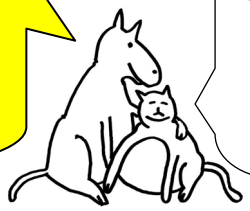
Rechnen in anderen Zahlensystemen

1. Folgende Tabelle kennst du aus dem Informatikunterricht der Klasse 7.
Erkläre ihre Bedeutung und vervollständige sie.

A	01000001	J	01001010	S	01010011
B	01000010	K	01001011	T	01010100
C	01000011	L	01001100	U	01010101
D	01000100	M	01001101	V	
E	01000101	N	01001110	W	
F	01000110	O	01001111	X	
G	01000111	P	01010000	Y	
H	01001000	Q	01010001	Z	
I	01001001	R	01010010		

Das **Binärsystem** (Dualsystem, Zweiersystem) ist wie das Dezimalsystem ein Stellenwertsystem.

- Es benutzt die Ziffern 0 und 1.
- Die Stellenwerte von rechts nach links: Einer, Zweier, Vierer, Achter, Sechzehner, …



Die Stellenwerte sind also die Zweierpotenzen $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots$

Die Ziffern 0 und 1 heißen auch **Bits**.

2. a) Zähle im Binärsystem bis 16.

0	0_2	6		12	
1	1_2	7		13	
2	10_2	8		14	
3	11_2	9		15	
4		10		16	
5		11	1011_2		

Binär dargestellte Zahlen kennzeichnen wir mit dem Index 2, z. B. 11_2.

Dezimal dargestellte Zahlen schreiben wir ohne Index, z. B. 11.



b) Gib die Stellenwerte des Binärsystems (Zweierpotenzen) dezimal und binär an.

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5
1	2	4			
1_2	10_2	100_2			

2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}

3. Vom Binärsystem ins Dezimalsystem

a) Erkläre Wurzels Rechnung.

$11\,011\,101_2 = 1 + 4 + 8 + 16 + 64 + 128 = 221$



b) Gegeben sind Zahlen in Binärdarstellung. Bestimme wie Wurzel ihre Dezimaldarstellung.

i) $10\,110\,011_2$	v) $101\,101\,101_2$	ix) $1\,000\,100\,111_2$
ii) $11\,101\,110_2$	vi) $100\,001\,010_2$	x) $1\,010\,101\,010_2$
iii) $11\,001\,000_2$	vii) $111\,110\,100_2$	xi) $1\,100\,011\,101_2$
iv) $11\,111\,111_2$	viii) $111\,111\,111_2$	xii) $1\,111\,101\,000_2$

c) Silvester schreibt im Aufgabenteil b) alle Zahlen zehnstellig, indem er **führende Nullen** hinzufügt, also z. B. in i) $0\,010\,110\,011_2$.
Ist das erlaubt?



d) Woran erkennst du in der Binärdarstellung die geraden Zahlen?

4. Vom Dezimalsystem ins Binärsystem

a) Silvester bestimmt die Binärdarstellung der Zahl 45. Erkläre, wie er das macht.

$45 = 32 + 8 + 4 + 1$

$= 1\,32er + 0\,16er + 1\,Achter + 1\,Vierer + 0\,Zweier + 1\,Einer$

$= 101\,101_2$





Die Profis schreiben:

$45 = 1\cdot2^5 + 0\cdot2^4 + 1\cdot2^3 + 1\cdot2^2 + 0\cdot2^1 + 1\cdot2^0$

$= 101\,101_2$

b) Übertrage ins Binärsystem. Schaffst du die Rechnung im Kopf?

11 =	29 =	47 =
18 =	33 =	50 =
22 =	36 =	57 =
27 =	42 =	63 =

5. Divisions-Algorithmus

a) Um die Binärdarstellung von 29 zu finden, macht Wurzel nebenstehende Rechnung.

① Beschreibe Wurzels Rechnung.

② Wo findest du in der Rechnung die Binärdarstellung von 29?

29:2 = 14 Rest 1
14:2 = 7 Rest 0
7:2 = 3 Rest 1
3:2 = 1 Rest 1
1:2 = 0 Rest 1



b) Probiere das neue Rechenverfahren an fünf weiteren Zahlen von Aufgabe 4 aus.

c) Erläutere an Wurzels Beispiel in Aufgabenteil a), warum das Rechenverfahren funktioniert.

Rechnung	Bedeutung der Rechnung
29:2 = 14 Rest 1	29 Einer = 14 Zweier + **1 Einer**
14:2 = 7 Rest 0	14 Zweier = 7 Vierer + **0 Zweier**
7:2 = 3 Rest 1	7 Vierer = 3 Achter + **1 Vierer**
3:2 = 1 Rest 1	3 Achter = 1 Sechzehner + **1 Achter**
1:2 = 0 Rest 1	1 Sechzehner = 0 Zweiunddreißiger + **1 Sechzehner**

2 Einer = 1 Zweier
2 Zweier = 1 Vierer
2 Vierer = 1 Achter



Divisions-Algorithmus: dezimal → binär

1. Dividiere die Dezimalzahl ganzzahlig durch 2.
2. Notiere den Rest (0 oder 1).
3. Wiederhole Schritt 1 und 2 mit dem ganzzahligen Ergebnis, solange das Ergebnis größer als 0 ist.
4. Nimm die Reste von unten nach oben – das ist die **Binärzahl**.

19:2 = 9 Rest 1
9:2 = 4 Rest 1
4:2 = 2 Rest 0
2:2 = 1 Rest 0
1:2 = 0 Rest 1
Also: $19 = 10011_2$

6. Wandle mithilfe des Divisions-Algorithmus Zahlen von der Dezimal- in die Binärdarstellung um.

a) 71 c) 115 e) 222 g) 400 i) 876

b) 98 d) 140 f) 313 h) 625 j) 1001



Ich habe die Binärdarstellung von 51 bestimmt und dummerweise die Reste von oben nach unten genommen.

Diesen Fehler solltest du nicht machen. Aber diesmal hast du Glück gehabt.

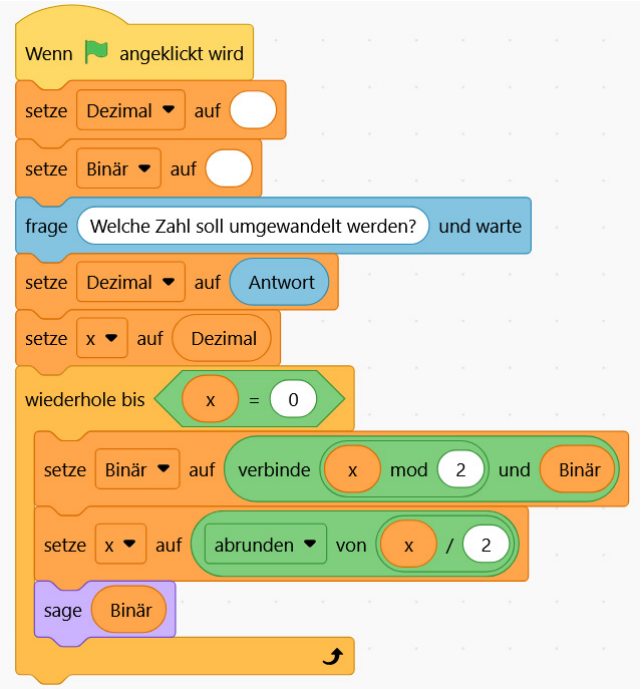


7. Scratch verwenden

Wenn du im Informatikunterricht *Scratch* kennengelernt hast, kannst du zur Umwandlung einer Zahl von der Dezimal- in die Binärdarstellung ein Projekt erstellen.



a) Die folgende Abbildung zeigt den Skriptbereich und die Bühne zu einem Projekt, das die Autoren des Arbeitsbuches programmiert haben. Analysiere das Projekt. Die verwendeten Variablen heißen: Dezimal, Binär und *x*.

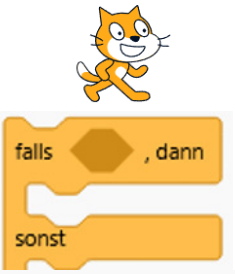




b) Öffne Scratch auf deinem PC oder Tablet und baue das in a) vorgegebene Programm im Skriptbereich nach (nimm als Figur die Katze).

