a \wedge b$ e) $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a) \equiv a \Leftrightarrow b$
 b) $a \Rightarrow \overline{b} \equiv a \wedge b$ d) $\overline{a} \vee (a \Rightarrow \overline{b}) \equiv a \vee b$ f) $a \Rightarrow (b \Rightarrow c) \equiv (a \wedge b) \Rightarrow c$

39. Das Rätsel der vier Spielkarten

Vier Spielkarten liegen auf dem Tisch. Jede Karte hat auf der einen Seite einen Buchstaben und auf der anderen Seite eine Zahl.



Wenn auf einer Seite ein Vokal steht, dann steht auf der anderen Seite eine gerade Zahl.

Silvester ist sich nicht sicher. Überprüfe, ob Silvesters Behauptung stimmt. Welche Karten musst du mindestens umdrehen?

40. Logikrätsel 6

In einem Kriminalfall sind drei Verdächtige festgenommen worden. Der Detektiv Sherlock Holmes führt die Untersuchung durch und sagt zu seinem Freund Dr. Watson: „Mein lieber Watson, meine intensiven Nachforschungen gestatten mir, die folgenden Schlüsse zu ziehen.“

- Wenn sich Bond oder Cox als Täter herausstellen sollten, dann ist Adam unschuldig.
- Ist aber Adam oder Cox unschuldig, dann muss Bond ein Täter sein.
- Wäre Cox schuldig, dann wäre Adam Mittäter.

Finde die Täter mithilfe einer Wahrheitstafel.

Eine **Aussage** ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch ist.
Wahr (**w**) und falsch (**f**) heißen **Wahrheitswerte**.

Wir können Aussagen in der Alltagssprache formulieren, aber auch mit mathematischen Symbolen.
Beispiel: Das Quadrat von 14 ist kleiner als 200. Oder kürzer: $14^2 < 200$.

Wir verwenden die kleinen Buchstaben $a, b, c, \dots$ als Platzhalter für Aussagen und nennen sie **Aussagenvariablen**, z. B. a : Silvester ist ein Kater.

Die Verknüpfung zweier Aussagen a und b mit ...

- ... „und“ heißt ... **Konjunktion** $a \wedge b$.
- ... „oder“ heißt ... **Disjunktion** $a \vee b$.
- ... „entweder - oder“ heißt ... **Kontravalenz** $a \oplus b$.
- Verneint man eine Aussage a , so erhält man ihre ... **Negation** $\bar{a}$.
- Die Negation der Konjunktion $a \wedge b$ heißt ... **NAND** $a \bar{\wedge} b$.
- Die Negation der Disjunktion $a \vee b$ heißt ... **NOR** $a \bar{\vee} b$.

Die zugehörigen **Wahrheitstafeln**:

		Konjunktion	Disjunktion	Kontravalenz	Negation	NAND	NOR
a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \oplus b$	$\bar{a}$	$a \bar{\wedge} b$	$a \bar{\vee} b$
f	f	f	f	f	w	w	w
f	w	f	w	w		w	f
w	f	f	w	w	f	w	f
w	w	w	w	f		f	f

Der Überstrich $\bar{}$ und die Zeichen $\wedge, \vee, \oplus, \bar{\wedge}, \bar{\vee}$ heißen **Junktoren**.
Sinnvolle Zusammenstellungen von Aussagevariablen und Junktoren, bei denen auch Klammern vorkommen können, heißen **aussagenlogische Formeln**.

Aussagenlogische Formeln:
 $(\bar{a} \vee b) \wedge (a \vee \bar{b})$
 $\overline{a \oplus b \vee b \wedge c}$

Belegen wir alle Aussagenvariablen einer aussagenlogischen Formel mit Wahrheitswerten, dann erhält auch die Formel einen Wahrheitswert,

Zwei aussagenlogische Formeln heißen **logisch gleichwertig** (Zeichen: $\equiv$), wenn sie für jede Belegung ihrer Variablen mit Wahrheitswerten stets denselben Wahrheitswert annehmen.

$$\overline{a \wedge b} \equiv \bar{a} \vee \bar{b}$$

$$a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

Jede aussagenlogische Formel mit zwei Variablen kann allein mit den Junktoren $\wedge, \vee$ und $\bar{}$ dargestellt werden.

Noch besser: Jede aussagenlogische Formel kann allein mithilfe des Junktors $\bar{\wedge}$ (oder $\bar{\vee}$) dargestellt werden.

$$a \oplus b \equiv (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b)$$

$$a \vee b \equiv (a \bar{\wedge} a) \bar{\wedge} (b \bar{\wedge} b)$$