

## Eigenschaften des Skalarprodukts

Aus der Definition des Skalarprodukts und den Eigenschaften der Addition und der Multiplikation reeller Zahlen ergeben sich folgende Rechenregeln:

### Rechenregeln für das Skalarprodukt

Für alle  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$  sowie  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:

- |     |   |  |
|-----|---|--|
| (1) | $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$                                     | (Kommutativgesetz)                         |
| (2) | $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ | (Distributivgesetz)                        |
| (3) | $(\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$     | (Verträglichkeit mit der S-Multiplikation) |

### Beweis

Für alle Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$  des  $\mathbb{R}^3$  und alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{S-P.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \\
 &\underset{\substack{\text{K}^+ \\ \text{in } \mathbb{R}}}{=} a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \underset{\substack{\text{S-P.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \vec{b} \cdot \vec{a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right) \underset{\substack{\text{Add.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ b_3 + c_3 \end{pmatrix} \\
 &\underset{\substack{\text{S-P.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} a_1 \cdot (b_1 + c_1) + a_2 \cdot (b_2 + c_2) + a_3 \cdot (b_3 + c_3) \\
 &\underset{\substack{\text{D} \\ \text{in } \mathbb{R}}}{=} a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot b_2 + a_2 \cdot c_2 + a_3 \cdot b_3 + a_3 \cdot c_3 \\
 &\underset{\substack{\text{K}^+, \text{A}^+ \\ \text{in } \mathbb{R}}}{=} (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3) + (a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_2 + a_3 \cdot c_3) \\
 &\underset{\substack{\text{S-P.} \\ \text{in } \mathbb{R}^3}}{=} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\
 &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) \quad (\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} &= \left( \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \stackrel[\text{in } \mathbb{R}^3]{\text{S-M.}} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\
&\stackrel[\text{in } \mathbb{R}^3]{\text{S-P.}} = (\lambda \cdot a_1) \cdot b_1 + (\lambda \cdot a_2) \cdot b_2 + (\lambda \cdot a_3) \cdot b_3 \\
&\stackrel[\text{in } \mathbb{R}]{\text{A}^*} = \lambda \cdot (a_1 \cdot b_1) + \lambda \cdot (a_2 \cdot b_2) + \lambda \cdot (a_3 \cdot b_3) \\
&\stackrel[\text{in } \mathbb{R}]{\text{D}} = \lambda \cdot (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3) \\
&\stackrel[\text{in } \mathbb{R}^3]{\text{S-P.}} = \lambda \cdot \left( \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})
\end{aligned}$$