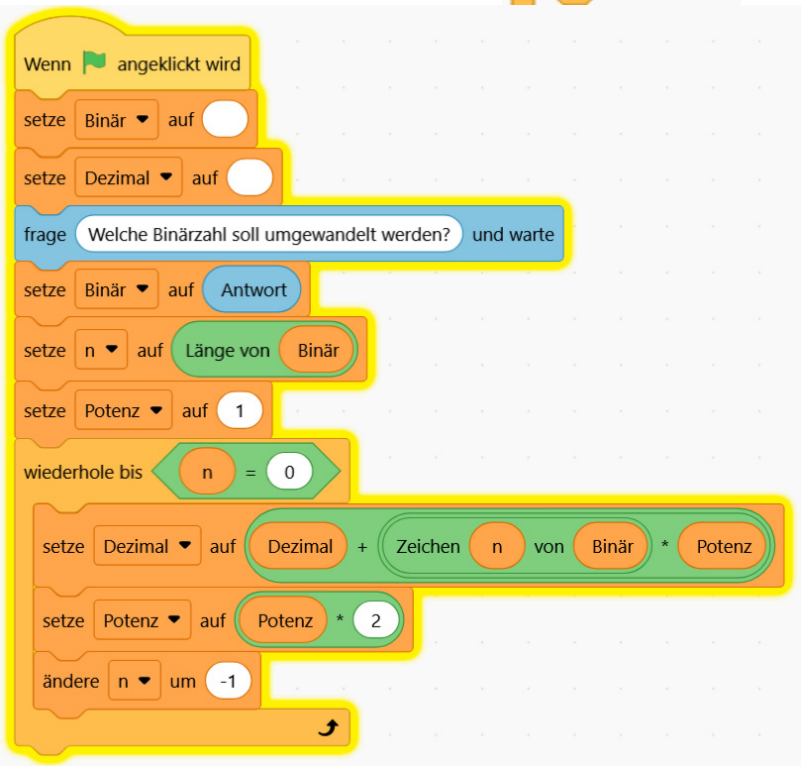
c) Probiere die Anwendung aus. Was beobachtest du, wenn du 0 eingibst?

d) Bei Eingabe von 0 soll die Ausgabe auch 0 sein.
Füge in den Block-Code einen geeigneten Falls-dann-sonst-Block ein.



e) Nebenstehend siehst du das Scratch-Skript zu einem anderen Projekt.

Finde heraus, was berechnet wird, und probiere das Projekt aus.



Zusatzaufgabe:

Wenn der User keine Binärzahl eingibt, soll das Programm dies rückmelden. Füge entsprechenden Block-Code hinzu.

8. a) Beschreibe die Darstellung der Zahl 2^n ($n \in \mathbb{N}$) im Binärsystem. Wie viele Stellen hat die Zahl in Binärdarstellung?

b) Vervollständige folgende Tabelle.

Zahlen in Dezimaldarstellung	Anzahl der Stellen in Binärdarstellung		Zahlen in Dezimaldarstellung	Anzahl der Stellen in Binärdarstellung
0 und 1	1			
2 und 3	2			
4 bis 7				
	4			
				10

c) Wie viele Zahlen haben in der Binärdarstellung ein, zwei, …, zehn Stellen?
Trage deine Antworten in die nachstehende Tabelle ein. Erkennst du ein Muster?

Stellenzahl in Binärdarstellung	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl										

d) Ergänze ($n \geq 2$). Anzahl der n-stelligen Binärzahlen:

e) Kannst du Silvesters Fragen, ohne viel zu rechnen, beantworten?

① Wie viele Stellen hat die Zahl 477 in Binärdarstellung?
② Zwischen welchen Zweierpotenzen liegt $11\ 011\ 011_2$?
③ Welches sind die kleinste und größte 7-stellige Binärzahlen?



9. a) Setze das richtige Anordnungszeichen (<, >).

$11\ 000\ 011_2$ $\quad$ $10\ 110\ 011_2$	$11\,110\ 000_2$ $\quad$ $11\ 111\ 000_2$	$10\,110\ 011_2$ $\quad$ $11\ 110\ 011_2$

b) Beschreibe, wie du herausfindest, welche von zwei gegebenen Binärzahlen die größere ist.

c) Welche Zahl ist größer: $11\ 110\ 111_2$ oder $11\ 101\ 111_2$?
Wie viele ganze Zahlen liegen dazwischen?

Addieren und Subtrahieren im Binärsystem

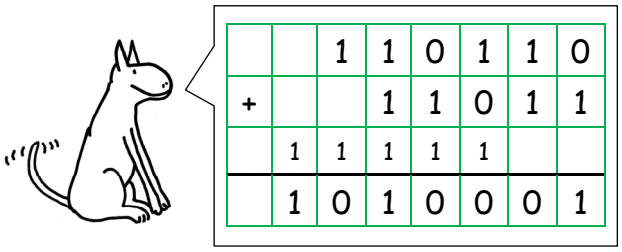
10. Binär addieren

a) Vervollständige die Grundbausteine für die Addition in Binärdarstellung.

Die Grundbausteine:

- $0_2 + 0_2 =$
- $0_2 + 1_2 =$
- $1_2 + 0_2 =$
- $1_2 + 1_2 =$
- $1_2 + 1_2 + 1_2 =$

b) Wurzel addiert zwei Zahlen in Binärdarstellung (der Index 2 ist weggelassen) schriftlich. Erkläre, wie sie rechnet und mache die Probe, indem du die Zahlen in Dezimaldarstellung addierst.



		1	1	0	1	1	0
+			1	1	0	1	1
	1	1	1	1	1		
	1	0	1	0	0	0	1

Probe:

c) Addiere schriftlich und überprüfe deine Rechnung in Dezimaldarstellung.

①	1	0	1	0	1	0
+		1	0	0	0	1

②	1	0	0	1	1	1
+		1	0	1	0	1

③		1	0	1	0	0	1
+		1	0	1	0	1	1

④			1	1	1	1	1
+		1	1	1	1	1	1

⑤		1	1	1	0	1	1	1
+			1	0	1	1	1	0

⑥		1	1	1	0	1	1	0
+		1	0	1	1	1	1	0

d) Wurzel addiert drei Zahlen in Binärdarstellung.
Erkläre die Rechnung, achte insbesondere auf die Überträge.
Überprüfe die Rechnung in Dezimaldarstellung.



			1	1	1	0
			1	0	1	1
+				1	1	1
	1		1		1	
			1			
	1	0	0	0	0	0

e) Berechne schriftlich.

① $10100_2 + 11010_2 + 1011_2$

② $11011_2 + 10101_2 + 11001_2$

③ $10111_2 + 1010_2 + 11011_2$

④ $111111_2 + 11111_2 + 1111_2$

11. Binär subtrahieren

a) Versuche nebenstehende Subtraktionsaufgabe selbstständig zu lösen. Mache die Probe in Dezimaldarstellung.

Gehe zu Aufgabenteil b), wenn du nicht zurechtkommst.

	1	0	1	0	1	0	1
-			1	1	0	1	1

b) Die Subtraktion ist die Umkehrung der Addition. Daher muss die Summe der Zahlen in den dunkel unterlegten Feldern (Subtrahend, Übertrag, Differenz) die Zahl in der oberen Zeile (Minuend) ergeben. Gehe von rechts nach links und trage jeweils das richtige Bit (0 oder 1) in die unterste Zeile ein. Überträge kommen in die dritte Zeile.

	1	0	1	0	1	0	1
-			1	1	0	1	1

c) Subtrahiere schriftlich und überprüfe deine Rechnung in Dezimaldarstellung.

①						
	1	0	1	0	1	1
-		1	1	0	0	1

②						
	1	1	1	0	0	1
-		1	0	1	1	0

③						
	1	1	1	0	1	0
-	1	1	0	1	0	0

④						
	1	1	1	1	1	1
-		1	1	1	1	1

⑤							
	1	1	0	0	1	1	0
-	1	0	1	1	0	1	1

⑥							
	1	0	0	1	0	0	1
-		1	0	1	0	1	0

12. Vorgänger und Nachfolger in Binärdarstellung

a) Wurzel bestimmt den Vorgänger von 101100_2 und Silvester den Nachfolger von 110111_2. Beschreibe ihre Vorgehensweise.



b) Fülle die Tabelle aus.

Vorgänger	Zahl	Nachfolger
	110110_2	
	110101_2	
	100100_2	
	100111_2	

Vorgänger	Zahl	Nachfolger
	1011110_2	
	1001111_2	
	1100000_2	
	1111111_2	

13. Summenformel für die Zweierpotenzen

a) Berechne: $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7$.

b) Die Rechnung in a) wird viel einfacher, wenn du für die Zweierpotenzen die Binärdarstellung benutzt.

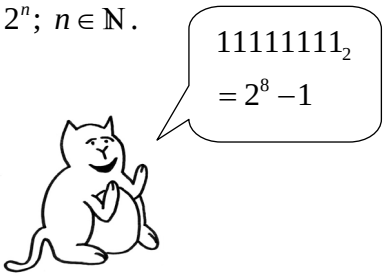
$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7$

$= 1_2 + 10_2 +$

c) Berechne auf die gleiche Weise die Summe $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n$; $n \in \mathbb{N}$.

$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n$

$= 1_2 + 10_2 +$



14. Zahlentrick

Vorbereitung:

Mache von der Buchseite eine Kopie und schneide die sechs abgebildeten Zahlenkarten aus.

Das Spiel:

Gib deinem Spielpartner die sechs Karten und fordere ihn auf, sich eine der Zahlen 1, 2, 3, …, 63 zu merken, sie geheim zu halten und nur die Karten zurückzugeben, auf denen die gemerkte Zahl vorkommt. Du addierst unauffällig die Anfangszahlen auf den zurückgegebenen Karten. Diese Summe ist die gedachte Zahl.

a) Teste das Spiel z. B. mit den Zahlen 13, 16, 27, 36, 47.

b) Welche Zahl hat sich dein Spielpartner gemerkt, wenn er alle Karten zurückgibt?

c) Erkläre, warum das Spiel funktioniert.

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31
33	35	37	39
41	43	45	47
49	51	53	55
57	59	61	63

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31
34	35	38	39
42	43	46	47
50	51	54	55
58	59	62	63

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31
36	37	38	39
44	45	46	47
52	53	54	55
60	61	62	63

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31
40	41	42	43
44	45	46	47
56	57	58	60
60	59	62	63

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	60
60	59	62	63

32	33	34	35
36	37	38	39
40	41	42	43
44	45	46	47
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	60
60	59	62	63

Multiplizieren und Dividieren im Binärsystem

15. Binär multiplizieren

a) Vervollständige die Grundbausteine für die Multiplikation in Binärdarstellung.

Die Grundbausteine:

- $0_2 \cdot 0_2 =$
- $0_2 \cdot 1_2 =$
- $1_2 \cdot 0_2 =$
- $1_2 \cdot 1_2 =$

b) Silvester hat damit begonnen, zwei Zahlen in Binärdarstellung schriftlich zu multiplizieren (der Index 2 ist weggelassen).

Er verfährt, wie im Dezimalsystem. Führe die Rechnung zu Ende und zeige anhand einer Probe in Dezimaldarstellung, dass der Algorithmus tatsächlich funktioniert.



1	1	0	1	0	·	1	0	1	1
		1	1	0	1	0			
			0	0	0	0	0		
				1					
					1				

c) Multipliziere schriftlich und überprüfe deine Rechnung in Dezimaldarstellung.

①

1	1	1	1	·	1	1	0

②

1	1	1	0	·	1	0	0	1

③

1	0	1	1	0	·	1	1	1	0

④

1	1	1	1	1	·	1	1	1	1

16. Multiplikation mit einer Stufenzahl



Im Dezimalzahlsystem gilt: Wir multiplizieren eine Zahl mit 10, 100, 1000, …, indem wir an die Zahl eine, zwei, drei, … Nullen anhängen.

Gilt eine solche Regel auch im Binärsystem?

a) Betrachte eine beliebige 5-Bit-Zahl $abcde_2$ (die Buchstaben sind Platzhalter für 0 oder 1) und die Stufenzahl 1000_2.
Verwende nebenstehendes Rechenschema, um die beiden Zahlen zu multiplizieren. Beschreibe das Ergebnis.

a	b	c	d	e	·	1	0	0	0

b) Was ändert sich an der Rechnung, wenn du mit 10_2, 100_2 oder einer anderen Stufenzahl multiplizierst?

c) Formuliere eine Regel.

Im Binärsystem gilt: Wir multiplizieren eine Zahl mit 10_2, 100_2, 1000_2, …, indem wir

17. Binär dividieren

a) Kann man im Binärsystem denselben Algorithmus für die schriftliche Division wie im Dezimalsystem benutzen?
Nebenstehend ist eine solche Rechnung ausgeführt. Beschreibe die Rechnung. Liefert sie das richtige Ergebnis?

1	0	1	0	1	:	1	1	1	=	1	1
	1	1	1								
1	1	1									
0	0	1	1	1							
		1	1	1							
				0							

b) Dividiere schriftlich.

① 1001 : 11 =

② 1100 : 11 =

③

1	1	1	1	:	1	1	=		

④

1	0	0	1	0	:	1	1	=			

c) *Weitere Divisionsaufgaben im Heft*

① $11011_2 : 11_2$ ③ $110110_2 : 110_2$ ⑤ $1101100_2 : 1001_2$

② $100011_2 : 101_2$ ④ $1001101_2 : 111_2$ ⑥ $10001111_2 : 1101_2$

d) Die Division durch 10_2, 100_2, … ist besonders einfach. Finde anhand folgender Beispiele eine Regel.

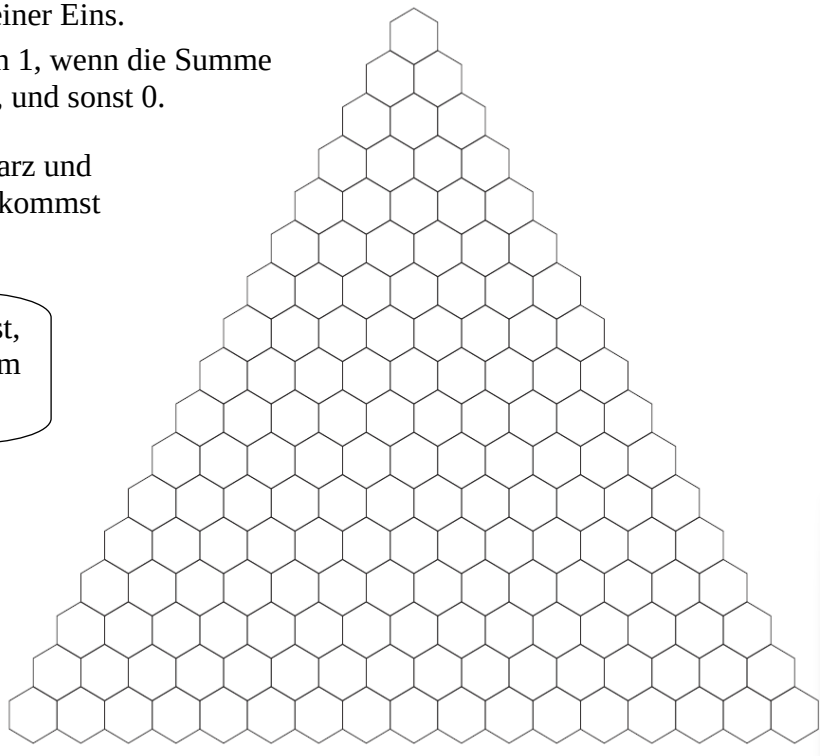
$11010_2 : 10_2 =$	$1011100_2 : 100_2 =$	$101000_2 : 1000_2 =$



Pascalsches Dreieck für Rechenmuffel

a) Fülle das dreieckige Wabenmuster nach folgender Regel mit Nullen und Einsen:
   ① Jede Zeile beginnt und endet mit einer Eins.
   ② Schreibe in die Waben dazwischen 1, wenn die Summe der darüberstehenden Zahlen 1 ist, und sonst 0.

b) Färbe die Waben mit einer Eins schwarz und lasse die anderen Waben weiß. Du bekommst ein schönes Schwarz-Weiß-Muster.





Das Hexadezimalsystem (Sechzehnersystem)



18. a) Im Binärsystem benötigen wir zwei Ziffern, im Dezimalsystem zehn Ziffern. Wie viele Ziffern brauchen wir im Hexadezimalsystem?

b) Zähle in nebenstehender Tabelle in allen drei Stellenwertsystemen bis 16. Welches Problem bekommst du im Hexadezimalsystem?

c) Man benutzt im Hexadezimalsystem für 10 Einer, 11 Einer, 12 Einer … die Großbuchstaben A, B, C, ...
Ergänze die Tabelle entsprechend.

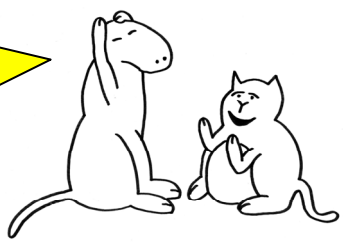
d) Im Binärsystem sind die Zweierpotenzen die Stellenwerte, im Dezimalsystem sind es die Zehnerpotenzen. Gib in nachstehender Tabelle die Stellenwerte des Hexadezimalsystems an.

dezimal	binär	hexa-dezimal
0	0	0
1	1	1
2	10	2
3	11	3
4	100	4
...	...	...
9		

binär	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	...
dezimal	$10^0 = 1$	$10^1 = 10$	$10^2 = 100$	$10^3 = 1000$	$10^4 = 10000$	...
hexadezimal						

Das **Hexadezimalsystem** ist wie das Dezimalsystem und das Binärsystem ein Stellenwertsystem.

- Es benutzt die 16 Ziffern 0,1,2, ... ,9,A,B,C,D,E,F.
- Die Stellenwerte sind von rechts nach links die Potenzen $16^0, 16^1, 16^2$ usw.



e) Stimmst du Silvester zu?
Wenn ja: Welche Dezimaldarstellung hat diese Zahl?

Dann ist AFFE die Hexadezimaldarstellung einer Zahl, eine **Hex-Zahl**.

19. Vom Hexadezimalsystem ins Dezimalsystem

a) Erkläre Wurzels Rechnung und ergänze Silvesters Tabelle.

$1A7C_{16} = 1 \cdot 4096 + 10 \cdot 256 + 7 \cdot 16 + 12 \cdot 1$

$= 4096 + 2560 + 112 + 12 = 6780$



$10_{16} = 16$

$100_{16} =$

$1000_{16} =$

b) Gegeben sind Hex-Zahlen (Zahlen in Hexadezimaldarstellung).
Bestimme ihre Dezimaldarstellung, wie es Wurzel gemacht hat.

$14_{16} =$	$A5_{16} =$	$1FC_{16} =$	$1112_{16} =$
$20_{16} =$	$BD_{16} =$	$2BC_{16} =$	$2710_{16} =$
$5A_{16} =$	$FF_{16} =$	$E07_{16} =$	$ABCD_{16} =$

c) Welches ist die kleinste vierstellige Hex-Zahl, welches die größte? Gib die Zahlen in Hexadezimal- und in Dezimaldarstellung an. Wie viele vierstellige Hex-Zahlen gibt es also?

20. Vom Dezimalsystem ins Hexadezimalsystem

a) Silvester bestimmt die Hexadezimaldarstellung der Zahl 111. Erkläre, wie er das macht.

$111 = 96 + 15$

$= 6 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0$

$= 6F_{16}$



16, 32, 48, 64, 80, 96,
112, 128, 144, 160, 176,
192, 208, 224, 240, 256

b) Übertrage ins Hexadezimalsystem. Schaffst du die Rechnung im Kopf ?

25 =	93 =	161 =	237 =
42 =	100 =	182 =	257 =
63 =	125 =	204 =	266 =
75 =	149 =	218 =	272 =

21. Divisions-Algorithmus

a) Funktioniert der Divisionsalgorithmus (siehe Aufgabe 5) auch bei der Umrechnung ins Hexadezimalsystem? Wir probieren es in der linken Box an der Zahl 855 aus: Führe die Rechnung zu Ende und mache eine Probe.

855:16 = 53 Rest 7

Ergebnis:

855 =

4042:16 = 252 Rest 10

252:16 = 15 Rest 12

15:16 = 0 Rest 15

Ergebnis:

b) In der rechten Box ist das Divisionsverfahren für die Zahl 4042 durchgeführt, die Reste sind alle größer als 9. Wie lautet hier die Hexadezimaldarstellung der Zahl?



22. Wandle mithilfe des Divisions-Algorithmus Zahlen von der Dezimal- in die Hexadezimaldarstellung um.

a) 533 c) 1290 e) 2030 g) 2672 i) 49328

b) 1128 d) 1500 f) 2333 h) 20000 j) 65399

23. Hexadezimal addieren

a) In der **hexadezimalen Additionstafel** ist festgehalten, wie die einstelligen Hex-Zahlen addiert werden. Überprüfe die eingetragenen Werte und vervollständige die Tabelle (0 ist weggelassen und die Hex-Zahlen sind ohne Index 16 geschrieben).

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11
3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12
4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13
5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15
7	8	9	A	B	C	D									
8	9	A	B	C	D	E									
9	A	B	C	D	E	F									
A	B	C	D	E	F	10									
B	C	D	E	F	10	11									
C	D	E	F	10	11	12									
D	E	F	10	11	12	13									
E	F	10	11	12	13	14									
F	10	11	12	13	14	15									

b) Erkläre die schriftliche Addition in Aufgabe ① und berechne dann die übrigen Aufgaben auf gleiche Weise.

①	5	B	9
+	A	E	3
1	1		
1	0	9	C

②	3	C	F
+	F	1	F

③ $2A1_{16} + 59_{16}$	⑥ $726_{16} + 384_{16}$
④ $E4_{16} + A4B_{16}$	⑦ $F50_{16} + E7B_{16}$
⑤ $FEB_{16} + 78_{16}$	⑧ $ABC_{16} + CBA_{16}$

24. Hexadezimal multiplizieren

a) Im **kleinen Hex-Einmaleins** ist festgehalten, wie die einstelligen Hex-Zahlen multipliziert werden. Überprüfe die eingetragenen Werte und vervollständige die Tabelle (die Hex-Zahlen sind ohne Index 16 geschrieben). Warum kann man in der Tabelle 0 und 1 weglassen?

·	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
2										16	18	1A	1C	1E
3										21	24	27	2A	2D
4										2C	30	34	38	3C
5										37	3C	41	46	4B
6										42	48	4E	54	5A
7										4D	54	5B	62	69
8										58	60	68	70	78
9										63	6C	75	7E	87
A										6E	78	82	8C	96
B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E					
C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78					
D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82					
E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C					
F	1E	2D	3C	4B	5A	69	78	87	96					

b) Hier geht es um die schriftliche Multiplikation mit einer einstelligen Hex-Zahl.

①	3	2	1	·	5

②	B	E	2	·	7
			6	2	E
		4	D		

③	5	D	7	·	B

① Multipliziere 321_{16} mit 5_{16} und mache eine Probe in Dezimaldarstellung.

② Hier siehst du, wie du die Lösung aufschreiben kannst, wenn wie bei $E_{16} \cdot 7_{16}$ ein Übertrag entsteht. Beschreibe die Rechnung, führe sie zu Ende und kontrolliere das Ergebnis dezimal.

③ Löse die Aufgabe selbstständig. Du solltest $403D_{16}$ herausbekommen.

c) Multipliziere schriftlich.

① $205_{16} \cdot 6_{16}$ =	③ $DE_{16} \cdot C_{16}$ =	⑤ $12AB_{16} \cdot A_{16}$ =
② $5302_{16} \cdot 4_{16}$ =	④ $B0F_{16} \cdot 4_{16}$ =	⑥ $B742_{16} \cdot F_{16}$ =

d) Multiplikation mit einer mehrstelligen Hex-Zahl

①	5	1	4	·	2	3

②	A	3	5	·	E	7

A	3	5	·	E

A	3	5	·	7

① Multipliziere 514_{16} und 23_{16} schriftlich und mache eine Probe im Dezimalsystem.

② Hier entstehen bei den Multiplikationen mit E und 7 Überträge. Daher empfiehlt es sich, beide Multiplikationen in Nebenrechnungen auszulagern. Führe die Rechnung durch und kontrolliere das Ergebnis dezimal.

e) Multipliziere schriftlich.

① $B5_{16} \cdot 32_{16}$ =	③ $A45_{16} \cdot 301_{16}$ =	⑤ $4F7_{16} \cdot 294_{16}$ =
② $AB_{16} \cdot EC_{16}$ =	④ $C18_{16} \cdot EDE_{16}$ =	⑥ $ABBA_{16} \cdot CD_{16}$ =

25. Multiplikation mit einer Stufenzahl

Was passiert, wenn man eine Hex-Zahl mit einer Stufenzahl des Hex-Systems multipliziert?



Zum Beispiel: $A67D_{16} \cdot 100_{16}$ = ?

a) Betrachte eine beliebige dreistellige Hex-Zahl xyz_{16} (die Buchstaben sind Platzhalter für die Ziffern 0, 1, 2, …, F) und die Stufenzahl 100_{16}.
Verwende nebenstehendes Rechenschema, um die beiden Zahlen zu multiplizieren. Beschreibe das Ergebnis.

x	y	z	·	1	0	0

b) Was ändert sich an der Rechnung, wenn du mit 10_{16}, 1000_{16} oder einer anderen Stufenzahl multiplizierst?

c) Formuliere eine Regel.

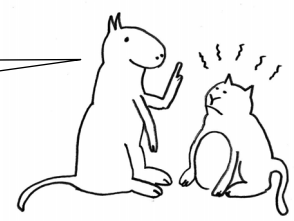
Im Hexadezimalsystem gilt: Wir multiplizieren eine Zahl mit 10_{16}, 100_{16}, 1000_{16}, …,

indem wir

26. Vom Binärsystem ins Hexadezimalsystem

a) Wurzel zeigt dir, wie du Binärzahlen mühelos in Hex-Zahlen umwandeln kannst.

$11010111_2 = \underbrace{1101}_{D}\,\underbrace{0111}_{7} = D7_{16}$



① Zeige, dass 11010111_2 und $D7_{16}$ dieselbe Zahl darstellen.

② Beschreibe Wurzels Vorgehensweise.

b) Probiere selbst das Verfahren aus und vergewissere dich durch eine Probe, dass es funktioniert.

- 10101100_2 =
- 111000111001_2 =
- 1000111100011011_2 =
- 11011110011101_2 =

binär	hexa-dezimal
1010	A
1011	B
1100	C
1101	D
1110	E
1111	F

c) Formuliere die Umwandlungsregel.

Umwandlung von der Binär- in die Hexadezimaldarstellung:

d) Wurzel erklärt am Beispiel der Binärzahl 11010111_2, warum das Verfahren funktioniert. Beschreibe Wurzels Rechnung.



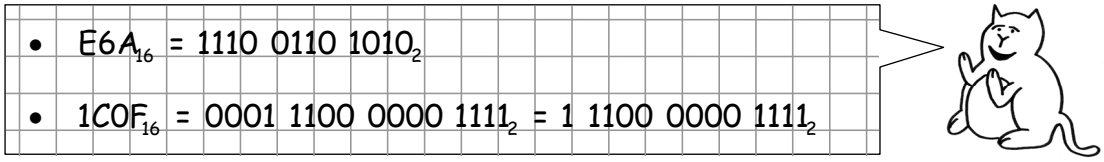
$$11010111_2 = 11010000_2 + 0111_2$$
$$= 1101_2 \cdot 10000_2 + 0111_2$$
$$= D_{16} \cdot 10_{16} + 7_{16}$$
$$= D0_{16} + 7_{16} = D7_{16}$$

e) Die Binärzahl $1100\ 0101\ 1101_2$ soll in eine Dezimalzahl umgewandelt werden. Du kannst die Zahl wie in Aufgabe 3 direkt in eine Dezimalzahl umwandeln oder du kannst sie in eine Hex-Zahl umwandeln und diese dann in eine Dezimalzahl.

Probiere beide Wege aus. Welcher Weg ist bequemer?

27. Vom Hexadezimalsystem ins Binärsystem

a) Erkläre Silvesters Umformungen.



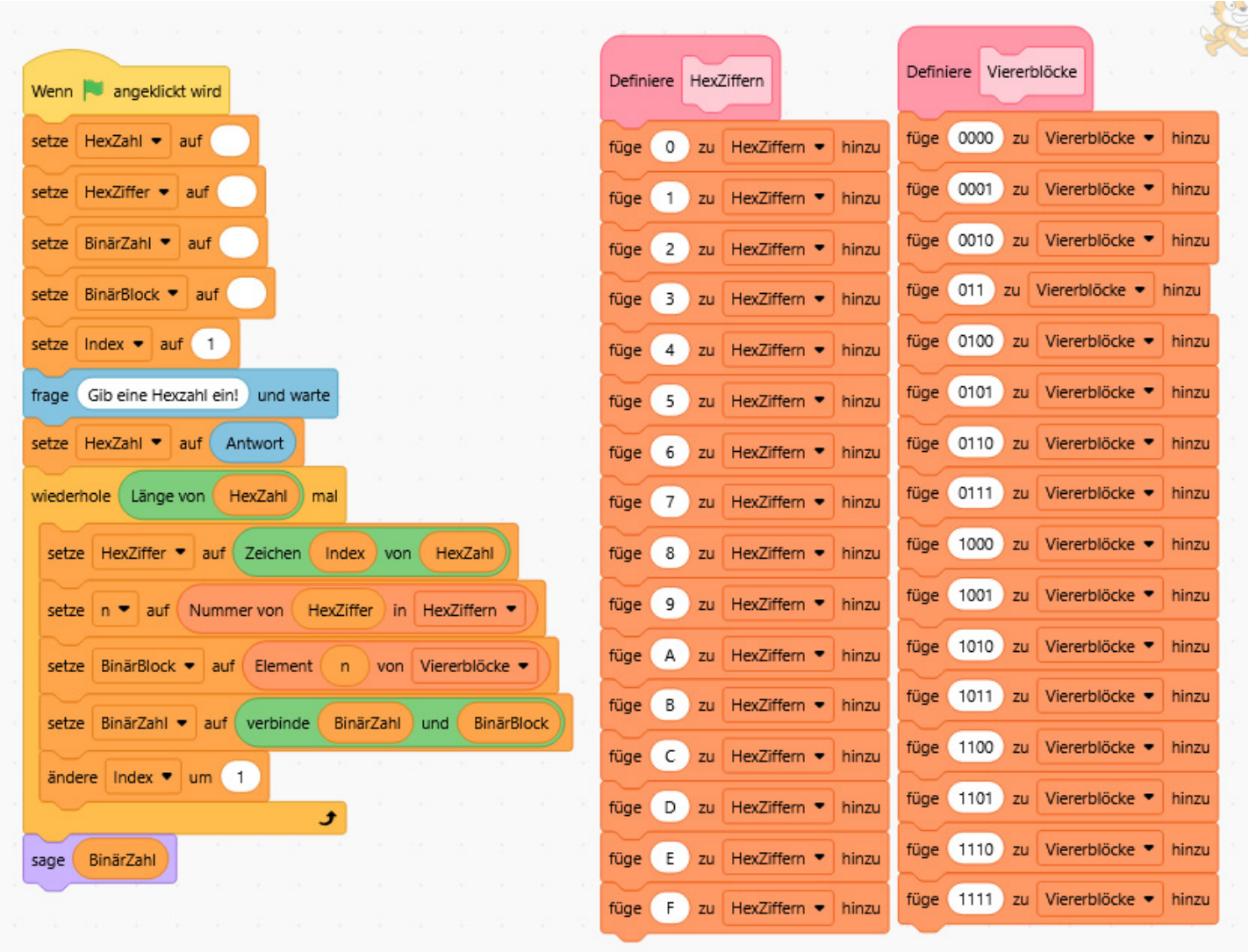
b) Wandle Hex-Zahlen in Dualzahlen um.

① AF_{16}	③ 27_{16}	⑤ $D17_{16}$	⑦ $9A02_{16}$
② $B3_{16}$	④ $8EC_{16}$	⑥ $6E0_{16}$	⑧ $1334C_{16}$

c) Eine 6-stellige Hex-Zahl beginnt mit der Ziffer 1 (mit der Ziffer 4). Wie viele Stellen hat die Zahl in Binärdarstellung ohne führende Nullen?

28. Anregung zum Programmieren

So kann das Scratch-Skript zur Umwandlung von Hexadezimalzahlen in Binärzahlen aussehen.

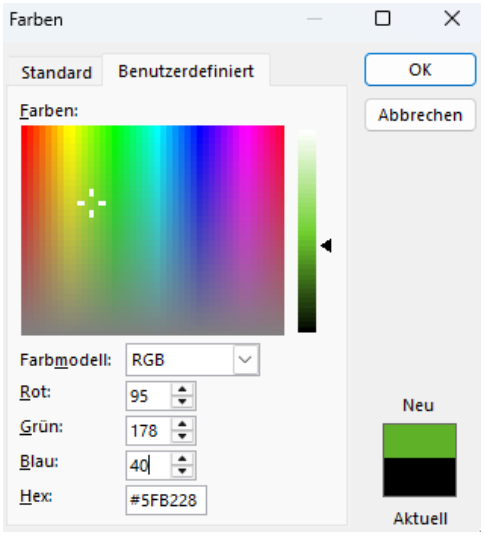


29. RGB-Farbmodell

Das RGB-Farbmodell wird in der Displaytechnik zur Farbdarstellung verwendet. Es beruht auf additiver Farbmischung: Durch das Mischen der drei Grundfarben **R**ot, **G**rün und **B**lau in unterschiedlicher Intensität entsteht jede gewünschte Farbe.

Um eine Farbe im Computer anzugeben, stehen zwei Codes zur Verfügung.

- **RGB-Code:** Er gibt die Intensität jeder Farbe als Zahl von 0 bis 255 an.
  Schreibweise: rgb(95,178,40)
- **Hex-Code**: Die drei dezimalen RGB-Werte sind in Hex-Zahlen (von 00 bis FF) umgewandelt, und ein Rautezeichen ist vorangestellt. Schreibweise: #5FB228.



Nebenstehende Abbildung zeigt das Fenster „Farben“ von Microsoft Word, in dem du unter „Benutzerdefiniert“ Farben festlegen kannst.

Öffne auf deinem Tablet oder PC dieses Fenster, gib die in der Tabelle angegebenen RGB-Codes ein und vervollständige die Tabelle.

RGB-Code	rgb(0,0,0)	rgb(255,255,255)	rgb(120,120,120)	rgb(255,0,0)	rgb(0,255,0)	rgb(0,0,255)
Hex-Code						
Farbe						

30. Mehr zum RGB-Farbmodell

a) Welcher Hex-Code gehört zum Farbwert rgb(202,31,15)?

b) Wie viele verschiedene Farben können insgesamt im RGB-Modell dargestellt werden?

c) Ein Farbcode hat den Hex-Wert #4080C8. Bestimme das zugehörige rgb-Tripel.

d) Zu welcher Farbe gehört der Farbcode #FFFF00 (Mischung der Maximalwerte von Rot und Grün bei Abwesenheit von Blau)?

e) Eine Graustufe entsteht, wenn im RGB-Code alle Komponenten gleich groß sind. Insbesondere gilt: rgb(0,0,0) ergibt Schwarz und rgb(255,255,255) ergibt Weiß.
   Wie viele Graustufen (einschließlich Schwarz und Weiß) können im RGB-System hergestellt werden?

f) Gib einen Hex-Code an, der eine dunklere Graustufe als #A0A0A0 repräsentiert. Wie viel von diesen dunkleren Graustufen gibt es?

g) Zwei Farben $\text{rgb}(R,G,B)$ und $\text{rgb}(R',G',B')$ heißen genau dann zueinander komplementär, wenn ihre Addition in allen drei Kanälen den Maximalwert 255 ergibt.
   Was sind die Komplementärfarben zum reinen Rot #FF0000, zum reinen Grün #00FF00 und zum reinen Blau #0000FF im RGB-Modell?

$$R + R' = 255$$
$$G + G' = 255$$
$$B + B' = 255$$

h) Ein Web-Designer möchte eine Farbe mit 75% Rot-Intensität erstellen. Welchen ganzzahligen Dezimalwert muss er für den R-Kanal einstellen?

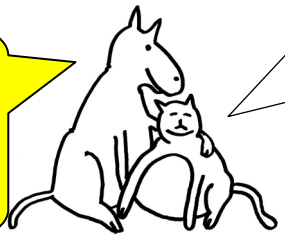
Weitere Zahlsysteme

31. So könnte ein einarmiger Alien mit fünf Fingern zählen:
1 Finger, 2 Finger, 3 Finger, 4 Finger, 1 Hand, 1 Hand und 1Finger, 1 Hand und 2 Finger, …
Zähle weiter, benutze dabei unsere Stellenwertschreibweise.

0	1	2	3	4	10_5	11_5	12_5						

Das Fünfersystem

- die Ziffern: 0, 1, 2, 3, 4
- die Stellenwerte:
  $5^0, 5^1, 5^2, ...$



$2314_5 = 2 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 4$

$= 2 \cdot 125 + 3 \cdot 25 + 5 + 4$

$= 250 + 75 + 9 = 334$

32. Übertrage ins Dezimalsystem.

121_5 =	401_5 =	1111_5 =	10000_5 =
233_5 =	444_5 =	3322_5 =	14341_5 =
332_5 =	121_5 =	4400_5 =	32342_5 =

33. Übertrage ins Fünfersystem.

In einfachen Fällen schaffst du das wie Silvester im Kopf.

$138 = 125 + 10 + 3$

$= 125 + 0 \cdot 25 + 2 \cdot 5 + 3 = 1023_5$



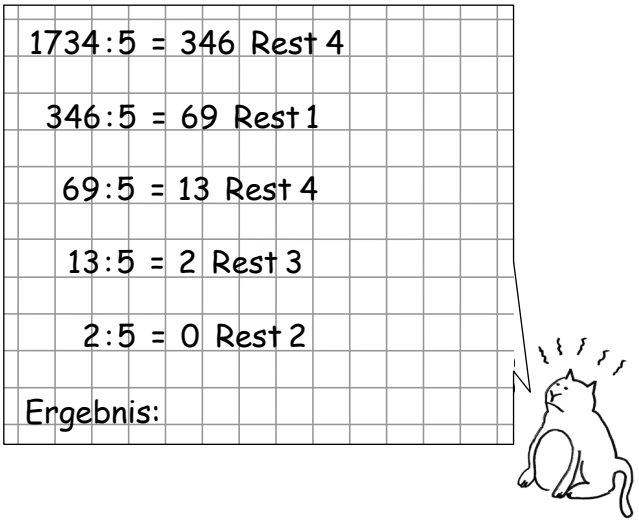
17 =	55 =	117 =	150 =
29 =	89 =	123 =	276 =
38 =	108 =	128 =	499 =

34. Größere Zahlen wandeln wir mithilfe des Divisions-Algorithmus von der Dezimaldarstellung in die Fünferdarstellung um.

Prüfe Silvesters Rechnung, gib das Ergebnis an und mache eine Probe.

Bestimme anschließend selbst die Fünferdarstellung der gegebenen Zahlen.

a) 419
b) 556
c) 970
d) 1251
e) 2024
f) 2926
g) 4000
h) 6552



35. a) Übertrage ins Dezimalsystem.

10_5 =	1000_5 =	$100\,000_5$ = 3125
100_5 =	$10\,000_5$ =	$1\,000\,000_5$ =

b) Wie viele Stellen haben folgende Zahlen im Fünfersystem?

Zahl	300	624	626	2500	4711	16061
Stellenanzahl						

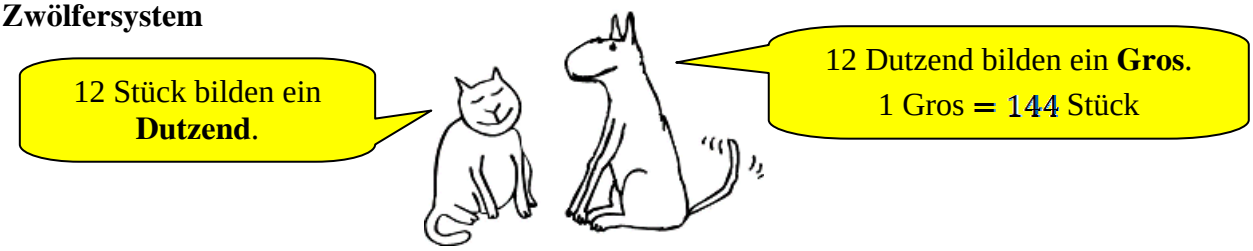
36. Addition und Multiplikation

Halte in der Additions- und Multiplikationstafel fest, wie die einstelligen Zahlen des Fünfersystems addiert bzw. multipliziert werden.

+	0_5	1_5	2_5	3_5	4_5
0_5					
1_5					
2_5					
3_5					
4_5					

·	0_5	1_5	2_5	3_5	4_5
0_5					
1_5					
2_5					
3_5					
4_5					

37. Zwölfersystem



a) Gib die Stückzahl an.

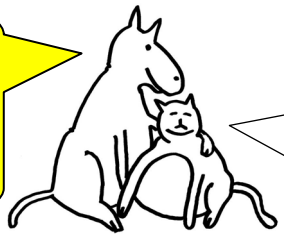
7 Dutzend 9 Stück =
1 Gros 6 Dutzend =
3 Gros 8 Stück =
3 Dutzend 10 Stück =
2 Gros 5 Dutzend 2 Stück =
6 Gros 11 Dutzend 4 Stück =

b) Erfinde für *Stück-Dutzend-Gros* eine Stellenwertschreibweise.

7 Dutzend 9 Stück =	3 Dutzend 10 Stück =
1 Gros 6 Dutzend =	2 Gros 5 Dutzend 2 Stück =
3 Gros 8 Stück =	6 Gros 11 Dutzend 4 Stück =

Das Zwölfersystem (Duodezimalsystem)

- die Ziffern:
  0, 1, 2, ..., 9, A (für zehn), B (für elf)
- die Stellenwerte: $12^0, 12^1, 12^2, \ldots$



$12^2 = 144$
$12^3 = 1728$
$12^4 = 20736$

38. Übertrage ins Dezimalsystem.

a) 98_{12} c) $5B_{12}$ e) 148_{12} g) 1124_{12}

b) $A5_{12}$ d) BA_{12} f) $6AB_{12}$ h) $BBBB_{12}$

39. Übertrage ins Zwölfersystem.

a) 58 c) 143 e) 324 g) 785

b) 121 d) 150 f) 562 h) 1000

40. Zähle im Zwölfersystem.

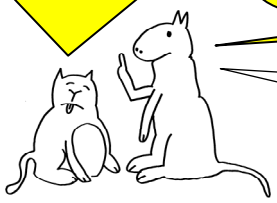
a)	8_{12}						12_{12}
b)	99_{12}						$A3_{12}$
c)	$B7_{12}$						
d)							$B02_{12}$

41. Was du über das Zwölfersystem noch herausfinden kannst

- Wie viele einstellige (zweistellige, dreistellige, *n*-stellige) Zahlen gibt es im Zwölfersystem?
- Additions- und Multiplikationstafel für die einstelligen Zwölfersystem-Zahlen
- Schriftliches Addieren und Multiplizieren im Zwölfersystem

Jede Zahl $b \in \{2, 3, 4, ...\}$ kann Basis eines Stellenwertsystems sein.
Die Stellenwerte sind: $b^0, b^1, b^2, ...$

Die Ziffern sind:
- $0, ..., b-1$, wenn $b \le 10$
- $0, ..., 9$ und $b-10$ weitere Ziffern, z. B. A (für zehn), B (für elf) usw., wenn $b > 10$



$2B9_{13} = 2 \cdot 13^2 + 11 \cdot 13 + 9$

$= 338 + 143 + 9 = 490$

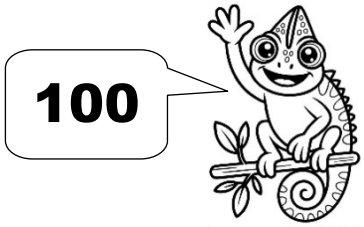
42. Zahlensystem-Mix

Übertrage ins Dezimalsystem.

a) 110_7	d) 132_8	g) $A0B_{13}$	j) 3223_4	m) 21021_3
b) 110_9	e) 132_{15}	h) $A0B_{14}$	k) 3223_6	n) $5A5_{11}$
c) 110_{11}	f) 132_{20}	i) $A0B_{25}$	l) 3223_7	o) BBC_{13}

43. Die Hundert als Chamäleon

Übertrage 100 in andere Stellenwertsysteme, z. B. ins Dreiersystem, Siebenersystem, Neunersystem, Elfersystem, 19er-System, 20er-System.



44. Bestimme die Basis *b* des Stellenwertsystems.

a) $22_b = 8$ c) $73_b = 59$ e) $321_b = 86$ g) $1111_b = 15$

b) $100_b = 49$ d) $140_b = 60$ f) $333_b = 63$ h) $1111_b = 820$

45. a) Gib die größte dreistellige Zahl im Dreiersystem, Achtersystem und Elfersystem an.

b) Wie viele dreistellige (*n*-stellige) Zahlen gibt es im Siebenersystem?

c) In welchem Stellenwertsystem gibt es 110 zweistellige Zahlen?

d) Nenne alle Stellenwertsysteme, in denen 64 Stufenzahl ist.

e) Nenne alle Stellenwertsysteme, in denen 50 eine dreistellige Darstellung hat.

f) Warum gibt es kein Stellenwertsystem mit der Basis 1?

46. Babylonisches Zahlensystem

Das babylonische Zahlensystem ist ein Stellenwertsystem zur Basis 60 (**Sexagesimalsystem**), das bereits vor über 4000 Jahren in Mesopotamien verwendet wurde.

Die Stellenwerte sind von rechts nach links: $60^0, 60^1, 60^2, ...$

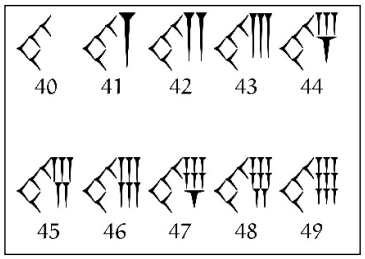
Die „Ziffern“ sind die Zahlen von 1 bis 59 (0 war noch nicht erfunden).

Die Babylonier schrieben diese Zahlen mit zwei Grundzeichen: einem Zeichen für 1 (Keil) und einem Zeichen für 10 (Winkelhaken).

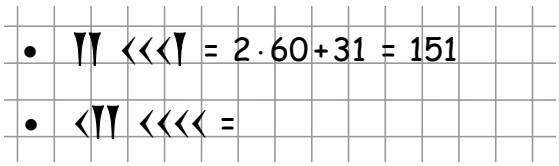
Zeichen für 1: 𒁹
Zeichen für 10: 𒌋

In der Abbildung unten links siehst du eine einfache lineare Darstellung der babylonischen Ziffern. Auf den alten Tontafeln wurden die Keile und Winkelhaken aus Platzgründen und für eine bessere Lesbarkeit mehrzeilig in Blöcken gruppiert (rechte Abbildung).

1	𒁹	10	𒌋	20	𒌋𒌋	55	𒌋𒌋𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹
2	𒁹𒁹	11	𒌋𒁹	21	𒌋𒌋𒁹	56	𒌋𒌋𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹
3	𒁹𒁹𒁹	12	𒌋𒁹𒁹	22	𒌋𒌋𒁹𒁹	57	𒌋𒌋𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹
4	𒁹𒁹𒁹𒁹	13	𒌋𒁹𒁹𒁹	23	𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹	58	𒌋𒌋𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹
5	𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹	14	𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹	24	𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹	59	𒌋𒌋𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹
…	…	…	…	…	…		

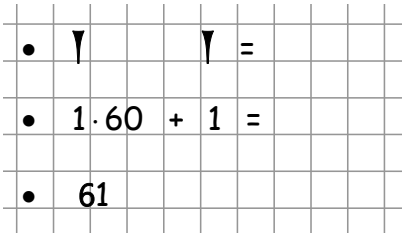


Bei der Zahl 60 wechselt das Zahlensystem auf eine zweite Stelle nach links: Die linke Stelle zählt die Vielfachen von 60, die rechte Stelle die Einer. Zwischen den beiden Stellen lässt man einen größeren Abstand.



Die Babylonier hatten lange Zeit kein Zeichen für die Null.

Das Symbol 𒁹 konnte sowohl 1 als auch 60 (oder $60^2, 60^3, ...$) bedeuten. Oft konnte man aber aus dem Sachzusammenhang schließen, welche Zahl gemeint war.



Beispiel: Der Hirte Hammurabi hatte 𒐗 Kinder (5) und 𒐗 Schafe ($5 \cdot 60 = 300$).

47. a) Übertrage ins Dezimalsystem.

𒌋𒌋𒌋 =	𒐜𒐜𒐜 𒌋𒌋𒐜𒐜𒐜 =	𒐕 𒐜𒐜 𒐜𒐜𒐜 =
𒌋 𒌋𒌋 =	𒌋𒐜𒐜 𒌋𒐝 =	𒐜𒐜𒐜 𒐜𒐜𒐜 𒌋𒌋 =
𒌋𒌋 𒌋 =	𒄭𒐕 𒄭 =	𒌋𒌋𒌋 𒌋𒐝 𒌋𒐝 =
𒌋 𒌋 𒌋=	𒄭𒐝𒐝 𒄭𒐝 =	𒐝 𒌋𒌋𒐝 𒄭𒐝 𒄭 =

b) Übersetze ins babylonische Sexagesimalsystem. Verwende bei großen Zahlen den Divisionsalgorithmus. Benutze die lineare Schreibweise.

51 =	145 =	1281 =	4210 =
83 =	612 =	2000 =	8404 =

c) Das Zeichen 𒌋 kann je nach Stellenwert unterschiedliche Zahlen bedeuten.

Welche Zahl bedeutet es in den nebenstehenden Sachzusammenhängen?

- Der Mensch hat 𒌋 Finger.
- Wurzel braucht für 𒌋 Schritte zwei Minuten.
- Saarlouis hat etwas mehr als 𒌋 Einwohner.

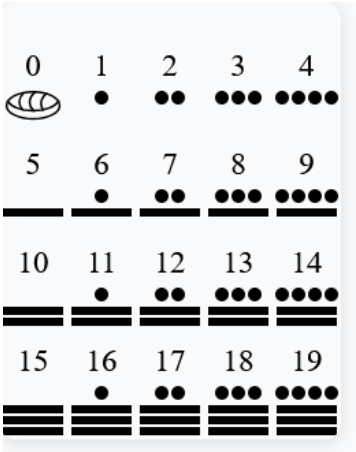
d) Welchen großen Nachteil hat das babylonische Zahlensystem?

e) Wo benutzen wir heute noch die Basis 60 des babylonischen Zahlensystems?

48. Zahlensystem der Maya

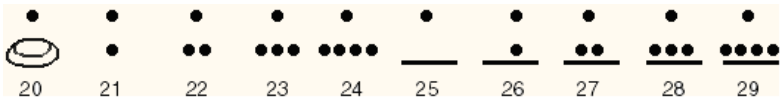
Das Zahlensystem der Maya ist ein Stellenwertsystem zur Basis 20 (**Vigesimalsystem**).

Die Stellenwerte sind: $20^0, 20^1, 20^2, \ldots$

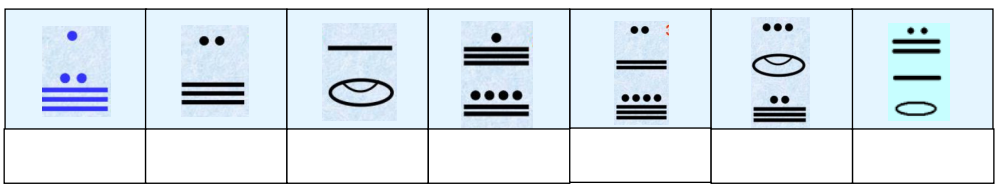


Die „Ziffern“ sind die Zahlen von 0 bis 19. Diese Zahlen wurden mit drei Grundzeichen geschrieben: einem Zeichen für 1 (Punkt), einem Zeichen für 5 (Strich) und einem Zeichen für 0 (Muschel).

Bei der Zahl 20 wechselt das Zahlensystem auf eine zweite Stelle nach **oben**: Die obere Stelle zählt die Vielfachen von 20, die untere die Einer. Große Zahlen werden also **von unten nach oben** in Ebenen gestapelt.



Lies folgende Maya-Zahlen.





Gewöhnlich benutzen wir das Dezimalsystem mit der Basis 10 und den Ziffern 0, 1, 2, ... , 9.

Du kannst aber jede natürliche Zahl $b \geq 2$ als Basis eines Stellenwertsystems wählen.
Die Stellenwerte sind dann $b^0, b^1, b^2, \ldots$ und du benötigst b Ziffern, und zwar

- $0, \ldots, b-1$, wenn $b \leq 10$,
- $0, \ldots, 9$ und $b-10$ weitere Ziffern, z. B. A (für zehn), B (für elf) usw., wenn $b > 10$.

Beispiele: $2210_3 = 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3 + 0 = 54 + 18 + 3 = 75$

$A7B_{15} = 10 \cdot 15^2 + 7 \cdot 15 + 11 = 2250 + 105 + 11 = 2366$

In der Informationstechnik verwendet man das Binär- und das Hexadezimalsystem.

	Binärsystem	**Hexadezimalsystem**
Basis	2	16
Ziffern	0, 1	0, 1, 2, …, 9, A, B, C, D, E, F
Stellenwerte	1, 2, 4, 8, 16, 32, …	1, 16, 256, 4096, …

Umrechnung von der Binärdarstellung/Hexadezimaldarstellung in die Dezimaldarstellung:

$1011001011_2 = 2^9 + 2^7 + 2^6 + 2^3 + 2 + 1$ $= 512 + 128 + 64 + 8 + 2 + 1$ $= 715$	$2CB_{16} = 2 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16 + 11$ $= 512 + 192 + 11$ $= 715$

Du kannst Binärzahlen durch Tetradenbildung (eine Gruppe von 4 Bits heißt Tetrade) direkt in Hexadezimalzahlen umwandeln und umgekehrt.

Beispiel: $1011001011_2 = \underbrace{0010}_{2}\ \underbrace{1100}_{C}\ \underbrace{1011}_{B} = 2CB_{16}$

Kleine Dezimalzahlen lassen sich direkt in Binär- bzw. Hexzahlen umwandeln.

$45 = 32 + 8 + 4 + 1 = 101101_2$
$45 = 2 \cdot 16 + 13 = 2D_{16}$

Bei größeren Zahlen benutzt du am besten den Divisionsalgorithmus. In der Box ist die Hexadezimaldarstellung von 1000 mithilfe des Divisionsalgorithmus berechnet.

$1000 : 16 = 62$ Rest **8**
$62 : 16 = 3$ Rest **14**
$3 : 16 = 0$ Rest **3**
Ergebnis: $1000 = \mathbf{3E8}_{16}$

Die schriftlichen Verfahren der Grundrechenarten funktionieren in jedem Stellenwertsystem grundsätzlich wie im Dezimalsystem. Jedes Stellenwertsystem hat aber sein eigenes Einpluseins und Einmaleins.